J U L I O   R E Y   P A S T O R

P E D R O   P I   C A L L E J A

C É S A R   A .   T R E J O

Análisis matemático

Volumen I: Análisis algebraico • Teoría de ecuaciones
Cálculo infinitesimal de una variable

E D I T O R I A L
KAPELUSZ

Moreno 372 · Buenos Aires

Octava edición, julio de 1969

LIBRO DE EDICION ARGENTINA. Printed in Argentina

ISBN 950 13 3301 9

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO III

COMBINATORIA. ALGEBRA LINEAL

CAPÍTULO VI

LAS FUNCIONES REALES Y LA CONTINUIDAD

CAPÍTULO IX

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO Y CONSECUENCIAS

CAPÍTULO X

FÓRMULA DE TAYLOR. ECUACIONES ALGEBRAICAS

CAPÍTULO XI

SERIES DE POTENCIAS

CAPÍTULO XII

INTERPOLACIÓN Y DIFERENCIAS FINITAS

CAPÍTULO XIII

EL ÁREA Y LA INTEGRACIÓN

CAPÍTULO XIV

CALCULO DE PRIMITIVAS Y APLICACIONES

CAPÍTULO XV

APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS

CAPÍTULO XVI

INTEGRACIÓN APROXIMADA

PRESENTACIÓN

Los libros en que durante cuatro decenios expusimos diversas ramas de la Matemática, con reflejos del estado progresivamente alcanzado en los países creadores, merecieron tan benévola acogida en el mundo de origen hispánico, que con ellos se han formado varias generaciones de estudiosos e investigadores, quienes no solamente conocen ya la moderna literatura universal, sino que colaboran en ella, hecho que habría parecido imposible y fabuloso a las mentes españolas de comienzos de siglo. Pero por halagador que sea este balance, el propio autor es el menos satisfecho de sus obras, que ya no reflejan el nuevo modo con que la Matemática está a punto de reorganizarse; y desde hace años viene estimulando a sus jóvenes colegas a emprender la publicación de libros en que tenga eco y forma ese nuevo rumbo, al que ningún país puede quedar ajeno, y que ya cuenta con fieles devotos y aun colaboradores activos en España e Hispanoamérica.

Como cada año que pasa se hace más sensible esta necesidad, el propio autor se ha decidido al fin a organizar la publicación de un nuevo tratado de Análisis matemático, que refleje todo lo bueno de lo clásico y de lo novísimo. Con entusiasmo juvenil y competencia insuperable pusieron mano a la obra los dos amigos colaboradores, plenamente autorizados para utilizar cuanto les agradara de nuestros libros, innovando libremente en el resto, y aquí sale a luz el primer fruto de su extraordinario esfuerzo, realizando el milagro, no superado en la literatura matemática, de organizar una obra que es a la vez introducción, texto y enciclopedia bibliográfica.

Justifica este último calificativo la información exhaustiva de los progresos realizados hasta el día dentro del campo demarcado, y no incorporada aún a los libros extranjeros. La no igualada riqueza en ejemplos y ejercicios, resueltos y cuidadosamente seleccionados, avalora su utilidad didáctica.

Favorable coyuntura para la renovación ansiada por los tres colaboradores ha sido nuestra larga ausencia, que impidió discutir con excesiva minuciosidad gran parte de la obra, enfrentando nuestras distantes opiniones, como se hizo con todo cuidado en algunos capítulos, dejando establecido un criterio medio para los restantes. El honor de los aciertos les pertenece

pues, por entero, pero la responsabilidad del conjunto recae sobre los tres. Es seguro, por ineluctable ley biológica, que de haber proseguido hasta el final nuestra intervención crítica, la obra habría resultado menos novedosa e interesante, más apegada al molde ya clásico desde comienzos de siglo. Pero hasta los más recalcitrantes misoneístas reconocerán una gran moderación en las innovaciones del nuevo estilo, mientras que los espíritus revolucionarios las juzgarán insuficientes; y esa discrepancia de críticas será la mejor prenda de acierto ecuánime.

Jóvenes y viejos alardeamos de ecuanimidad, declarándonos amantes de la renovación perfectiva; pero la discrepancia surge al trazar la divisoria entre lo conveniente y lo repudiable. En nuestro diminuto pleito, ni los autores, aun puestos de acuerdo, ni siquiera el público actual, pueden juzgar con acierto. Será la tendencia triunfadora, por la cantidad y calidad de sus frutos, la que dictará su fallo inapelable. En la ciencia, como en los planos más profundos y vitales de la cultura, "ai posteri l'ardua sentenza"

J. REY PASTOR.

Hamburgo, octubre de 1951.

NOTA A LA SEGUNDA EDICIÓN

Una importante mejora respecto de la primera edición consiste en la puesta al día de la abundante bibliografía citada, incluyendo muchas nuevas obras, de las cuales se da, según acostumbramos, una breve orientación crítica.

Hemos procurado hacer más asequibles los conceptos que la experiencia docente ha mostrado resultaban demasiado abstractos para el principiante, particularmente al introducir y ampliar el concepto de número. Se ha completado el concepto general de definición recurrente, dando esquemas de demostración de las leyes generales de la aritmética, suficientes para que puedan ser desarrollados sin esfuerzo por los alumnos aventajados. En la misma forma se ha completado la nota sobre el álgebra de BOOLE y el apartado que incluye la introducción del número real mediante sucesiones regulares o de CAUCHY.

Se ha procurado también hacer más asequible el importante parágrafo dedicado a la divisibilidad algebraica.

Se ha completado la nota sobre la aritmética decimal de los números aproximados, agregando en particular un apartado sobre operaciones abreviadas.

En la nota sobre funciones derivadas se da demostración completa simplificada del teorema de SCHEEFFER, del que se dará para el caso de funciones vectoriales en el volumen II otra demostración basada en un lema de ZYGMUND.

Se ha perfeccionado el estudio de los ceros de las funciones continuas y la nomenclatura de los órdenes infinitesimales e infinitos.

Con la ejemplificación correspondiente, se ha incluído en el método de GRÄFFE un procedimiento de control de los cálculos efectuados, completando una contribución publicada por J. P. LOMBARDI.

Se ha perfeccionado la exposición y ejemplificación del teorema general de BÉZOUT.

Se ha simplificado el ejemplo de conjunto generalizado de CANTOR de medida positiva que se aplica al de VOLTERRA de derivada acotada no integrable (R). Se completa el estudio de la sustitución de variables en la integral (R) definida.

Además de los citados, se han efectuado numerosos otros agregados o modificaciones menores, y se han subsanado errores y erratas hallados por nosotros mismos o por queridos colegas y alumnos. Les expresamos por ello nuestro agradecimiento, en particular al Dr. GERMÁN FERNÁNDEZ, por las valiosas indicaciones didácticas que ha tenido la gentileza de hacernos llegar.

NOTA A LA SÉPTIMA EDICIÓN

El ritmo de mejoras señaladas en la Nota a la segunda edición, ha continuado en mayor o menor medida en las sucesivas ediciones posteriores.

Las más importantes hechas *en esta séptima edición* pueden verse en Cap. I-nota I, § 11-1, § 13-4, § 20-4, § 33-9, Cap. IX-nota VI, § 38-6, § 41 (reestructurado), § 52-2, Resp. a § 18-ej. 5. Entre los innumerables cambios de detalle están los de §§ 13-1, 16-5, 17-2 y 3, 22-2 y 6, y 51-4, Cap. XI-nota 2 y figuras 39 y 87.

En el hallazgo de erratas y errores agradecemos la valiosa ayuda de colegas y alumnos, en especial los doctores G. FERNÁNDEZ y J. GORDON, y el licenciado J. D. BENÍTEZ.

PLAN DE LA OBRA

1. FINALIDAD Y ESTRUCTURA. — *He aquí una obra de colaboración, en que se pretende aunar experiencias diversas de publicaciones anteriores y práctica docente, mediante una labor de conjunto y crítica mutua. Destinado el libro a servir de base a cursos formativos de iniciación universitaria en las Facultades de Ciencias, preparatorios de estudios superiores de Ingeniería o de doctorado en Física y Matemática, la selección de materias se ha guiado por los planes de estudio de las universidades y escuelas técnicas profesionales de Hispanoamérica, en particular de la Argentina, pero sin sujetarse a ningún programa determinado, antes bien, con afán de superación y aliento renovador.*

Si la Matemática es importante como fundamento de mucha parte de la Ciencia y de la Técnica, no lo es solamente por tratar del espacio y de la cantidad, sino mucho más profundamente por constituir el conjunto de sistemas hipotético-deductivos y de sus aplicaciones.

Más importancia que los resultados y casos en que pueda aplicarse una fórmula matemática tiene la obtención de nuevos métodos y la suma de experiencias mentales con que va enriqueciendo nuestra facultad racional. Por ello, en la enseñanza de la Matemática debe preponderar su valor formativo, pues la adquisición de una disciplina mental es tal vez el elemento más valioso de toda educación científica.

La aritmetización de la Matemática, lograda en el siglo XIX, *redujo esta ciencia a una larga cadena de deducciones y construcciones, a partir del número natural. De ahí que previo al estudio del Cálculo infinitesimal, creamos imprescindible una introducción algebraica sobre el concepto de número y sus operaciones, y un análisis depurado del concepto de límite aritmético, cuya adquisición clara y precisa ha de ser uno de los principales objetivos a obtener en la formación del principiante.*

Éstas no son exigencias de matemático puro, pues nada más contraproducente que llenar la mente del futuro ingeniero con vagos juegos de palabras, de sabor metafísico, que disimulen la oscuridad de pensamiento. Si por llegar rápidamente a las aplicaciones del Cálculo infinitesimal, resucitamos antiguas de-

finiciones de curva, de tangente, de infinitésimo, de diferencial, veremos que después de larga cavilación sobre los "puntos consecutivos" de una curva, sobre el infinitésimo que ni es cero ni tiene valor ninguno, sobre los infinitésimos que se desprecian sin alterar la exactitud del resultado, todo deberá descansar en una fe ciega y aceptarse como dogma, sin que sea posible despertar y desarrollar el espíritu crítico. Hace tiempo que se pusieron en claro los anteriores conceptos y que el Cálculo infinitesimal dejó de ser Metafísica para hacerse Aritmética, es decir, claro, sencillo, limpio de nebulosidades y libre de discusiones. Pues bien, nadie como el técnico debe ser exigente en claridad y precisión; nada más lejano de la Metafísica que el hierro y el hormigón.

En la exposición de las teorías elementales hemos tenido muy en cuenta la evolución de la Matemática en los últimos años, pues es natural que aquéllas sufran las variadas influencias que las modifican y adaptan a la línea general del pensamiento de cada época. Así, al ir pasando de lo particular a lo general en el proceso de abstracción que caracteriza a la Matemática moderna, hemos señalado bien las importantes ventajas con que ésta utiliza el formalismo lógico en sus máximas posibilidades, y la economía de esfuerzo y mayor penetración del conocimiento que con ello se logra. Sin embargo, no por eso dejamos de considerar equivocado el introducir los conceptos elementales como casos particulares de los contenidos en teorías modernas que abarcan el más amplio grado de generalidad y abstracción. Como ha dicho el profesor PASCAL, *"hacer descender de lo alto los conceptos del Análisis es didácticamente equivocado, históricamente absurdo, conceptualmente hipertrófico y científicamente inútil". No debe pedirse a jóvenes inteligencias, lo que la historia del pensamiento humano demuestra requiere tiempo, ejercitación y adecuada adaptación mental.*

Por ello procuramos siempre introducir conceptos nuevos mediante una ejemplificación previa concreta y familiar, dando para cada teoría una visión intuitiva, que sitúe adecuadamente en la atención del lector el propósito perseguido. Claro está que éste debe aspirar a que los conceptos elementales se asimilen, a fin de preparar para estudios superiores, labor posible y adecuada por la enorme simplificación alcanzada en el desarrollo de la Matemática moderna, como saben todos aquellos que siguen la evolución de las nuevas ideas, y cuyo conocimiento más o menos cercano posee todo profesor universitario.

El texto en letra grande está destinado a la generalidad de los alumnos técnicos y científicos, y es lo mínimo que consideramos deben conocer los que aspiran a una formación básica en Matemática. El texto en letra pequeña se destina a los que aspiren a salir de la común mediocridad y a

los que deseen prepararse adecuadamente para una carrera científica o técnico-científica. Existen, además, notas de final de capítulo que completan puntos importantes y pretenden abrir horizontes a los lectores de vocación desarrollada, y, al mismo tiempo, hacer interesante el libro a los que tengan una formación matemática anterior.

En todo el volumen se toma cada parágrafo (§), dividido en apartados, como unidad fundamental de referencia, y va seguido de ejercicios propuestos, que a veces sirven también para completar el texto, y que en todo caso ofrecen al lector, mediante su resolución, la mejor prueba de que ha llegado a comprender y asimilar el contenido del correspondiente parágrafo. Al final del volumen se incluye una lista de soluciones de los ejercicios que a ello se presten, y en los más difíciles, de indicaciones para llegar a ellas.

2. CONTENIDO. — *El índice general da el programa ordenado de los temas tratados. Aquí no pasamos revista a todos ellos, sino a aquellos en los que creemos conveniente señalar alguna particularidad importante.*

Es común en los tratados de Análisis matemático preocuparse mucho por introducir rigurosamente el concepto de número real, suponiendo perfectamente conocido el de número racional. Cualquiera sea el nivel alcanzado en estudios preuniversitarios, siempre realizados en edad muy temprana, nuestra experiencia docente considera como gratuita la anterior suposición. Así, el primer capítulo de la obra se dedica a la fundamentación del número racional. Empieza por una breve introducción lógica sobre la estructura y métodos de la Matemática, en un nivel elemental, que puede ser bien comprendido por un principiante, y con el objeto de facilitar la exposición posterior de las diversas ampliaciones del concepto de número y la unidad metodológica con que se efectúan.

Cuestión muy discutida fué la manera de introducir en el § 2 el número natural. Finalmente adoptamos su definición más sencilla, debida a PEANO, *que se apoya esencialmente en el principio de inducción completa. Si bien el significado estricto de las operaciones de suma y producto es cardinal, las propiedades características y particulares de los números naturales, que son las más inmediatas a nuestra mente, las que se refieren a conjuntos discretos y finitos, quedan laboriosamente establecidas en la teoría general de conjuntos, con definiciones y teoremas poco intuitivos. Dado que las obras de iniciación universitaria hasta ahora escritas en castellano han dado preferencia al método cardinal, y a ellas pueden referirse los que opten por éste, será siempre interesante que exista alguna otra que dé por lo menos un rápido esquema del método recurrente. Se ha achacado a éste el requerir reiteradamente monótonas demostraciones inductivas, que carecen de valor heurístico. Esta crítica justa puede ser mitigada si se renuncia, más aun en un estudio inicial, a detenerse en desarrollar con todo detalle esas demostraciones lentas y penosas que perturban la visión de conjunto y la línea de pensamiento seguida. Esto no ha de ser defecto en el valor formativo del estudio, si en éste se ha insistido previamente sobre el carácter fundamentalmente lógico del desarrollo matemático, ni ha de obstruir el naciente espíritu crítico de los alumnos capaces, si se dejan a su cargo, como ejercicio, demostraciones fáciles de obtener por analogía, con pequeñas indicaciones oportunas. Los demás aceptan sin repugnancia sea "demostrable" algo que para ellos es la "evidencia" misma.*

El § 4 muestra ya que no sólo la parte conceptual, sino también la técnica operatoria, ha merecido nuestra atención. El § 5 desarrolla los principios esenciales de la divisibilidad numérica desde un punto de vista superior, que facilite luego la clara comprensión de la divisibilidad algebraica, tan difícil de captar por los principiantes; en letra chica se han incluído operaciones con clases residuales y los conceptos de grupo, anillo

y cuerpo, cuya importancia básica en el Algebra moderna queda bien puesta de relieve en el texto posterior del mismo tipo de letra.

El capítulo II se dedica al número real y al número complejo. Siempre en busca del método de mejor comprensión intuitiva, es decir, más próximo a los conceptos usuales en la práctica, se introduce el número real (§ 7) mediante sucesiones monótonas contiguas, por ser generalización inmediata de las aproximaciones decimales con que se está acostumbrado a dar como resueltas ecuaciones del tipo de la pitagórica, cuyo examen y la conexa existencia de segmentos inconmensurables juzgamos es el mejor exordio, tanto histórica como racionalmente, para justificar la introducción del nuevo concepto. Sin embargo, también se consideran los otros métodos que existen para "completar" la recta racional. En el número complejo se llega sólo a la radicación (§ 10), dejando para el capítulo XI introducir naturalmente, por prolongación analítica, las definiciones de potenciación y logaritmación cualesquiera. Al final del capítulo II, su nota I sobre plenitud y unicidad de los números reales sirve para que al tratar en la nota II del infinito matemático, se dé la demostración que nos parece más natural de no-numerabilidad del continuo, mostrando bien que si quisiéramos circunscribirnos a considerar conjuntos numerables, habríamos de renunciar a "completar" la recta. En la nota III sobre sistemas hipercomplejos, se marca bien cómo se pasa de los espacios "vectoriales" a los conjuntos "numéricos", situando adecuadamente el teorema final de la Aritmética y la importancia de los cuaternios.

En el capítulo III se ha tratado el Análisis combinatorio (§ 11) lo más rápidamente posible, dejando para la nota I de final de capítulo estudiar los grupos de sustituciones entre permutaciones. La fórmula de LEIBNIZ *sobre potencia de un polinomio (§ 12), se da con todo el detalle que merecen sus aplicaciones posteriores, pues el descuidarlo ahora, dificulta luego manejar por ejemplo la fórmula de* TAYLOR *en varias variables. Por su importancia fundamental y cada día mayor en el estudio de las modernas teorías físicas, creemos imprescindible el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (§ 15) en todos los casos, sobre todo el teorema de* ROUCHÉ-FROBENIUS, *con su conexo cálculo de matrices (§ 14). Previamente se consideran el planteamiento, la transformación y la equivalencia de ecuaciones, tratando de evitar el descuido usual con que se tratan estas cuestiones.*

El capítulo IV, sobre algoritmo algebraico, está encarado en forma bastante nueva respecto a lo que suele hacerse en los textos anteriormente aparecidos en castellano. Después del § 16, destinado al principio de identidad y operaciones racionales, se insiste (§ 17) en el fundamental concepto de irreducibilidad en un campo racional y los teoremas de la divisibilidad algebraica que de ahí se deducen. Luego se hace la distinción esencial de la divisibilidad algebraica entre polinomios de "una" o "más" variables, aclarada en ambos casos con adecuados ejemplos elementales, y mediante la introducción del concepto de ideal se desarrolla el primer caso, en forma completamente paralela a la divisibilidad numérica, mientras se señalan las nuevas circunstancias del segundo. Se da una detallada demostración del teorema fundamental del Algebra (§ 18) por el método de la disminución del módulo y se pasa a la resolución por radicales de las ecuaciones elementales (§ 19).

Al dar el criterio general de convergencia, se introducen las sucesiones regulares (de CAUCHY *o de* CANTOR*) como método para definir el número real, indicando sus ventajas teóricas y sus inconvenientes didácticos. Se tratan con cuidado los casos singulares de límites de potencias, con ejemplos de todos ellos, distinguiendo bien los casos de oscilación de los de indeterminación. Los criterios clásicos de convergencia de las series de términos positivos se sistematizan bien, mediante los criterios de comparación de primera y de segunda especie, sin olvidar el que se deduce de la comparación de primera especie con la serie armónica generalizada.*

muy sencillo y útil, análogo al potencial de las integrales generalizadas, y que a pesar de ello se descuida en muchos textos elementales. Numerosos ejemplos y observaciones aclaran el alcance de los distintos criterios. Para la convergencia condicional se dan los clásicos de ABEL y de DIRICHLET. Las operaciones de producto y cociente de series incluyen un ejemplo poco conocido, que hemos elementalizado y simplificado al sacarlo de las memorias originales de PRINGSHEIM. Al final del capítulo V, en la nota I, sobre algoritmos de convergencia y sumación, se estudia la transformación de TOEPLITZ, con su aplicación a las medias aritméticas y geométricas deducidas de una sucesión, el criterio de STOLZ, los teoremas de MERTENS y ABEL sobre producto de series y sobre todo, la sistematización que la transformación de TOEPLITZ establece en los métodos de sumación o convergencia generalizada. En la nota II se da una rápida exposición de la Aritmética decimal de los números aproximados. La nota III, dedicada a fracciones continuas, empieza dando el proceso con que éstas se originan, para así introducir, en forma rápida y simultánea, las finitas y las indefinidas. Va luego el estudio de las reducidas, de los teoremas de aproximación y de las aplicaciones a la representación de irracionales y resolución de ecuaciones diofánticas. Se ha dejado para el capítulo XI la exposición de los productos infinitos, con el fin de poder tomar logaritmos en el caso complejo; las series múltiples se han dejado para el volumen II.

El capítulo VI trata de las funciones reales y de la continuidad. Las definiciones rigurosas se enuncian después de adecuada preparación y se aclaran mediante numerosos ejemplos. En la nota II se distinguen con precisión no acostumbrada los puntos límites referentes, ya sea a los conjuntos puntuales ya sea a las sucesiones.

En el capítulo VII se destaca didácticamente la importancia fundamental de las funciones trascendentes elementales: exponencial, logarítmica y potencial; circulares; hiperbólicas. Al estudiar la representación paramétrica se introduce la definición analítica de curva plana, cuya amplitud se ejemplifica en la nota I de final de capítulo, mediante las curvas de PEANO. La nota II se dedica a tablas de funciones, mencionando lo realizado últimamente por norteamericanos e ingleses.

El capítulo VIII, sobre funciones derivables, introduce el concepto con la posibilidad de que la derivada sea única infinita (con signo determinado).

El capítulo IX, sobre teoremas del valor medio y consecuencias, empieza dando la idea intuitiva del teorema del incremento finito, para luego precisar su alcance y demostrarlo en forma rigurosa y generalizada. La admisión de derivada única infinita permite tratar en forma completa los límites indeterminados, aclarando con adecuados ejemplos el alcance de la regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL. Se dan los órdenes fundamentales de infinitud, su naturaleza no arquimediana y su aplicación al estudio de asíntotas y direcciones asintóticas de las curvas planas, donde, apartándonos de las exposiciones usuales, se distingue bien el caso de rama parabólica, de aquel en que existe dirección asintótica pero no asíntota, ni propia, ni impropia. Asimismo, se precisa en los ejercicios la distinción entre asíntota y posición límite de la tangente, cuyo punto de contacto se aleja sobre la rama de curva considerada. La nota IV, sobre propiedades de la función derivada, trata de la convergencia uniforme de la razón incremental y del teorema de DARBOUX. La nota V, sobre números derivados y funciones derivadas, es muy profunda, habiéndose conseguido exponer los clásicos teoremas de SCHEEFFER con demostraciones breves y sintéticas. La nota VI se dedica al teorema fundamental del Cálculo integral, introduciendo la función ternaria de CANTOR, que, modificada adecuadamente, sirve para dar un ejemplo muy sencillo de no cumplimiento de dicho teorema para funciones continuas, si se exige solamente la igualdad de derivadas, sin sobrentender que sean finitas. En la nota VII va una expo-

sión elementalizada del ejemplo de VAN DER WAERDEN de función continua, que en todo punto carece de derivada finita, ni aun lateral.

El capítulo X se dedica a la fórmula de TAYLOR y a las ecuaciones algebraicas. Como aplicación de la derivación sucesiva (§ 38) se tratan los ceros reales múltiples de las funciones continuas, para lo cual es muy útil la precisión con que se ha introducido el orden infinitesimal, y que permitirá estudiar con gran generalidad en las hipótesis, la validez de la fórmula de TAYLOR y de las diferentes formas de su término complementario. La fórmula de TAYLOR (§ 39) se introduce naturalmente, mediante la noción intuitiva de polinomio "osculador", para lo que se han estudiado previamente los órdenes de contacto de dos curvas planas. En aproximación lineal, se trata la resolución numérica de ecuaciones cualesquiera mediante la regla de NEWTON-FOURIER, en conexión con el extenso § 41 sobre resolución numérica de ecuaciones algebraicas con separación de raíces y teorema de STURM, cálculo de raíces racionales, irracionales y complejas, e idea del método de GRÄFFE. Va otro parágrafo (§ 42) sobre eliminación algebraica. En el método de EULER, es de señalar la forma factorial de la resultante dada modernamente por E. T. WHITTAKER, y sobre todo la demostración sencilla y rigurosa que hemos obtenido en el caso de que los dos polinomios de grado m y n tengan el m. c. d. precisamente de grado $r > 1$. Esto nos sirve para demostrar en forma breve el teorema general de BÉZOUT, acabando el parágrafo con el método de eliminación de KRONECKER. Aprovechamos la ocasión para lamentar que en muchos textos dedicados a ingenieros, y mucho más a físicos o matemáticos, se omitan totalmente estas cuestiones, algunas de las cuales son también de valor práctico. La nota III, sobre funciones simétricas de las raíces y discriminante, además de su importancia en la teoría superior de la resolución algebraica, sirve para justificar los procedimientos ya empleados en el capítulo IV para la resolución de las ecuaciones elementales. En la nota IV, sobre resolución gráfica de ecuaciones, nos detenemos sobre todo en el método de LILL, dando de la Nomografía una adecuada orientación bibliográfica en la nota siguiente.

El capítulo XI, sobre series de potencias, empieza estudiando sus propiedades generales en el campo complejo, incluso la convergencia uniforme, tema a tratar más extensamente en el volumen II. Los parágrafos siguientes se dedican a los métodos de desarrollo y a la aplicación a las trascendentes elementales. Aun cuando la prolongación analítica se tratará en el volumen III, se estudian ahora las trascendentes elementales en el campo complejo, para dar la teoría aritmética de las funciones circulares e introducir naturalmente las definiciones de potenciación de exponente complejo y de logaritmación y potenciación cualesquiera. Así se justifica la importancia intrínseca de la admirable fórmula de EULER, que liga los cinco números más importantes de la matemática: $e^{i\pi} + 1 = 0$, así como la línea de pensamiento que en forma no rigurosa siguió el mismo EULER para obtener la serie exponencial en el campo complejo, como $\lim (1 + x/n)^n$ para $n \rightarrow \infty$. También queda completamente justificado un ejemplo paradójico original, que se dió en el capítulo II, para explicar la restricción de tomar siempre base positiva en el estudio de la potenciación en el campo real. La nota II trata de los métodos para calcular numerosas cifras del número π, dando cuenta del error de SHANKS, descubierto en 1946 por FERGUSON. La nota III se dedica a los productos infinitos, tema importante, que se aplica posteriormente, entre otras cuestiones, a la Teoría de Funciones, y que se descuida en muchos textos.

El capítulo XII, sobre interpolación y diferencias finitas, da primeramente, en la forma más sencilla y práctica posible, la fórmula de LAGRANGE y la interpolación parabólica progresiva, aprovechando la primera para estudiar la descomposición de una fracción algebraica en fracciones simples. Se estudia luego en particular la interpolación entre valores equidistantes, dando los útiles operadores simbólicos, llegándose a la fór-

mula de NEWTON-GREGORY *por varios caminos. En la nota I se estudian las diferencias divididas y su aplicación a la obtención de las fórmulas de* LAGRANGE *y de* NEWTON, *y a la importante significación que mediante ellas adquieren los coeficientes diferenciales de* PEANO, *definidos en la nota I del capítulo X. En la nota II se estudia el empleo de diferencias centrales con la intuitiva notación de* SHEPPARD, *así como sencillas demostraciones de las fórmulas de* BESSEL *y* STIRLING, *previa deducción de la de* NEWTON-GAUSS *y uso práctico del término complementario en cada caso; la distinta utilidad de las diferentes fórmulas queda aclarada mediante oportunos diagramas y la notación de* SHEPPARD.

El capítulo XIII introduce el concepto de integral según CAUCHY *(§ 48), con todo rigor, pero basándolo en la noción intuitiva de área. Se dedica el breve § 49 a la integral de* RIEMANN, *y en el § 50, sobre integral y primitiva, se estudia con todo cuidado la aplicación más generalizada posible de la regla de* BARROW, *para lo que se dan también breves nociones de integrales generalizadas, de intervalo infinito o de integrando infinito, y cuyo estudio detenido se deja para el volumen II, y para el III el de la teoría superior de la integración y su aplicación a las series de* FOURIER. *La nota III, sobre condiciones de integrabilidad* (R), *da las debidas a* RIEMANN, DU BOIS REYMOND *y* LEBESGUE, *esta última mediante la definición directa de conjunto de medida nula. La nota IV, sobre derivada acotada no integrable* (R), *desarrolla en forma gráfica y elemental el clásico ejemplo de* VOLTERRA.

En el capítulo XIV (Cálculo de primitivas y aplicaciones), el § 51 estudia los métodos generales de integración, con numerosos ejemplos; la sustitución de variable en la integral definida se ha hecho en condiciones cuidadosamente estudiadas para que quede justificada en casos más generales que los que suelen darse en textos de otros autores.

El capítulo XV, sobre aplicaciones geométricas y físicas, empieza con el cálculo de áreas y volúmenes que suele hacerse en todos los textos, pero tratando cuidadosamente la atribución de signo al área orientada, cuestión sobre la que se propone un ejercicio muy instructivo. En la rectificación de curvas planas (§ 55) se procura que, sin perder rigor, el tema se desarrolle en forma progresiva respecto a su dificultad. Se dice algo sobre integrales elípticas, y se sigue con curvatura, vértices y evoluta, esto último a completar en el volumen II. El parágrafo acaba con variación total y longitud, incluyendo el criterio de JORDAN, *que constituye una de las justificaciones para introducir la integral de* LEBESGUE, *a tratar en el volumen III. Se deja para las notas finales del capítulo el considerar la convergencia según la norma en los conceptos de longitud y variación, con el conexo lema de* DARBOUX, *referente a la definición de integral, y la demostración de la continuidad de la longitud, así como el principio de semicontinuidad inferior, básico en la generalización de la teoría a las superficies según* LEBESGUE, *y que se verá en el volumen III.*

El último capítulo de este volumen se dedica a la integración aproximada, desarrollada en forma bastante completa. El parágrafo más importante (§ 57) trata de la integración numérica, y se empieza por la fórmula de los trapecios, cuya inclusión se justifica en vista de su perfeccionamiento mediante la fórmula de EULER-MACLAURIN, *que se incluye en la nota II de final de capítulo. En el método de* SIMPSON *se da el resto de* PEANO, *y otro menos preciso, pero más fácilmente obtenible. Se aprovecha la integración por desarrollo en serie para introducir como ejemplos la función error, la integral-seno, la exponencial-integral y la logaritmo-integral. La fórmula de integración de* GAUSS *se empieza a estudiar en forma elemental, pasando luego al caso general mediante los polinomios de* LEGENDRE, *que son objeto de la nota III de final de capítulo. La aplicación de los métodos de interpolación completa la obtención de la fórmula anterior y da también la antigua, aunque menos preferible, fórmula de* NEWTON-COTES. *El § 58 trata de integración gráfica, incluyendo*

la cuestión de escalas, tema a veces descuidado, y muestra bien la ventaja de efectuar la compensación por verticales y no por horizontales para el trazado de la curva integral. El último parágrafo (§ 59) trata de la integración mecánica, exponiendo sólo los principios generales en que se basan integrafos y planímetros. Se trata la teoría general de los planímetros de ruedecilla integradora, dando cuenta de las principales causas de error. El parágrafo termina con la descripción del notable y sencillo planímetro de PRYTZ *y un bosquejo de su teoría, basada en un principio distinto de los anteriores.*

3. BIBLIOGRAFÍA GENERAL. — *La última nota de cada capítulo se dedica a dar orientación bibliográfica, en forma crítica y explicativa. Por lo general se citan libros y no memorias, y entre aquéllos se han elegido los que consideramos más apropiados para ser consultados por nuestros lectores, o bien representan cimas maestras, de influencia decisiva en la marcha del pensamiento científico. En ellos, no sólo podrá efectuarse un estudio más amplio de las diversas teorías aquí expuestas, sino que también se encontrarán citadas las monografías originales, que podrán consultar aquellos que quieran emprender un estudio más profundo de la cuestión que interese.*

Ahora, y con carácter general, citaremos primero la obra enciclopédica completa, de útil consulta para toda teoría matemática, con los resultados obtenidos hasta la fecha de su publicación y abundantísima bibliografía de memorias originales, cuyo título es:

Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. (19 volúmenes, publicados por Teubner, Leipzig, 1898-1931. Comenzada recientemente su reedición).

Esta ha sido traducida en parte al francés, con artículos refundidos, bajo el título:

Encyclopédie des Siences Mathématiques pures et appliquées. (Gauthier Villars, París, 1904-1931).

Un resumen enciclopédico, más sintético que la obra anterior, indicando bibliografía fundamental, se da en el:

Pascals Repertorium der höheren Mathematik. (2ª ed.; I: *Analysis*, dirigido por E. SALKOWSKI; 1. *Algebra, Differential- und Integralrechnung*, 1910; 2. *Differentialgleichungen, Funktionentheorie*, 1927; 3. *Reelle Funktionen, Neuere Entwicklungen, Zahlentheorie*, 1929; II: *Geometrie*, dirigido por H. E. TIMERDING; 1 *Grundlagen und ebene Geometrie*, 1910; 2 *Raumgeometrie*, 1922; Teubner, Leipzig-Berlín).

Una visión general de la Matemática, con carácter de divulgación y artículos de muy variado mérito, es proporcionada por la lectura de:

L'Encyclopédie Française. Tomo I: *L'outillage mental*; tercera parte: *La Mathématique*, dirigida por P. MONTEL, (13 rue du Four, París, 1937).

Manual encliclopédico de Matemática elemental para profesores y alumnos es:

WEBER-WELLSTEIN: *Enzyklopädie der Elementarmathematik.* (I: *Arithmetik, Algebra und Analysis*, por H. WEBER, 5ª ed., refundida por P. EPSTEIN, 1934; II: *Elemente der Geometrie*, por H. WEBER, J. WELLSTEIN y W. JACOBSTHAL, 3ª ed., 1915; III: *Angewandte Elementarmathematik*; 1 *Mathematische Physik*, por H. WEBER y J. WELLSTEIN, 3ª ed., refundida por R. H. WEBER, 1923; 2. *Darstellende Geometrie, graphische Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, politische Arithmetik und Astronomie*, por J. WELLSTEIN, H. WEBER, H. BLEICHER y otros, 3ª ed., 1924; Teubner, Leipzig-Berlín).

Obra más reciente, también de carácter enciclopédico elemental, es:

L. BERZOLARI, L. G. VIVANTI, D. GIGLI: *Enciclopedia delle matematiche elementari.* (I: *Análisis*, 2 vols., 1930-32; II: *Geometría*, 2 vols., 1937-38; III: *Matemáticas aplicadas*, 2 vols., 1947-48; Hoepli, Milán).

Libro de orientación bibliográfica, descuidando la de origen latino, pero útil por su en general bien seleccionado contenido en la de origen anglogermánico, es:

PARKE, N. G. III: *Guide to the Literature of Mathematics and Physics including related works on engineering Science* (2ª edic. ampliada, Dover, N. Y., 1958).

En el segundo y tercer volumen será publicada la parte de Análisis infinitesimal que completa los programas usuales cursados en nuestras universidades sobre la propedéutica, tanto de la Ingeniería como de las materias superiores de los doctorados en Física y Matemática.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTACIÓN DEL NÚMERO RACIONAL

§ 1. INTRODUCCIÓN LÓGICA

1. **Unidad y conjunto.** — La idea de *unidad* nace en nosotros al *distinguir* o individualizar un objeto del resto del universo, prescindiendo (haciendo abstracción) de todas sus demás cualidades (v. g.: al tomar conciencia del *yo* como algo distinto del *no-yo*). La idea de unidad lleva implícita en ella la idea de *pluralidad* o *conjunto* de entes.

Estas ideas de unidad y conjunto son *primitivas*, es decir, no reducibles a otras más simples, y tienen valor puramente relativo, pues todo ente es, a su vez, un conjunto de otros entes que lo componen, y todo conjunto puede considerarse a su vez como una nueva unidad, pudiéndose formar con estas unidades compuestas (también llamadas *de orden superior*) nuevos conjuntos, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1. Pueden considerarse como unidades de los conceptos posteriores y como conjuntos de los anteriores, los conceptos siguientes: letras, sílabas, palabras, párrafos, páginas, capítulos, libros, bibliotecas. O como se ha visto en Aritmética elemental: unidad, decena, centena, millar, etc.

Hay dos caminos para definir o determinar un conjunto, también llamado *clase*, métodos que los lógicos designan por *extensión* y por *comprensión*. Para expresar que el conjunto M consta de los elementos a, b, c, escribiremos $M = \{a, b, c\}$, o bien: a, b, c; con ello damos la extensión del conjunto M al enunciar cada una de las unidades que lo componen. Este método para determinar los conjuntos es el más frecuente en la vida ordinaria, pero sólo es apropiado para conjuntos con pocos elementos. Por otra parte, los conjuntos infinitos (§ 2-9) sólo pueden definirse por comprensión, es decir, *dando un criterio que permita reconocer para cada ente arbitrario, si pertenece o no al conjunto.*

Para evitar antinomias (expresiones contradictorias), algunos autores consideran que solamente puede formarse un conjunto con objetos que *existan* (§ 1-4) anteriormente. Así, definir un conjunto M es dar una propiedad característica P, perteneciente a ciertos elementos de un conjunto N, anteriormente definido. Éste es el *género próximo*, y P la *diferencia específica.*

También se enuncian las siguientes condiciones para definir un conjunto:

a) Los elementos que forman el conjunto han de ser entes bien definidos (puntos, números, etc.).

b) Para cada uno de estos elementos no hay otra alternativa que la de pertenecer o no al conjunto.

c) Para cada par de elementos a considerar no hay otra alternativa que la de estar formado o no por elementos distintos.

Cuando la condición impuesta P es contradictoria, no existe ningún elemento que la cumpla, y se dice que define un conjunto *vacío*, que suele simbolizarse por 0.

EJEMPLO 2. Son vacíos los conjuntos siguientes: triángulos equiláteros rectángulos; números primos pares mayores que 2.

Un solo elemento a puede también concebirse como un conjunto $\{a\}$ que consta de la sola unidad a, pero en este caso son conceptos *distintos* los de unidad a y conjunto $\{a\}$ que ella sola forma.

Prescindir de esta distinción u otras, así como introducir conceptos y razonamientos en círculo vicioso (tal la expresión "el conjunto de todos los conjuntos"), da lugar a antinomias o paradojas famosas, como las de CERVANTES (*Don Quijote de la Mancha*, 2ª parte, cap. LI), BURALI FORTI, RUSSELL, etc. Éstas corresponden al siguiente tipo de proposición: "Es una regla que *todas* las reglas tienen excepciones". Si la regla anterior tiene excepción, entonces debe haber alguna regla sin excepción, contra lo afirmado por la proposición, que queda así sin sentido.

Para expresar que un elemento a pertenece a un conjunto M suele escribirse $a \varepsilon M$ (a es elemento de M). Si todos los elementos de un conjunto N son también elementos del conjunto M, se dice que N *está contenido* o *incluído* en M, y se escribe * $N (\leqq) M$. Entonces se dice también que M *comprende* a N, y se escribe $M (\geqq) N$. Diremos que el conjunto N es una *parte* o *conjunto parcial* de otro, M, cuando perteneciendo todo elemento de N a M, hay en éste algún elemento que no pertenece a N y entonces se escribe $N (<) M$, o bien: $M (>) N$. Podemos suponer, siempre, que el conjunto vacío está contenido en cualquier otro. Si se verifica a la vez $N (\leqq) M$ y $M (\leqq) N$ (todo elemento de N pertenece a M y todo elemento de M pertenece a N), se dice que los conjuntos M y N son *iguales* o *idénticos*, y se escribe $M = N$.

En íntima relación con las nociones de unidad y conjunto están los *conceptos*, que en Lógica suelen clasificarse en *individuales* y *específicos*: los primeros se refieren a objetos particulares; los segundos, a grupos de objetos que tienen ciertas propiedades comunes. A cada concepto específico corresponde un conjunto: el de los objetos a los cuales es aplicable. Por consiguiente, también los conceptos pueden determinarse *por extensión* o *por comprensión*.

* Por razones tipográficas usamos el símbolo $(\leqq)$ en lugar del más usual $\subseteq$

EJEMPLO 3. El concepto "alumno de primer año" puede determinarse pasando lista (por extensión) o por un certificado de inscripción (por comprensión).

Cuanto mas general es un concepto, es decir, cuanto menor es su comprensión, tanto mayor es su extensión.

EJEMPLOS: 4. El concepto "argentino" es más general que "rosarino"; la condición de vivir en Rosario, sumada a la comprensión del concepto "argentino", reduce la extensión de éste.

5. El concepto "polígono regular" tiene la comprensión "equilátero y equiángulo"; suprimiendo esta segunda condición, el concepto *se generaliza* y quedan incluídos nuevos entes (p. ej., los rombos). Sin embargo, para los triángulos la distinción es aparente, pues la propiedad "equiángulo" es consecuencia de "equilátero"; esto demuestra que a veces disminuyendo la comprensión, no aumenta la extensión.

2. **Lógica deductiva.** — *a*) Una teoría matemática es un conjunto de proposiciones que se siguen según el esquema de la deducción lógica. Se entiende por *proposición* una expresión de la cual tenga sentido inequívoco decir si es verdadera o falsa.

La determinación del criterio de verdad de las proposiciones es a veces una cuestión extralógica, que pertenece a otro campo del conocimiento; por ejemplo, "San Martín murió en Francia" es una proposición cuya verdad pertenece a la Historia; en cambio, decir: "El enfermo morirá, o no morirá", es enunciar una proposición verdadera por su misma estructura lógica.

En todo proceso de deducción lógica, o *razonamiento,* las proposiciones de partida forman lo que se llama la *hipótesis,* y la conclusión a que se llega es la *tesis.* En un razonamiento válido, la tesis *se deduce* o es una *consecuencia lógica* de la hipótesis; también se dice que la hipótesis *implica* la tesis.

Todo razonamiento se puede descomponer en varios del tipo más simple, llamados *silogismos,* que el lector ya conoce. Por ejemplo:

Hipótesis o premisas: *a*) Todos los triángulos son polígonos;
b) Todos los polígonos son figuras geométricas.

Tesis o conclusión: Todos los triángulos son figuras geométricas.

Decir que "*todos* los T son P" significa que "*cada* T es un P", pero puede haber algún P que no sea T; si en cambio todos los P fuesen también T, se diría que la clase o conjunto de los T es idéntica a la de los P.

Podemos representar la clase de todos los T por el conjunto de los puntos limitados por un contorno cerrado; entonces la

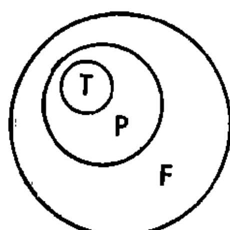


Fig. 1.

premisa *a*) anterior significa que el conjunto de los P contiene al de los T, pudiéndose sintetizar gráficamente en la figura 1 el razonamiento expuesto.

Tales ilustraciones gráficas del silogismo son llamadas por algunos autores "diagramas de VENN", atribuyéndolas al lógico inglés JOHN VENN (muerto en 1923), con notorio desconocimiento de la prioridad de EULER, que las usó en sus *Cartas a una princesa de Alemania* (1770), con el fin, según decía, de que "todo salte a la vista".

En un razonamiento válido, la verdad de la tesis se reduce a la verdad supuesta de la hipótesis; pero *la validez de un razonamiento es algo distinto de la verdad de las proposiciones que en él intervienen.* Dicho de otro modo: La verdad *formal* o corrección lógica es distinta de la verdad *material* o *real*, es decir, del contenido de las proposiciones.

EJEMPLOS: 1. He aquí un razonamiento *correcto*, en que la conclusión es *verdadera*, aunque las dos premisas de la hipótesis son *falsas* (fig. 1):

Hipótesis: *a*) Todos los triángulos son poliedros;
b) Todos los poliedros son figuras planas.

Tesis: Todos los triángulos son figuras planas.

2. Razonamiento *correcto*, en que hipótesis y conclusión son *falsas:*

Hipótesis: *a*) Todos los triángulos son poliedros;
b) Todos los poliedros son números primos.

Tesis: Todos los triángulos son números primos.

3. Razonamiento *incorrecto*, en que la hipótesis es verdadera, pero falsa la conclusión (fig. 2):

Hipótesis: *a*) Todos los planetas son astros;
b) El Sol es un astro.

Tesis: El Sol es un planeta.

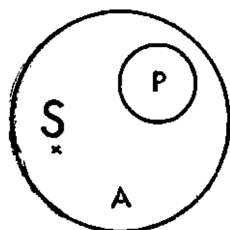


Fig. 2.

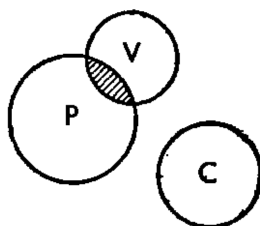


Fig. 3.

4. Razonamiento *incorrecto*, en que son verdaderas las hipótesis y la conclusión:

Hipótesis: *a*) Todas las estrellas son astros:
b) El Sol es un astro.

Tesis: El Sol es una estrella.

En este caso, la tesis (aunque verdadera) no es consecuencia lógica de la hipótesis.

5. Las clases de objetos pueden relacionarse por tipos de proposiciones distintas a las vistas en los ejemplos anteriores, sobre las que también se razona. Así, por ejemplo:

Hipótesis: *a*) Ningún valiente es cobarde;
b) Alguna persona es valiente.

Tesis: **Alguna persona no es cobarde.**

En cambio, la conclusión "Ninguna *P*ersona es *C*obarde" no puede deducirse de la hipótesis hecha (fig. 3).

EJERCICIOS: 1. Designando por V y F la verdad o falsedad de *razonamiento, hipótesis* y *tesis,* los ejemplos 1 a 4 corresponden a los tipos:

$$V)\ F \rightarrow V;\quad V)\ F \rightarrow F;\quad F)\ V \rightarrow F;\quad F)\ V \rightarrow V.$$

Véase que de los ocho tipos distintos, sólo es imposible el V) V → F

2. Construir ejemplos de los tres tipos restantes.

b) La intuición geométrica de la posición correlativa que dos círculos pueden ocupar en el plano sirvió a J. DÍAZ GERGONNE para establecer, en 1816, el siguiente *cuadro de relaciones* entre *dos clases* de objetos, representando la amplitud de cada círculo la extensión del correspondiente concepto específico (§ 1-1) que tenemos de la clase o conjunto de objetos a que se refiere:

1º) *Exclusión;* ej.: círculos P y C (fig. 3);
2º) *Intersección;* ej.: círculos P y V (fig. 3);
3º) *Identidad;* coincidencia de los círculos;
4º) *Inclusión;* ej.: posición del círculo T respecto al P (fig. 1);
5º) *Comprensión;* inversa del anterior, P respecto a T (fig. 1).

Si se forman las 25 parejas * que pueden obtenerse al tomar dos de esas relaciones como premisas de hipótesis, los correspondientes diagramas darán la conclusión a que puede llegarse o no según los casos. Este método gráfico de formar razonamientos es el llamado algoritmo de DÍAZ GERGONNE.

EJEMPLOS: 6. Si están relacionadas por exclusión las clases P y C, así como las C y V (fig. 3), sólo podrá afirmarse de las P y V que su relación mutua puede ser cualquiera de las del cuadro de DÍAZ GERGONNE.

7. Si están relacionadas por inclusión la clase T respecto a la P, y la P respecto a la F (fig. 1), podrá seguramente afirmarse que la clase T está incluída en la F.

El algoritmo de DÍAZ GERGONNE da ya una representación más clara y completa de los silogismos que la realizada por ARISTÓTELES, pero el progreso fundamental en este sentido, lo realiza GEORGES BOOLE hacia 1850, en trabajos sobre el análisis matemático de la lógica y la investigación de las leyes del pensamiento, desarrollando la llamada "álgebra de clases" (véase nota I). Esta "lógica simbólica" y su desarrollo posterior en variadas direcciones, no constituye un mero pasatiempo de los matemáticos, sino que responde a una real necesidad.

Muchas paradojas y confusiones en lógica provienen de la falta de precisión y de las deficiencias del lenguaje ordinario.

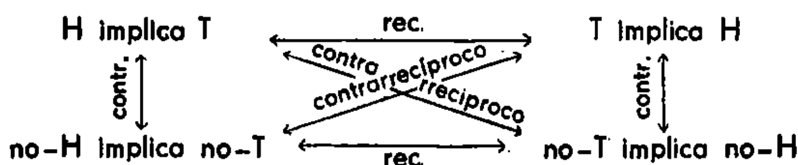
EJEMPLOS: 8. Los apóstoles *son* doce; Pedro y Pablo *son* apóstoles, luego *son* doce.

9. La dura experiencia de quien conoció el "gato de nueve colas" en la antigua marina inglesa puede "justificarse lógicamente" por el siguiente seudo-razonamiento: *Ningún gato* tiene ocho colas; todo gato tiene una cola más que *ningún gato;* por tanto, todo gato tiene nueve colas.

* Es decir, variaciones binarias con repetición (§ 11-1).

3. Métodos de demostración. — Dado el teorema "H implica T", hay varios teoremas relacionados con él. Dos teoremas se llaman *recíprocos* cuando cada uno tiene como hipótesis la tesis del otro; se llaman *contrarios* los que tienen como hipótesis y tesis proposiciones respectivamente contrarias (H y no-H, T y no-T).

He aquí indicados el teorema dado (que llamaremos *directo*) y además el recíproco, el contrario y el recíproco del contrario (o contrario del recíproco), que llamaremos *contrarecíproco.*



La validez de un teorema no implica la de su recíproco, como puede verse en los diagramas figuras 4 y 5, en los cuales los círculos representan las extensiones de conjuntos definidos (por comprensión) por las proposiciones H y T.

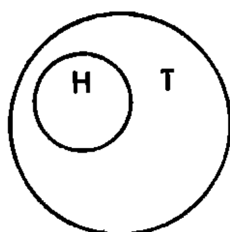


Fig. 4. — Teorema directo (y contrarrecíproco).

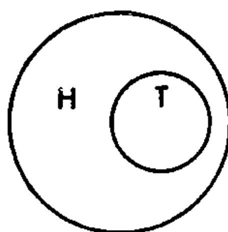


Fig. 5. — Teorema recíproco (y contrario).

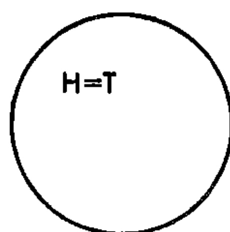


Fig. 6

El teorema directo expresa que H es *suficiente* para que se cumpla T; el recíproco dice que H es *necesario* para que se cumpla T. Si son válidos ambos teoremas, directo y recíproco, entonces H y T son equivalentes (H = T, fig. 6), y se dice que H es condición *necesaria y suficiente* para que se cumpla T. Tal ocurre en el ejemplo: H = "El triángulo ABC es equilátero"; T = "El triángulo ABC es equiángulo".

Dos teoremas contrarrecíprocos son equivalentes, es decir, la validez de uno de ellos implica la del otro. Esto puede verse en el diagrama figura 4, considerando las regiones exteriores a cada uno de los círculos. Como consecuencia, son equivalentes los teoremas recíproco y contrario de uno dado.

El método de razonamiento que consiste en probar el teorema directo valiéndose del contrarrecíproco, se llama "por reducción al absurdo"; es decir, que para demostrar que "H implica T", se acepta la falsedad de T (no-T), y de ella se deduce la falsedad de H (no-H).

La observación de que la validez del teorema directo no implica la del recíproco es esencial tenerla en cuenta en los *métodos reductivos* de **demostración o resolución de problemas (mal llamados, por tradición, *métodos analíticos*)**; en éstos se supone la cuestión T resuelta, y de este hecho se deducen consecuencias $T_1, T_2, \ldots, T_n$, para *reducir* la cuestión T a una conocida T_n; si en la cadena de reducciones éstas se hacen mediante *equivalencias*, la validez de T_n equivaldrá a la de T; *pero si sólo se han considerado implicaciones, no podremos deducir sin más la validez de* ***T de la validez de*** T_n, **siendo necesario para ello invertir** la cadena y comprobar si de la validez de T_n se deduce la de T_{n-1}, y así hasta llegar de T_1 a T; es decir, habremos de verificar la validez de los recíprocos, pues los directos solamente implican los contrarrecíprocos, esto es, solamente la falsedad de T_n probaría la falsedad de T. Es muy común en Geometría analítica y en la resolución de ecuaciones olvidar la observación anterior, sin darse cuenta de que, por ejemplo, supuesta cierta la igualdad $1 = 2$, transformándola correctamente invirtiendo sus términos $2 = 1$ y sumando miembro a miembro: $3 = 3$, la validez de esta igualdad no asegura la de partida.

4. Conceptuación matemática. — En la estructura de la Matemática, además de las proposiciones y teoremas que los relacionan, entran los conceptos sobre los cuales ellos versan. La extensión de los conceptos matemáticos es infinita, pero su comprensión es necesariamente finita. Por esto, de las dos maneras de fijar o definir un concepto: por extensión y por comprensión (§ 1-1) debe emplearse la segunda para los conceptos matemáticos.

Otras dos características de la Matemática que la aproximan a la Lógica y la distinguen de las ciencias naturales son éstas: sus razonamientos son *hipotético-deductivos*, y sus definiciones son *nominales* y no *reales*.

EJEMPLO 1. Enumerar las fronteras de la Argentina es definir una *cosa* ya existente, es una definición *real*; pero si damos un nombre a los habitantes de una región o barrio, hacemos una definición *nominal*.

Los tipos de conceptuación que más interesan a la Matemática son: 1º, las definiciones *explícitas;* 2º, las definiciones *por abstracción;* 3º, las definiciones *axiomáticas;* 4º, las definiciones *por recurrencia*. Las del primer tipo (que trataremos a continuación) son simplemente *clasificadoras;* en cambio, las restantes, que estudiaremos en los §§ 1-6, 1-7 y 2-3, son *creadoras* de nuevos conceptos.

A veces se exige probar la *existencia* y *unicidad* del nuevo concepto introducido; el sentido que se ha de dar a estas últimas palabras es cuestión aun no resuelta: lo menos que podemos exigir a las condiciones que introducen el nuevo concepto es que no sean contradictorias; esto es suficientemente satisfactorio a ciertas mentalidades para aceptar la *existencia lógica* y empleo del nuevo concepto como *ente abstracto;* pero en cambio, otras mentalidades opinan en distinta forma.

Las definiciones propiamente dichas, o *definiciones explícitas*, forman un tipo de conceptuación por el cual se introdu-

cen palabras nuevas para designar combinaciones lógicas de conceptos ya definidos.

EJEMPLO 2. "Cuerda de una circunferencia es un segmento cuyos extremos están sobre la circunferencia". Estas definiciones corresponden al tipo de las llamadas por género próximo ("C es un segmento") y última diferencia o diferencia específica. ("Los extremos de C están sobre la circunferencia").

Para comprender bien el sentido de las demostraciones es necesario tener siempre en cuenta el principio lógico de PASCAL: "Sustitúyanse los entes definidos por sus definiciones".

Esto se comprueba en seguida en una aplicación del ejemplo 2. A veces el principiante sólo ve un artificio en el hecho de unir los extremos de una cuerda AB al centro de la circunferencia para demostrar el teorema: "una cuerda AB de una circunferencia que no es un diámetro, es más corta que un diámetro". Sin embargo, se daría cuenta del porqué de la construcción demostrativa si recordara la definición de circunferencia: "lugar de puntos del plano que equidistan del centro"; y por esto, para utilizar la hipótesis de que A y B están en la circunferencia, se ha de partir de que su distancia al centro es la misma e igual al radio.

5. Igualdad. Relaciones de equivalencia. — La idea de *relación* es también *primitiva* (como las de unidad y conjunto), es decir, no reducible a otras más simples. Si la letra R designa una *relación binaria*, es decir, si tiene sentido para ciertos pares de elementos de un conjunto, se expresa $a \mathrm{R} b$, que puede ser verdadera o falsa. En el primer caso diremos: "a tiene con b la relación R, o está con b en la relación R".

EJEMPLO 1. La perpendicularidad $\perp$; dadas dos rectas: a, b, es $a \perp b$ o no es $a \perp b$.

La relación binaria de igualdad absoluta o de *identidad* no se verifica sino entre una cosa y ella misma. Pero también se suele decir que dos figuras congruentes (es decir, superponibles) son *iguales*. Este concepto más amplio de igualdad es un caso particular del siguiente:

Diremos que una relación binaria E entre elementos de un conjunto M es una *relación de igualdad o de equivalencia* cuando tiene las siguientes propiedades:

1) Propiedad reflexiva: $a \mathrm{E} a$;
2) Propiedad simétrica: De $a \mathrm{E} b$ se deduce $b \mathrm{E} a$;
3) Propiedad transitiva: De $a \mathrm{E} b$ y $b \mathrm{E} c$ se deduce $a \mathrm{E} c$.

EJEMPLO 2. La *congruencia*, la *semejanza* y el *paralelismo* son relaciones de equivalencia, como puede comprobarse, previo el convenio de considerar a cada recta como paralela a sí misma. La *divisibilidad* de un número por otro es una relación reflexiva y transitiva, pero no es simétrica, y por consiguiente, no es una relación de equivalencia. Tampoco lo son las relaciones $\perp$, $<$, $\leqq$. ¿Por qué?

Las relaciones de equivalencia tienen una propiedad fundamental para las consideraciones del apartado siguiente:

TEOR.: *Toda relación de equivalencia* E *entre elementos de un conjunto* M *agrupa los elementos de* M *en clases o sub-*

conjuntos disjuntos (sin elementos comunes) tales que a y b pertenecen a la misma clase cuando, y sólo cuando, a E *b.*

Demuéstrese este teorema definiendo para cada a el conjunto K_a de todos los x tales que x E a, y probando que:

1º) a pertenece a K_a;

2º) a E b, cuando, y sólo cuando, a y b pertenecen a una misma clase (digamos K_c);

3º) dos clases con un elemento común coinciden.

6. Definiciones por abstracción. — Cuando miramos una fotografía y su ampliación, reconocemos inmediatamente que no se han tomado dos fotografías. Las figuras tienen "algo" de común, algo igual, que llamamos "forma", y a la cual llegamos haciendo abstracción de tamaño, color, etc. Todo proceso de abstracción como éste se puede formalizar matemáticamente, mediante una relación de equivalencia (§ 1-5). En el ejemplo que nos ocupa la semejanza, por ser una relación de equivalencia, divide a las figuras planas en clases, lo que permite definir *por abstracción* la *forma*: dos figuras planas tienen la *misma forma* cuando pertenecen a la misma clase. Como cada figura determina perfectamente la clase a que pertenece, puede tomarse como *representante* de dicha clase. Con frecuencia, en las definiciones por abstracción se consideran no las clases, sino elementos representantes de ellas.

NOTA 1. Es importante observar que la relación de equivalencia no nace de la comunidad del carácter abstracto, sino que lo engendra. Por ejemplo: no podemos definir la semejanza como igualdad de forma, pues es justamente la relación de "semejanza" la que permite introducir la noción de "forma". Cada relación de equivalencia permite definir por abstracción un nuevo concepto.

EJEMPLOS: 1. El *paralelismo entre rectas* (con el convenio de considerar cada recta paralela a sí misma) es una relación de equivalencia. Cada una de las clases es un haz impropio de rectas. Así, por abstracción definimos la *dirección*, estableciendo que dos rectas tienen la *misma dirección* cuando pertenecen al mismo haz impropio. Cada dirección quedará determinada tomando una recta del haz como representante del mismo.

2. Dos *segmentos orientados* (es decir, con origen y extremo) se llaman *equipolentes* cuando tienen la misma longitud, dirección y sentido. La equipolencia es una relación de equivalencia. Cada una de las clases define un *vector libre*. Se lo representa por un segmento orientado A B, representante de la clase, o por cualquier otro representante A′ B′ de la misma clase, es decir, cualquier segmento orientado equipolente al anterior.

NOTA 2. Éste es el primer tipo de definición creadora de un nuevo concepto. En ocasiones ocurre que hay varios sistemas de entes a los cuales puede referirse el concepto creado, pero si puede establecerse entre ellos un *isomorfismo*, es decir, *una correspondencia biunívoca* (§ 2-8) *en la que se conserven las propiedades que determinan el concepto*, se dirá que éste es *esencialmente único* (según el lenguaje de VEBLEN). Por ejemplo, el concepto de vector libre del espacio tridimensional introducido en

el último ejemplo es esencialmente el mismo que el de la terna de números reales (dada por las proyecciones del vector sobre los tres ejes coordenados).

Las definiciones por abstracción constituyen uno de los recursos más fecundos de la Matemática, pues permiten, conjuntamente con las definiciones por recurrencia (§ 2-3), desarrollar el *método genético,* mediante el cual se efectúan las sucesivas ampliaciones de la Matemática.

7. **Axiomática.** — Hemos visto que mediante el razonamiento o formulación de teoremas podemos deducir nuevas proposiciones de otras *ya establecidas,* las que a su vez pueden haber sido deducidas de otras anteriores, mediante otros teoremas; pero, en todo caso, hemos de partir siempre de unas *proposiciones primeras,* que deben aceptarse sin demostración, pues en caso contrario no serían las primeras. Del mismo modo, las proposiciones enuncian propiedades de ciertos objetos o entes ideales, que se han de definir refiriéndolos a entes anteriores, por lo cual en definitiva habrán de introducirse también unos *conceptos primitivos* no susceptibles de definición. (Entre los conceptos primitivos pueden haber atributos de relaciones primitivas, por ej.: "menor que", "siguiente de", etc.). Entonces se reúnen los conceptos primitivos y proposiciones primeras, en un conjunto de *axiomas* o *postulados,* tomados hoy día como sinónimos, que forman la base de la teoría matemática de que se trate; todos los demás teoremas y conceptos de la teoría serán consecuencia lógica de dichos axiomas.

Queda siempre, sin embargo, la intuición para servir de guía a la investigación, es decir, para conjeturar las nuevas proposiciones que sean valiosas e interesantes; como dijo POINCARÉ, "descubrir es elegir".

Según algunos, la deducción de las proposiciones que forman el cuerpo de cada teoría es una libre creación de la mente humana, y es en ella en donde tienen existencia los objetos matemáticos; con lo empírico sólo están ligados por un remoto origen psicológico e histórico.

Según otros, dar a la Matemática un carácter puramente deductivo-axiomático es sólo objetivo expositivo para asegurar la perfección de los resultados obtenidos; el espíritu de invención constructiva se guía siempre, aun en los campos más abstractos, por la intuición reveladora, que tiene raíces fundamentalmente empíricas. Así dicen COURANT y ROBBINS (citados en nota IV-14): "Sólo es una media verdad decepcionante el que el intelecto pueda crear sistemas axiomáticos a su antojo, si han de estar plenos de significación y sólo bajo la disciplina de responsabilidad hacia un todo orgánico, guiada por una intrínseca necesidad, puede la mente libre llegar a resultados de valor científico. "Nosotros somos servidores, no dueños, de la verdad" (HERMITE)".

La caracterización de los conceptos primitivos mediante el sistema de axiomas se dice que constituye una *definición implícita* de estos conceptos, prescindiendo de todo significado objetivo de los mismos.

Algo análogo ocurre con las piezas de ajedrez; éstas vienen precisamente definidas por los movimientos que se les asigna, y en ellas es accesorio la forma de materializarlas y aun el nombre que se les dé; sin

embargo, sólo *aplicando* las reglas del juego a una interpretación concreta que permita desarrollarlo podrá comprobarse su compatibilidad.

En una disciplina pueden darse diversos sistemas de axiomas equivalentes; *una misma proposición puede ser axioma en un sistema y teorema en otro*: para darse cuenta de la arbitrariedad que existe en la elección de un adecuado sistema de axiomas, basta considerar la equivalencia proposicional que entraña toda condición necesaria y suficiente (§ 1-3).

Por ejemplo, la proposición de EUCLIDES sobre las paralelas es equivalente (en el marco de los otros axiomas) al enunciado siguiente: "la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos". Por consiguiente, si se tomara este último como axioma, la proposición sobre las paralelas pasaría a ser teorema. Por eso no tiene sentido preguntar si una proposición puede demostrarse o no, si no se especifica el sistema de axiomas de la teoría a que se refiere.

El sistema de axiomas de toda teoría matemática debe mostrar como condición fundamental e ineludible, que no encierre escondida una contradicción: entonces se dice que el sistema de axiomas es *compatible.*

La compatibilidad de un sistema de axiomas se prueba buscando un modelo cuya existencia lógica no-contradictoria pueda asegurarse y que a la vez verifique el sistema de axiomas de que se trata. Es así como el gran matemático alemán HILBERT, principal propugnador de la Axiomática, redujo el problema de la no-contradicción de los axiomas que fundamentan la Geometría, al de la no-contradicción de los números reales; igual reducción se logra en el Análisis; además, la no-contradicción de los números reales se reduce a su vez a la de los números naturales. Esto fué posible gracias a la aritmetización de la Matemática, lograda en el siglo XIX, que redujo toda esta ciencia a una larga cadena de deducciones y construcciones, a partir del *número natural.* Sin embargo, la cuestión de la compatibilidad de la Aritmética es un arduo problema, aun no resuelto.

Para que un sistema de axiomas se considere satisfactorio se exige también de él su *independencia,* aunque lógicamente esta condición no sea ineludible como lo es la compatibilidad. Se dice que los axiomas de un sistema son independientes si se demuestra la imposibilidad de que ni uno cualquiera de ellos, o parte de ellos, ni su negación pueda ser deducido de los demás. Para probar la independencia de un axioma A basta probar la compatibilidad del sistema que forman los demás axiomas y el contrario de A. Fué así como se llegó a probar la independencia del famoso postulado de EUCLIDES, por obra de GAUSS, LOBATCHEWSKI, BOLYAI y RIEMANN, al crear las geometrías no euclidianas.

Entre las cuestiones importantes aun no resueltas completamente, que aparecen en la Axiomática, está la de poder asegurarnos que toda proposición formulable en los términos de la teoría sea, necesariamente, o demostrable o refutable, es decir, no pueda formularse ningún nuevo axioma independiente de los ya establecidos; ello da lugar al estudio de la *saturación* o *integridad* del sistema de axiomas considerado, y que ha sido atacado en varias direcciones (HILBERT, VEBLEN). Revela el interés de esta cuestión recordar que en la misma Aritmética existen proposiciones famosas que se intuyen como ciertas, pero que han resistido, como ocurría con el postulado de EUCLIDES, los más denodados esfuerzos realizados para alcanzar su demostración aun no lograda.

8. Estructura de la Matemática. — La definición de nuevos conceptos y la deducción de nuevas proposiciones a partir de los "axiomas" forman lo que se llama una *teoría matemática abstracta*. Desde el punto de vista *formalista*, el conjunto de estas teorías constituye la *Matemática pura*. Si en una teoría matemática abstracta se da un *significado* a las ideas primitivas contenidas en los axiomas de partida, se obtiene una *interpretación concreta*, o *aplicación* de la teoría abstracta. Dicho "significado" puede referirse a conceptos tomados del mundo físico, y aun de otra teoría abstracta, en tal forma que las relaciones expresadas por los axiomas *queden verificadas* por el criterio de certeza (intuitivo, descriptivo, lógico, etc.), empleado en el campo en que interese aplicar la teoría. Un sistema de axiomas se llama *categórico* si para cada par de sus interpretaciones concretas existe un isomorfismo (§ 1-6) que las relacione (cfr. § 3-5). El conjunto de interpretaciones concretas de que es susceptible la Matemática pura forma la *Matemática aplicada*.

Un ejemplo sencillo de teoría abstracta es el siguiente:

AXIOMA 1. Entre ciertos elementos P y ciertos elementos r existe una relación "determina" tal que:

Dos P (P_1 y P_2) determinan un r, y sólo uno.

DEF. 1. Diremos que P_1 y P_2 *pertenecen* a r, o que r pasa por P_1 y por P_2.

AXIOMA 2. Existe (por lo menos) un P.

AXIOMA 3. A cada r pertenecen por lo menos dos P distintos.

AXIOMA 4. Por cada P pasan por lo menos dos r distintos.

TEOR. 1. Existen (por lo menos) tres P distintos.

DEM.: Deben aplicarse sucesivamente los axiomas 2, 4, 3 y 1.

Daremos ahora once interpretaciones de esta teoría abstracta. El lector debe adoptar en cada una la significación adecuada para la relación "determina" y las expresiones "pertenece", "pasa por".

Interpretación 1. P son los puntos y r las rectas en la geometría del espacio.

Interpretación 2. P son las rectas y r los puntos en la geometría del espacio.

Interpretaciones 3 *y* 4. Lo mismo que 1 y 2 en la geometría del plano. En cambio, no podemos adoptar la interpretación 1 en la *geometría de la recta*, pues cae en defecto el axioma 4.

Interpretación 5. P son las circunferencias de un plano y r los haces de circunferencias (conjuntos de circunferencias tales, que dos a dos tienen el mismo eje radical).

Interpretaciones 6 *y* 7. P y r son los vértices y lados (lados y vértices) de un triángulo.

Interpretaciones 8 *y* 9. P y r son los vértices y aristas (aristas y vértices) de un tetraedro.

Interpretación 10. P son los elementos: a, b, c, y r, los conjuntos: $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ y $\{c, a\}$.

Interpretación 11. P son las provincias de Buenos Aires, Córdoba y Santa Fe, y r, las fronteras entre cada dos de ellas.

Otros ejemplos dan la Física y la Mecánica, con las interpretaciones concretas de las teorías vectoriales abstractas construídas axiomáticamente; otro ejemplo es el de la aplicación al universo físico de las geometrías abstractas, ya euclidianas en la Mecánica de Newton, ya no euclidianas en la Mecánica relativista.

La estructuración actual de la Matemática es formalista. Por esto la axiomática desempeña un papel capital en su fundamentación. El formalismo llevado a sus últimas consecuencias, cosa que ocurre al hacer abstracción completa del significado intrínseco de los símbolos primitivos que intervienen en una teoría determinada, pasa a ser una actitud netamente no-trascendente al manejar dichos símbolos como *entidades concretas* según reglas bien determinadas.

EJERCICIOS

1. ¿Es la condición $x.y > 4$, necesaria o suficiente para que sea $x > 2$ é $y > 2$? Representar gráficamente en coordenadas cartesianas.

2. Averiguar cuáles de las propiedades reflexiva, simétrica, transitiva son aplicables a las siguientes relaciones: *a*) "Es la madre de", para personas; *b*) "Es de la misma longitud que", para segmentos; *c*) "No es igual a", para números.

3. Hallar el error del siguiente razonamiento para "probar" que de las propiedades simétrica (S) y transitiva (T) sigue la reflexiva $a \sim a$ (R): "De $a \sim b$ sigue $b \sim a$ (por S), y de éstas dos (por T) $a \sim a$". Ilustrar la falsedad de dicha proposición sobre relaciones con el ejemplo: $a \sim b$ = "m. c. d. de a y b es múltiplo de dos".

4. Supongamos que una relación binaria R definida en un conjunto C es simétrica, y que su negación $\overline{R}$ cumple: 1º) es reflexiva; 2º) existe un par a, b tal, que $a \overline{R} b$ es falsa. ¿Es R transitiva? Ilustrar con los ejemplos $R \equiv \perp$; $\neq$.

5. Si en un conjunto C cada elemento a está en una relación R con un elemento (eventualmente él mismo) y se cumple: "De $a R c$ y $b R c$ sigue $a R b$ (*Ley de* EUCLIDES)", entonces R es una relación de equivalencia. Demostrarlo.

§ 2. EL NÚMERO NATURAL

1. Diversas fundamentaciones del número natural. — *a*) Los números *naturales*

[2-1] 1, 2, 3, 4, 5, . . .

aparecen al *contar* los objetos de un conjunto. Al efectuar la operación de contar, establecemos implícitamente una *ordenación* entre los elementos del conjunto, y al último contado se le llama *número ordinal* del conjunto. El número natural, como símbolo ordinal, resulta, pues, de abstraer la naturaleza de los objetos, teniendo en cuenta solamente el orden en que se presentan a nuestra consideración. En cambio, el número como símbolo *cardinal* representa un conjunto, abstrayendo la naturaleza de los elementos que lo componen y el orden en que éstos se consideran: corresponde al atributo común que tienen todos los conjuntos tales que sea posible establecer entre cada par de ellos una correspondencia biunívoca entre sus elementos (§ 2-8).

La distinción entre número ordinal y cardinal conduce a dos aspectos del concepto de número que corresponden a dos caminos para fundamentarlo. Para los conjuntos finitos, ambos caminos llevan al mismo resultado; en cambio, para los conjuntos infinitos, la diferencia es esencial, pues según sea el orden elegido para contar, resulta número ordinal distinto.

Siguiendo cada uno de ambos aspectos, el número natural puede introducirse como concepto primitivo o como derivado de la teoría de clases. En el primer caso se fundamenta axiomáticamente, y ése es el camino seguido por PEANO, HILBERT,

etc. En el segundo caso se define el número por abstracción, partiendo del cálculo de clases, y así lo iniciaron CANTOR y FREGUE, perfeccionándolo, sobre todo, RUSSELL. El desarrollo completo de ambos procedimientos es extremadamente penoso y largo; ninguno de ellos puede considerarse totalmente satisfactorio; por esto y por constituir la máxima dificultad de la fundamentación de la Matemática, y a su vez la base de toda ella, dijo KRONECKER: "Dios creó el número natural; lo demás es obra del hombre".

b) El sistema de PEANO es exiomático y ordinal en su iniciación, y posteriormente desarrolla la teoría cardinal (§ 2-10); mientras que el de RUSSELL desarrolla la aritmética cardinal como capítulo de la teoría de clases, y posteriormente introduce el número ordinal Tanto en uno como en otro sistema, la justificación lógica del aspecto postergado aparece a la intuición como inútilmente complicada, al demostrar teoremas cuya sola enunciación "evidente" asombra al principiante. Nosotros daremos aquí sólo un esquema del sistema de PEANO, pudiendo estudiarse el segundo método en las obras citadas en nota IV, 3 y 4, o más ampliamente en J. REY PASTOR (nota IV-1).

c) El matemático y el físico deben excluir, tanto en el campo científico abstracto como en el didáctico, el problema del origen psicológico de las ideas primitivas. Sin embargo, como ilustración, diremos algo sobre la génesis del concepto de número.

Las sociedades muy primitivas (tribus salvajes de África y Australia) tienen sólo una noción vaga y embrionaria de dicho concepto. Los pigmeos saben contar hasta cinco, y de los conjuntos con más objetos dicen que tienen "muchos" objetos. Un ejemplo revelador de cómo se forma en la mente humana el concepto de número, lo dan las tribus australianas, en las cuales, cuando los niños vienen al mundo, reciben, en el orden de su nacimiento, nombres numéricos, con distinción en la terminación según el sexo. Dichos nombres distinguen desde el primero hasta el noveno hijo, y aunque esos australianos no poseen número cardinal más allá de tres, el padre australiano de nueve hijos sabrá decir si su familia está completa, cuando pretende contarla, sin tener la idea abstracta del número cardinal, ni tampoco del ordinal. No sabe contar hasta nueve, pero es capaz de efectuar la distinción cualitativa de los términos que a nuestros ojos compondrían la sucesión abstracta ordenada. Es decir, reemplaza la *numeración* por la *enumeración*.

La coordinación de conjuntos (§ 2-8) que surge en las cuestiones comerciales que tratan los indígenas del estrecho de Torres, en el norte de Australia, se efectúa recurriendo a equivalentes concretos de la numeración ordinal. Así pueden contar hasta 31, tomando como referencia sucesiva el meñique de la mano izquierda, los dedos, muñeca, codo, axila, hombro, clavícula, tórax, y después, en orden inverso, a lo largo del otro brazo, para terminar en el meñique de la mano derecha. Es una extensión del reputado y útil método de contar con los dedos.

También en la primera infancia se empieza por aprender a contar; sólo más tarde se coordinan conjuntos prescindiendo del orden. Todo ello parece justificar, como más intuitivo y directo, y más adaptado a la naturaleza de nuestra mente, la introducción del número natural mediante la formulación axiomática que revele en qué consiste dicha operación de contar.

2. **Inducción completa. Axiomas de Peano.** — *a*) Sea A una proposición que incluya un número natural n. Designemos con A_1 la proposición que se refiere a $n = 1$, con A_2 la que se refiere a $n = 2$, y así sucesivamente; podemos decir que la sucesión de proposiciones

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

constituyen en su *conjunto* la proposición general A, en el sentido de que ésta representa una *cualquiera* de ellas *. Supongamos demostrada la proposición para $n = 1$, y una vez hecho esto, supongamos que de la validez de A_1 deducimos la de A_2, después de la validez de A_2 deducimos la de A_3, y así sucesivamente; claro está que mediante este procedimiento se podría llegar a demostrar la validez de A_{3785} (o de otro A_n con n determinado). Pero para probar la validez de A_n para *n cualquiera*, nos hemos de apoyar en el siguiente "principio de inducción completa":

Supuesto que,

1º) *La primera proposición* A_1 *es cierta;*

2º) *Bajo la hipótesis de la validez de* A_h *puede deducirse (por un determinado razonamiento matemático) la validez de la proposición* A_{h+1}.

Entonces, el principio de inducción completa afirma que son válidas todas las proposiciones de la sucesión A_n, *y la proposición general* A *queda así probada.*

En realidad, este principio se emplea muchas veces, sin mencionarlo explícitamente, al escribir "etc." o "y así sucesivamente", o también en fórmulas con puntos suspensivos.

La "inducción empírica", utilizada por las Ciencias Naturales, sirve para establecer una ley general de la repetición confirmada, de un gran número de observaciones aisladas; por convincente que sea esta clase de presunción (v. g.: "el sol sale cada mañana"), la "inducción completa" o "inducción matemática" tiene un carácter completamente distinto y es, lógicamente, más satisfactoria.

EJEMPLO: Se demuestra por inducción completa que para $\delta > 0$ y todo número natural n vale la importante desigualdad **

[2-2] $$(1 + \delta)^n \geqq 1 + n\delta \quad ,$$

sin más que comprobar:

1º) Para $n = 1$ es: $1 + \delta \geqq 1 + \delta$;

2º) Si suponemos cierta la desigualdad para $n = h$, es decir, suponemos $(1 + \delta)^h \geqq 1 + h\,\delta$, entonces,

$$(1 + \delta)^{h+1} = (1 + \delta)^h (1 + \delta) \geqq (1 + h\delta)(1 + \delta) =$$
$$= 1 + h\delta + \delta + h\,\delta^2 > 1 + (h + 1)\delta$$

* No decimos que A representa algo distinto de las A_n, como ocurre al introducir el concepto de límite (§ 20-1).

** Naturalmente, en este ejemplo accesorio suponemos en el lector un previo conocimiento de la aritmética.

es decir, hemos demostrado la desigualdad para $n = h + 1$, a partir de $n = h$.

De ambas condiciones cumplidas, se deduce por el principio de inducción completa que la desigualdad es válida para *cualquier* número natural n.

NOTAS: 1. Aunque una igualdad, tal como la

$$n^3 + 11\,n = 6\,n^2 + 6.$$

se verifique para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, puede no verificarse para ningún otro n, y por lo tanto, en la aplicación del principio de inducción, la condición 2ª) es esencial. El anterior ejemplo se ha construído fácilmente, teniendo en cuenta que

$$(n-1)\ (n-2)\ (n-3) = n^3 - 6\,n^2 + 11\,n - 6;$$

del mismo modo, la igualdad

$$(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ \ldots\ (n - 1\,000) = 0,$$

se verificará para los mil primeros números, y no por esto sería cierta en general, es decir, para *cualquier* valor natural de n. (Nótese, aquí, la diferencia esencial de la inducción completa respecto a la inducción empírica).

También la condición 1ª) es esencial, como se comprueba mediante la fórmula *falsa*: $n = n + 5$, que cumple la condición 2ª) (verificarlo), pero en cambio no se verifica la 1ª) ni para $n = 1$, ni empezando en otro valor cualquiera de n.

2. Este principio puede ser intuitivamente entendido en la forma siguiente: supongamos que tenemos soldaditos de plomo colocados en fila, que empiezan por uno determinado y siguen indefinidamente, ¿cómo nos aseguraremos de que, golpeando al primero, *todos* estos soldaditos caerán? El principio dice que basta para ello comprobar:

1º) Que el primer soldadito cae al ser golpeado;

2º) Que los soldaditos están situados de manera que si uno cual-

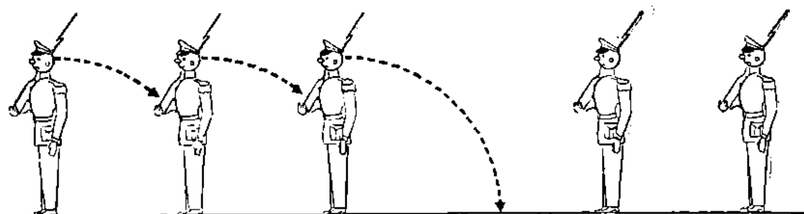


Fig. 7.

quiera de ellos cae, automáticamente golpea y hace caer al soldadito siguiente (fig. 7).

Entonces, aunque la fila se extienda *indefinidamente*, afirmamos que *todos* los soldaditos numerados caerán en virtud del principio de inducción completa.

No todos admiten la opinión de H. POINCARÉ, uno de los más grandes matemáticos modernos, de que precisamente este axioma caracteriza esencialmente a la Matemática y coloca esta ciencia más allá de la Lógica.

b) Un conjunto N de elementos llamados *números naturales*, un elemento llamado *uno*, y una relación primitiva sg = "siguiente de", quedan definidos axiomáticamente (§ 1-7) mediante los *axiomas de* PEANO:

I. *Uno es un número natural.* (1ε N).

II. *A cada número natural corresponde un número natural siguiente a él, unívocamente determinado.* (Si $x \varepsilon$ N, sg $x \varepsilon$ N).

III. *El uno no tiene precedente.* (Para todo $x \varepsilon$ N, sg $x \neq 1$). Esto significa que la sucesión numérica natural empieza por 1. Aquí pr = "precedente" se define por

$$\text{sg } (\text{pr } x) = x.$$

IV. *De la igualdad* sg x = sg y *se deduce* $x = y$. Esto nos dice que cada número natural tiene a lo más un solo precedente, aunque no nos dice que lo tenga. Esta propiedad es distinta de la II, como se aclara observando que una mujer tiene una sola madre (tomada como sg), pero puede tener varias hijas (tomadas como pr).

V. AXIOMA DE INDUCCIÓN COMPLETA. *Si de un conjunto* C *de números naturales se sabe que cumple las dos condiciones:*

1ª) *El número natural* 1 *pertenece al conjunto* C, (1εC),

2ª) *Si un número natural* x *pertenece a* C, sg x *pertenece también a* C, (Si $x \varepsilon$ C, sg $x \varepsilon$ C);

entonces, todos los números naturales pertenecen al conjunto C, (C = N).

Estos cinco axiomas son las proposiciones que caracterizan esencialmente a lo que llamamos *sucesión numérica natural* (conjunto ordenado de números naturales), y pueden tomarse como *definición implícita* de los mismos.

El axioma V puede enunciarse así: "Una parte del conjunto de los números naturales que contenga el 1 y con cada número a su siguiente, es la totalidad de ellos". En él se basa el principio de inducción completa, que se aplica como método de demostración (ver *a*) y de definición por recurrencia (§ 2-3).

EJERCICIO: Aplíquese la inducción completa para demostrar que cada número natural $\neq 1$ tiene precedente (el que será único por el axioma IV). Obsérvese que aquí A_1 se refiere al número 2.

NOTA 3. Aunque no nos detengamos en ello, ya se ha dicho que para el sistema de axiomas de PEANO pueda reputarse como lógicamente satisfactorio, habría que demostrar que cumple las condiciones de compatibilidad, independencia y saturación.

Se han dado también (PADOA, PIERI, etc.) otros sistemas de axiomas semejantes a los de PEANO, más simples en algunos aspectos, aunque tal vez menos intuitivos. El sistema de PEANO permite deducir lógicamente de él toda la Aritmética, aunque se le ha criticado que sólo caracteriza a las sucesiones: esto es natural, porque los conceptos de sucesión (§ 7-2) y de sucesión numérica natural son isomorfos, y por tanto, representan un concepto esencialmente único (§ 1-6); por eso en muchos textos

se empiezan las sucesiones y la sucesión numérica natural por el 0 (§ 1-1), aunque nosotros creemos que como concepto fundamental debe empezar por el 1, no sólo por el papel esencial que éste desempeña en las definiciones por recurrencia de las operaciones fundamentales (§ 2-4), sino también por el significado que tiene el cero en el Álgebra abstracta y por su historia misma (§ 3-11).

3. Definiciones por recurrencia. — *Las definiciones por recurrencia* utilizan el *principio de inducción completa* (§ 2-2,*b*) y sirven para introducir un *concepto* en que intervenga un número natural cualquiera, *construyéndolo* por inducción.

Así, dada la sucesión numérica natural, 1, 2, 3, ..., con $2 = \text{sg}\,1$, $3 = \text{sg}\,2$, $4 = \text{sg}\,3$, ..., introduciremos el concepto de "suma de números naturales", basándolo en el siguiente proceso constructivo: Dado un número natural cualquiera a, definiremos lo que se entiende por $a + 1$; una vez hecho esto, y supuesto construído $a + h$, definiremos (daremos la manera de construir) $a + \text{sg}\,h$; con ello, del $a + 1$ podrá pasarse al $a + 2$, de éste al $a + 3$, y así llegaríamos, v. gr.: al $a + 7823$; pero el significado profundo de la definición por recurrencia está en la aplicación del principio de inducción completa, es decir, en admitir como axioma que así queda definida la suma $a + n$ para *cualquier* n natural, aunque el conjunto de números naturales sea infinito (§ 2-9). En definitiva, la definición por recurrencia de la suma de números naturales será la siguiente:

Dado un número natural a,

1º) Definamos explícitamente $a + 1 = \text{sg}\,a$;

2º) Para cualquier h definamos explícitamente

$$a + \text{sg}\,h = \text{sg}(a + h) \quad ,$$

lo que en notación vulgar escribiríamos:

$$a + (h + 1) = (a + h) + 1 .$$

Entonces, por 1º) y 2º), la aplicación del principio de inducción completa nos permite decir que la suma $a + n$ queda definida para *cualquier* n.

Obsérvese que la primera definición explícita da $a + 1$, mientras que la segunda, construída $a + h$, permite hallar $a + (h + 1)$. En efecto, será:

$$\begin{aligned} a + 2 &= a + \text{sg}\,1 = \text{sg}\,(a + 1), \\ a + 3 &= a + \text{sg}\,2 = \text{sg}\,(a + 2), \\ a + 4 &= \text{sg}\,(a + 3), \\ a + 5 &= \text{sg}\,(a + 4), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

estando incluída en los puntos suspensivos finales la aplicación *esencial* del principio de inducción completa.

Una definición recurrente general que dependa de un parámetro (o de un conjunto de parámetros), $a \in \text{N}$, puede simbolizarse por las dos condiciones:

1º) $\quad \text{f}_a(1) = \text{g}_a \in \text{N} \quad ;$

2º) $\quad \text{f}_a(\text{sg}\,h) = \text{G}_a\{\text{f}_a(h), h\} \in \text{N} \quad ,$

en que f_a, g_a y G_a pueden depender de a.

Así, por ejemplo, en la suma se toma $\text{g}_a = \text{sg}\,a$; $\text{G}_a\{t, h\} = \text{sg}\,t$; representando $\text{f}_a(h) = a + h$. En el producto (§ 2-4, *c*) tomaremos $\text{g}_a = a$: $\text{G}_a\{t, h\} = t + a$; representando $\text{f}_a(h) = a \,.\, h$.

La *unicidad* del resultado $f_a(n)$, para cualquier n, queda probada mediante la de $f_a(1) = g_a$ (en el caso de la suma, la unicidad de $g_a = \mathrm{sg}\, a$ se establece por el Ax. II de PEANO (§ 2-2, *a*)) y la del número h, unívocamente determinado por $\mathrm{sg}\, h \neq 1$, de acuerdo al Ax. IV de PEANO y el § 2-2, ejercicio. Entonces, al primer miembro $f_a(\mathrm{sg}\, h)$ de 2º), sólo podrá corresponder un solo $f_a(h)$, existente por hipótesis recurrente, el que tiene un solo $G_a\{f_a(h), h\}$ por definición de G_a (en el caso de la suma se obtiene un solo $G_a\{f_a(h), h_a\} = \mathrm{sg}(a + h)$ por el Ax. II de PEANO).

Obsérvese que las condiciones 2ª) y 1ª) son independientes, por el Ax. III de PEANO, ya que siempre es $\mathrm{sg}\, h \neq 1$, lo que no sucede en un reloj (§ 5-11, *a*), es decir, los segundos miembros de 1º) y 2º) en una definición recurrente general *no podrán resultar contradictorios*, debido a una posible igualdad de los primeros miembros. Así, la unicidad y compatibilidad de una definición por recurrencia no se debe a la particular estructura que en cada caso tenga la fórmula recurrente, sino a las propiedades características expresadas por los Axs. IV y III de PEANO. (Cfr. nota III, *a*).

Respecto a la *existencia* del concepto así definido, cuestión aun debatida. véase lo dicho en el § 1-4. La definición de $f_a(h)$ para *cualquier* h, se hace tomando a a como *parámetro fijo*. Si queremos que la definición se refiera a *cualquier* a número natural, será preciso ver, en virtud del mismo proceso anterior, que $f_1(h)$ está definido para todo h, y que también lo está $f_{\mathrm{sg}\, a}(h)$ para todo h, una vez construído $f_a(h)$ para todo h. En efecto, existe $f_1(h)$ para todo h porque, 1º: existe $f_1(1) = g_1$ (por ejemplo, en la suma es $g_1 = \mathrm{sg}\, 1$ definido por el Ax. II de PEANO, en el producto es $g_1 = 1$); 2º: supuesto existente $f_1(h)$, entonces existe $f_1(\mathrm{sg}\, h) = G_1\{f_1(h), h\}$ por el Ax. II de PEANO (por ejemplo, en la suma es $G_1\{f_1(h), h\} = \mathrm{sg}(1 + h)$ y en el producto es $G_1\{f_1(h), h\} = 1 \cdot h + 1$, ambos definidos por hipótesis inductiva); luego el Ax. V de PEANO *aplicado a definición existencial*, justifica $f_1(h)$ como existente para *todo* $h \in \mathrm{N}$.

Supuesto ahora existente $f_a(h)$ para todo h, vamos a ver que existe $f_{\mathrm{sg}\, a}(h)$ para todo h, porque. 1º: existe $f_{\mathrm{sg}\, a}(1) = g_{\mathrm{sg}\, a}$ por estar definido $\mathrm{sg}\, a$ según el Ax. II de PEANO [por ejemplo, en la suma es $g_{\mathrm{sg}\, a} = \mathrm{sg}(\mathrm{sg}\, a)$, y en el producto es $g_{\mathrm{sg}\, a} = \mathrm{sg}\, a$]; 2º: supuesto existente $f_{\mathrm{sg}\, a}(h)$, entonces existe $f_{\mathrm{sg}\, a}(\mathrm{sg}\, h) = G_{\mathrm{sg}\, a}\{f_{\mathrm{sg}\, a}(h), h\}$ por estar definido $G_{\mathrm{sg}\, a}$ según el Ax. II de PEANO [por ejemplo, en la suma es $G_{\mathrm{sg}\, a}\{t, h\} = \mathrm{sg}\, t$, y en el producto $G_{\mathrm{sg}\, a}\{t, h\} = t + \mathrm{sg}\, a$]; luego por el Ax. V de PEANO existe $f_{\mathrm{sg}\, a}(h)$ para todo h.

Volviendo a aplicar este Ax. V respecto de a, queda así probada la existencia de $f_a(h)$ para *todo* a y *todo* h. (Véase P. PI CALLEJA: *La objeción de* GRANDJOT *a la teoría de* PEANO *del número natural*. Math. Notae, IX, pág. 143-152, Rosario, 1951).

4. **Operaciones fundamentales.** — *a*) Una *operación binaria* sobre un conjunto M de elementos $a, b, c, \ldots$ es una regla por la cual se asigna a ciertos pares de elementos a y b de M. dados en un cierto orden, un elemento

$$[2\text{-}3] \qquad a \,\&\, b,$$

unívocamente determinado, llamado resultado de la operación &.

Esta definición se refiere a operación *conexa* en M, cuando es aplicable a cualquier par de M. La operación se llama *cerrada* respecto del conjunto M, o el conjunto M *cerrado* respecto de la operación, si el resultado de ésta pertenece *siempre* al conjunto M.

La condición de que el resultado quede unívocamente determinado implica una condición esencial cuando la operación liga elementos defi-

nidos por abstracción (§ 1-6). En efecto, en tal caso, a y b pueden ser clases, o más frecuentemente dos representantes (§ 1-6) de las mismas, y entonces el resultado, es decir, la clase a que pertenece, debe ser el mismo cuando a o b se reemplaza por otro representante de la misma clase. En fórmula:

$$a \mathrm{E} a' \text{ implica } (a \& b) \mathrm{E} (a' \& b) \text{ y } (b \& a) \mathrm{E} (b \& a').$$

De aquí se deduce

[2-4] $$a \mathrm{E} a' \text{ y } b \mathrm{E} b' \text{ implica } (a \& b) \mathrm{E} (a' \& b').$$

Se dice entonces que la operación & cumple la *ley uniforme*; como esta condición es esencial para tener efectivamente una operación entre las clases (en el ejemplo que sigue: entre vectores libres) y no entre sus elementos (segmentos orientados), no haremos referencia explícita a ella en casos en que se enumeran otras propiedades que lógicamente pueden cumplirse o no.

EJEMPLO: La suma de los vectores libres **a** y **b** que se han introducido como ejemplo de definición por abstracción (§ 1-6), se obtiene aplicando al extremo de uno de los segmentos orientados que representan **a**, el origen de un segmento que represente **b**: el segmento orientado que va del primer origen al último extremo, representa la suma. Esta operación cumple la ley uniforme, por ser el resultado independiente de los segmentos orientados que representan a los vectores sumandos; es decir, si $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son segmentos equipolentes, y también lo son $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, la suma $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$ se *demuestra* geométricamente (no es evidente por sí mismo) que es equipolente a la suma $\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$.

Las operaciones fundamentales que ligan entre sí a los números naturales son la *adición* y la *multiplicación*.

b) *Adición o suma de dos números naturales.* — Se introduce mediante la siguiente definición por recurrencia (§ 2-3):

A cada par x, y de números naturales corresponde *unívocamente* otro número natural, que designaremos por $x + y$, construído recurriendo a las dos siguientes definiciones explícitas:

[2-5] $x + 1 = \mathrm{sg}\, x$ para todo x;

[2-6] $x + \mathrm{sg}\, y = \mathrm{sg}\, (x + y)$ para todo x y para todo y.

Como por [2-5] se expresa $\mathrm{sg}\, x$ por $x + 1$, la definición [2-6] puede también escribirse: $x + (y + 1) = (x + y) + 1$.

Llegaremos por recurrencia a cualquier $x + y$, sin más que ver que se obtienen por aplicación reiterada de [2-5] y [2-6] las sumas:

$$x + 2 = x + \mathrm{sg}\, 1 = \mathrm{sg}\, (x + 1)$$
$$x + 3 = x + \mathrm{sg}\, 2 = \mathrm{sg}\, (x + 2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Aplicando los axiomas de PEANO, y en particular el principio de inducción completa, se *demuestran* como teoremas las siguientes reglas de cálculo:

[2-7] $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*Ley asociativa de la adición*),

[2-8] $a + b = b + a$ (*Ley conmutativa de la adición*),

[2-9] De $b + a = c + a$ se deduce $b = c$ (*Ley cancelativa de la adición*).

En efecto, demostremos la ley asociativa. Para $c = 1$ es

$$(a + b) + 1 = \text{sg}(a + b) = a + \text{sg}\, b = a + (b + 1) \quad ,$$

donde las igualdades primera y tercera se justifican por [2-5], y la segunda por [2-6]. Supuesto ahora cierta [2-7], es

$$(a + b) + \text{sg}\, c = \text{sg}[(a + b) + c] = \text{sg}[a + (b + c)] = \\ = a + \text{sg}(b + c) = a + (b + \text{sg}\, c) \quad ,$$

donde la segunda igualdad se justifica por hipótesis inductiva y las demás por [2-6]. De ambos casos, por el Ax. V de PEANO queda probada [2-7] para *todo* c, y también existe para *todos* a y b por existencia de suma.

Para la ley conmutativa se empieza por probar inductivamente respecto de a que $\text{sg}\, a = 1 + a$ y luego en [2-8] se aplica inducción respecto de b.

Análogamente se prueba [2-9], con inducción respecto de a y aplicación del Ax. IV.

Si dados dos números m y a existe algún número r tal que $a + r = m$, se dice que r es la *diferencia, sustracción* o *resta* de m menos a, y se designa por $r = m - a$. Por eso se dice que la diferencia es la *operación inversa* de la suma. La ley [2-9] asegura que a lo más existe un número natural r que haga $a + r = m$ (puede no haber ninguno, como veremos por [2-16]).

c) *Multiplicación o producto de dos números naturales.* — Se introduce mediante la siguiente definición por recurrencia:

A cada par de números naturales x, y corresponde unívocamente otro número natural, que designaremos por $x.y$ (o xy), construído mediante las dos siguientes definiciones explícitas:

[2-10] $x.1 = x$ para todo x;

[2-11] $x.\text{sg}\, y = x.y + x$ para todo x y todo y.

La [2-11] expresa que $x.(y + 1) = xy + x$.

Las [2-10] y [2-11] ponen en forma inductiva la definición clásica de que multiplicar x por y es sumar y veces x. En efecto, se obtiene por recurrencia cualquier $x.y$ observando por aplicación reiterada de [2-10] y [2-11], que es:

$$x.2 = x.\text{sg}\, 1 = x.1 + x = x + x$$
$$x.3 = x.\text{sg}\, 2 = x.2 + x$$
$$x.4 = x.\text{sg}\, 3 = x.3 + x$$
....

Inductivamente se demuestran como teoremas las siguientes reglas de cálculo:

[2-12] $a.(b + c) = ab + ac$ (*Ley distributiva de la mul-*
$(a + b).c = ac + bc$ *tiplicación respecto a la suma*),

[2-13] $(a\, b)\, c = a\, (b\, c)$ (*Ley asociativa de la multiplicación*),

[2-14] $a.b = b.a$ (*Ley conmutativa de la multiplicación*),

[2-15] De $a.b = a.c$, se deduce $b = c$ (*Ley cancelativa de la multiplicación*).

En efecto, para las dos leyes distributivas [2-12] y asociativa [2-13] se aplica inducción respecto de c en forma análoga a la vista para la adición. Para la ley conmutativa [2-14] se efectúa inducción respecto de b, demostrando que $a.1 = 1.a$ por inducción respecto de a.

La ley cancelativa [2-15] se demuestra efectuando inducción respecto de c. Así primero se prueba que $a.b = a.1$ implica $b = 1$, pues si $a = 1$, se aplica [2-14] y [2-10], mientras que si $a \neq 1$ sería absurdo suponer que $b \neq 1$, pues existirían (§ 2-2, ejercicio) $\operatorname{pr} a$ y $\operatorname{pr} b$; entonces sería $a.b = a \operatorname{sg}(\operatorname{pr} b) = a.\operatorname{pr} b + a$ por [2-11] y de $a.b = a.1$ se deduciría $a.\operatorname{pr} b + a = 1 + \operatorname{pr} a$ por [2-10], [2-5] y [2-8], de donde, por [2-7], [2-9] y [2-5] sería $\operatorname{sg}(a.\operatorname{pr} b) = 1$, en contra del Ax. III de PEANO. Supuesto ahora inductivamente cierto [2-15], se prueba que $a.b = a.\operatorname{sg} c$ implica $b = \operatorname{sg} c$, viendo primero que por lo anteriormente demostrado debe ser $b \neq 1$ y por tanto existir $\operatorname{pr} b$ y entonces por [2-11] y [2-9] de $a.\operatorname{sg}(\operatorname{pr} b) = a.\operatorname{sg} c$ se deduce $a.\operatorname{pr} b = a.c$, es decir, por hipótesis inductiva $\operatorname{pr} b = c$, que por el Ax. II implica $b = \operatorname{sg} c$. La aplicación del Ax. V respecto de c prueba finalmente [2-15].

Si dados dos números b y a existe algún número c tal que $a.c = b$, se dice que c es el *cociente* de dividir b por a; así se introduce la división como *operación inversa* de la multiplicación. La ley [2-15] asegura que a lo más existe un número natural c que haga $a.c = b$ (puede no haber ninguno, ya que entre números naturales sólo es posible la división cuando el dividendo es *múltiplo* del divisor) (§ 5-1).

5. **Definición de mayor y menor. Leyes de la desigualdad.** — Se dice que $b > a$ (b es mayor que a), o bien $a < b$ (a menor que b), si existe un número natural n tal que $a + n = b$. Teniendo en cuenta la definición recurrente dada para la suma, esto equivale a decir que será $a < b$ cuando el número a aparezca *anteriormente* (§ 2-7) al b en la sucesión numérica natural. En el § 2-10 relacionaremos la desigualdad con la coordinación. En todo caso, mediante el cumplimiento de las leyes siguientes, la desigualdad establece un orden (§ 2-7) entre los números naturales.

Inductivamente se demuestran como teoremas las siguientes *leyes de la desigualdad*:

[2-16] Para cada par de números a, b vale una, y sólo una, de las relaciones $a < b$, $a = b$, $a > b$ (*Ley de tricotomía*).

[2-17] De $a < b$ y $b < c$ se deduce $a < c$ (*Ley transitiva de la monotonía*).

[2-18] De $a < b$ se deduce $a + c < b + c$ (*Ley de monotonía de la adición*).

[2-19] De $a < b$ se deduce $a.c < b.c$ (*Ley de monotonía de la multiplicación*).

En efecto, para la ley de tricotomía [2-16], se hace inducción respecto de b. Así, para $b=1$, por el Ax. III de PEANO no puede darse $a<1$, y si $a\neq 1$, entonces existe pr a (§ 2-2, ejercicio), es decir $a=1+\operatorname{pr} a$ y por tanto $a>1$. Supuesto cierto [2-16] para b, se prueba para sg $b\neq 1$, pues si $a=1$ es $1<\operatorname{sg} b$, ya que por [2-5] y [2-8] es $1+b=\operatorname{sg} b$, mientras que no puede ser $\operatorname{sg} b+n=1$, pues sería $\operatorname{sg}(b+n)=1$, en contra del Ax. III; si finalmente es $a\neq 1$, existe pr a, y como por hipótesis inductiva se da una y sólo una de las $\operatorname{pr} a+n=b$, $\operatorname{pr} a=b$, $b+n=\operatorname{pr} a$, tomando sg de ambos miembros, por los Axs. II y IV y § 2-4, b), se da una y sólo una de las $a+n=\operatorname{sg} b$, $a=\operatorname{sg} b$, $\operatorname{sg} b+n=a$, es decir [2-16] para sg b. Por aplicación del Ax. V queda probado [2-16] para todo b.

Para la ley transitiva [2-17] si $a+n=b$ y $b+m=c$, por § 2-4, b) será $a+(n+m)=b+m=c$, es decir, $a<c$. Análogamente, por aplicación directa de la definición de $<$ y de las leyes de § 2-4, se demuestran las leyes de monotonía [2-18] y [2-19].

6. Leyes formales: principio de permanencia. — La importancia de las reglas de cálculo [2-5] a [2-19] radica en que al generalizar el concepto de número mediante definiciones por abstracción del nuevo concepto, pasaremos del número natural al entero, de éste al racional, luego al real, y de aquí al complejo, de manera que puedan definirse operaciones de adición y multiplicación entre los nuevos entes que cumplan (con las pequeñas modificaciones que se verán) dichas reglas de cálculo antes establecidas. Éste es el llamado *método genético*, y en él se debe tomar como norma el *principio de permanencia de las leyes formales*, enunciado así por HANKEL: "Al generalizar un concepto se debe tratar de conservar el mayor número de propiedades, y al nuevo concepto debe corresponder como caso particular el anterior". Aun más: dichas leyes formales enunciadas como proposiciones primeras o axiomas, son las que toma HILBERT para caracterizar de una vez por todas lo que debemos entender por la palabra "número"; éste es el que por antonomasia se llama en Aritmética *método axiomático* (§ 1-7).

Son precisamente las leyes formales del cálculo las que permiten construir las tablas de sumar y multiplicar aprendidas en la escuela primaria, así como las usuales reglas operatorias de cálculo numérico, *demostrables* basándose en dichas leyes formales; aun más: éstas permiten *mecanizar* el cálculo numérico, mediante máquinas de calcular (los seudo cerebros de acero de la propaganda), según ya previeron los genios profundos de PASCAL y de LEIBNIZ; así, pues, "hacer números", es decir aplicar rutinariamente las reglas de cálculo numérico, no es más que hacer funcionar un mecanismo (ciertamente, aburrido y árido), cuya creación y fundamento es lo científicamente importante; un calculista no creador no es un hombre de ciencia: sólo posee una técnica más o menos útil.

7. Concepto de orden. — Un conjunto se dice *ordenado estrictamente* cuando se da entre sus elementos una relación binaria cualquiera (§ 1-5), entonces llamada de *prioridad* [<] (léase "anterior a"), que sea:

a) *Transitiva*: De a [<] b y b [<] c se deduce a [<] c.

b) *Lineal*: Si $a\neq b$ se deduce a [<] b ó b [<] a.

c) *Irreflexiva*: No es $a\,[<]\,a$.

d) *Asimétrica*: Si $a\,[<]\,b$, entonces no es $b\,[<]\,a$.

Si a es anterior a b, se dirá que b es "posterior a" a.

El orden estricto cumple la siguiente ley:

Ley de tricotomía: Se da siempre una, y sólo una, de las relaciones $a = b$ o $a\,[<]\,b$ o $b\,[<]\,a$.

Esta ley se demuestra mediante las condiciones *b*), *c*) y *d*). Recíprocamente, estas tres condiciones pueden sustituirse por la ley de tricotomía, es decir, una relación binaria establece un orden estricto cuando, y sólo cuando, es transitiva y cumple la ley de tricotomía.

Ejemplo 1. La relación $<$ entre números naturales (§ 2-5) establece en ellos un orden estricto, en virtud de las leyes [2-17] y [2-16].

Dada una ordenación, puede como caso particular ocurrir que entre dos elementos a y b no haya ningún otro, es decir, que si a es anterior a b, no exista ningún elemento que sea a la vez posterior al a y anterior al b; entonces se dice que a, b son elementos *consecutivos*; esto se suele designar escribiendo: $b =$ $=$ sg a (sg = *siguiente*), o bien: $a =$ pr b (pr = *precedente*).

Obsérvese que respecto a la ordenación $<$ entre números naturales (§ 2-5), el significado de "precedente" y "siguiente", ahora introducido, es concordante con el visto en el § 2-2. En efecto, vamos a ver que para cualquier número natural n no existe ningún otro número natural x tal que cumpla $n < x < n + 1$. Habría de ser (§ 2-5) $n + m = x$; $x + s =$ $= n + 1$, y aplicando las leyes formales de la adición (§ 2-4) $m + s = 1$. Esta igualdad contradice el axioma III de Peano (§ 2-2) si $s = 1$, y si $s \neq 1$, existiría pr s, llegándose también al absurdo de ser

$$\text{sg}(m + \text{pr}\, s) = 1.$$

También, como caso particular, puede ocurrir que en el conjunto ordenado exista un elemento que sea anterior a todos los demás, el que se llama *primer* elemento, y por otro lado puede existir un elemento posterior a todos los demás del conjunto, llamado *último* elemento.

Ejemplos: 2. Demuéstrese que la sucesión numérica natural ordenada según la relación $<$ (§ 2-5) tiene 1 como primer elemento.

3. Los puntos de un segmento rectilíneo en que se han suprimido los extremos, es decir, cuyas abscisas x cumplen la condición $c < x < d$, forman un conjunto que carece de elementos consecutivos y de primero y último elemento.

4. Distintas ordenaciones de un mismo conjunto pueden tener características diferentes: así los números fraccionarios irreducibles positivos (§ 6-5) ya conocidos en la enseñanza elemental, si se ordenan de menor a mayor (§ 6-5) no tienen elementos consecutivos, porque entre dos cualesquiera m/n, m'/n' hay infinitos otros, por ejemplo, la semisuma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right), \text{ o bien } \frac{m + m'}{n + n'}, \text{ etc.;}$$

tampoco tienen primero (el 0 no pertenece al conjunto) ni último elemento; en cambio, pueden ordenarse de manera que sea anterior el número fraccionario que tenga menor la suma de sus dos términos, y en caso de igual suma, el de menor denominador; así resulta la ordenación

[2-20] $$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

en la cual existe un primero pero no un último elemento, y cada elemento tiene un siguiente.

Un conjunto ordenado se dice *bien ordenado* cuando todo *subconjunto* del mismo tiene bajo la misma ordenación *primer* elemento. Resulta pues, en particular, que cada elemento que no sea último tiene un siguiente (el primero de los posteriores), pero puede carecer de precedente.

EJEMPLO 5. Los números fraccionarios positivos, puestos en orden de menor a mayor (§ 6-5) no forman un conjunto bien ordenado. Si se adopta, en cambio, la ordenación [2-20], resulta un conjunto bien ordenado. También resulta bien ordenado si de dos fracciones irreducibles, decimos que es anterior la de denominador menor, y sólo en el caso de denominador igual decimos que es anterior la fracción de numerador menor. Resulta así:

[2-21] $$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \ldots; \ldots,$$

en que las fracciones $1/n$ no tienen precedente.

Puede demostrarse por inducción el importante teorema:

TEOR.: *Todo conjunto no vacío de números naturales tiene un número mínimo* (pues basta efectuar inducción respecto de n en la proposición equivalente: Si en un conjunto de números naturales existe un número $a \leqslant n$, dicho conjunto tiene un número mínimo). Este teorema podría aceptarse como axioma bajo el nombre de *principio del número mínimo*, sustituyendo al principio de inducción completa, que entonces pasa a ser un teorema demostrable a partir de él y de la ley cancelativa de la adición [2-9]. El principio del número mínimo se llama también *principio de buena ordenación de los números naturales*. Sin embargo, el ejemplo [2-21] muestra bien el carácter distinto del principio de buena ordenación general respecto al de inducción completa.

NOTA 1. El concepto de orden admite variantes interesantes. Las condiciones esenciales para establecer un orden son la *transitiva* (a) y la *asimétrica generalizada* (también llamada asimétrica), usada en órdenes reflexivos [$\leqq$]:

d') De $a \, [\leqq] \, b$ y $b \, [\leqq] \, a$, se deduce $a = b$.

La relación $\leqq$ entre números reales (§ 7-5) tiene las propiedades a), b) y d'), siendo también *reflexiva*: $a \leqq a$. Si además se suprime la condición b), se obtiene el llamado *orden parcial*, de gran importancia en la Matemática moderna. Un conjunto o sistema de elementos se dice *parcialmente ordenado* si se ha definido en él una relación (entonces llamada de orden parcial), que cuando afecta a un par de elementos del conjunto es *transitiva, reflexiva* y *asimétrica generalizada*. (Ver nota I, de este capítulo).

EJEMPLO 6: La relación de inclusión ($\leqq$) (§ 1-1) establecida en un sistema de conjuntos es de orden parcial, pues aun cuando en el sistema puedan existir pares de conjuntos no ligados por ella, en caso de serlo cumple la condición transitiva (de A($\leqq$)B y B($\leqq$)C se deduce A($\leqq$)C), la reflexiva (A($\leqq$)A) y la asimétrica generalizada (de A($\leqq$)B y B($\leqq$)A se deduce A = B).

NOTA 2. Una relación transitiva [$\leqslant$] establecida entre pares de elementos de un conjunto se dice tiene la propiedad de *composición o dirección* *

---

* También llamada propiedad de MOORE-SMITH, por haber sido estos autores quienes primeramente, en 1922, estudiaron sus principales aplicaciones, sobre todo en Topología.

si para cada par de elementos a y b del conjunto existe por lo menos en el conjunto un elemento c tal que $c[\leqslant]a$ y $c[\leqslant]b$. Entonces se dice que se tiene un *conjunto dirigido*.

EJEMPLOS: 7. El conjunto formado por los puntos de un círculo, en el que se ha suprimido el centro, dispuestos inversamente a sus distancias a dicho centro, es decir, $a[\leqslant]b$ si la distancia de a al centro es menor que la de b.

8. El conjunto de todos los números naturales respecto a la relación "a es múltiplo de b" (lo que se toma como $a[\leqslant]b$) (§ 5-4).

8. **Correspondencia.** — Vamos ahora a introducir una nueva relación primitiva: la de *correspondencia* entre los elementos de un conjunto M y los de otro N.

Una correspondencia está determinada cuando para cada elemento a del conjunto M se da un criterio para saber qué elemento $\varphi(a)$ tiene por correspondiente en N; dicha correspondencia recibe también el nombre de *función*, cuyo *campo de definición* es el conjunto M; el conjunto N se supone contiene todos los *valores funcionales* $\varphi(a)$. En lenguaje geométrico se dice que M está *representado* o *aplicado en* N y que $\varphi(a)$ es la *imagen* de a. Se suele designar con $\varphi(M)$ al conjunto de los $\varphi(a)$ para $a \in M$. Se dice una aplicación de M *sobre* N si $\varphi(M)$ coincide con N. La imagen $\varphi(a)$ se supone unívocamente determinada por a (es decir, cada a tiene una sola imagen $\varphi(a)$), pero en cambio dos elementos distintos a y b pueden tener una misma imagen $\varphi(a) = \varphi(b)$. Si en cambio esto no ocurre, es decir de $a \neq b$ se deduce siempre $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, la correspondencia se llama *biunívoca* (1 — 1: unívoca en los dos sentidos), y los conjuntos M y $\varphi(M)$ se dice son *coordinables*. Así, pues, dos conjuntos son coordinables si a cada elemento de uno de ellos corresponde uno, y sólo uno, del otro.

La idea de correspondencia supone un orden de prelación entre los conjuntos dados M y N; en la correspondencia biunívoca o coordinación puede deducirse siempre de ella otra correspondencia *inversa* entre N y M.

EJEMPLOS: 1. La Geometría da innumerables ejemplos de correspondencias.

Así, podemos suponer que M lo forman los puntos de una circunferencia C, y que el criterio φ lo da su proyección desde un punto exterior O sobre una recta r. Esta correspondencia no será biunívoca, y el conjunto N no abarcará todos los puntos de la recta r, sino sólo los del segmento que sobre ella determinan el par de tangentes trazadas a C desde O (fig. 8). Tendremos así una aplicación de la circunferencia *en* la recta.

En cambio, es biunívoca la correspondencia establecida sin excepción por la proyección de una recta r sobre otra s desde un punto O, exterior a ambas (fig. 9), obteniendo una aplicación de r *sobre* s.

2. Otro ejemplo de correspondencia no biunívoca se tiene haciendo corresponder a cada número natural n el 0 ó el 1, según sea par o impar; aquí, el conjunto M formado por la sucesión numérica natural $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, se aplica *sobre* el conjunto N formado por el par de números $\{0, 1\}$; la función φ queda por esta ley completamente determinada, sin necesidad de encontrar una fórmula algorítmica para ella;

sin embargo, es fácil ver que puede expresarse $\varphi(n) = \frac{1}{2}[1 - (-1)^n]$. En el § 5-11 veremos justificada en otra forma esta correspondencia.

3. Si a cada número natural n hacemos corresponder su duplo, es decir, $\varphi(n) = 2n$, se habrá establecido una correspondencia *biunívoca* entre el conjunto de todos los números naturales y el conjunto de los nú-

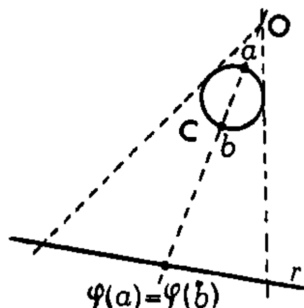


Fig. 8.

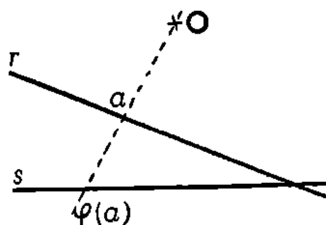


Fig. 9.

meros pares; obsérvese que a pesar de ser ambos conjuntos $\{n\}$ y $\{2n\}$ coordinables, el segundo conjunto es *parte* del primero: $\{2n\} (<) \{n\}$. Ya veremos (§ 2-9) que este hecho sorprendente no puede darse en los conjuntos *finitos*.

9. **Conjuntos finitos.** — Se llama *sección* $(1, n)$ de la sucesión numérica natural al conjunto de números naturales $\leqq n$.

Un conjunto se llama *finito* si es coordinable (§ 2-8) con una sección de la sucesión numérica natural. Se considera también finito al conjunto vacío.

Más sencillamente: Un conjunto es finito si se pueden *contar* sus elementos, es decir, si a cada elemento se le puede asignar un número natural desde 1 hasta n, de manera que a elementos distintos correspondan números naturales distintos y hayan sido empleados todos los números naturales desde el 1 hasta el n.

Entonces, los elementos del conjunto finito M pueden ser designados por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, es decir:

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}.$$

Ejercicio: Demuéstrese, por inducción completa, que el conjunto parcial de un conjunto finito es también finito.

Un conjunto que no es finito, se llama *infinito*. Por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales es infinito, como demostraremos en seguida.

El *teorema fundamental sobre conjuntos finitos* (llamado también teorema fundamental de la Aritmética) dice:

Teor. 1. *Un conjunto finito no es coordinable con ningún conjunto del que forme parte* (§ 1-1).

Dem.: Supongamos que el conjunto *finito* A sea parte del conjunto B, es decir, A $(<)$ B. Sea $A = \{a_1 a_2, \ldots, a_n\}$, y supongamos fuese A coordinable con B. Entonces vamos a ver que llegaremos a un absurdo, y por lo tanto, será imposible establecer una coordinación análoga a la vista en

el ejemplo 3 del § 2-8, en el que hacíamos corresponder a cada número natural su duplo.

Designemos por $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$ las imágenes en B de los elementos de A, y que por la coordinación supuesta formarán *todos* los elementos de B; entre ellos figurarían los $a_1, a_2, \ldots, a_n$, y por lo menos algún otro elemento, que designaremos por a_{n+1}.

Para $n = 1$, el absurdo es inmediato: la representación unívoca $\varphi(a_1)$ no puede coincidir a la vez con a_1 y a_2.

Bastará ahora aplicar la segunda parte del principio de inducción completa, suponiendo que el teorema es cierto para todo conjunto de $n - 1$ elementos. Podemos siempre suponer que es $\varphi(a_n) = a_{n+1}$, ya que en caso que fuese $\varphi(a_n) = a'$, $(a' \neq a_{n+1})$, el a_{n+1} sería imagen de otro a_i, es decir: $\varphi(a_i) = a_{n+1}$, $(i \neq n)$, y de la coordinación φ pasaríamos a otra ψ en que $\psi(a_i) = a'$, $\psi(a_n) = a_{n+1}$, conservando la misma correspondencia biunívoca para los demás pares. Sea el conjunto $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ deducido del A por supresión del elemento a_n; sea B' el conjunto que deducimos del B suprimiendo el elemento a_{n+1}; la misma coordinación anteriormente supuesta aplicada a los A' y B' hace ver que $\varphi(A')$ ha de representar por lo menos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, y que por lo tanto el conjunto finito A' de $n - 1$ elementos es parte de $B' = \{\varphi(A')\}$ y es coordinable con él, absurdo por hipótesis inductiva. Por lo tanto, el teorema queda demostrado para *cualquier n finito.*

Un caso particular de este teorema es el célebre de DEDEKIND:

TEOR. 2. *Un conjunto finito no es coordinable con ninguno de sus conjuntos parciales.*

COROLARIO. — Del teorema 1 deducimos que una sección de la sucesión numérica natural (coordinable consigo misma y entonces finita) nunca es coordinable con toda la sucesión, pues es parte de ella; ésta forma, pues, un conjunto infinito.

10. **Número cardinal.** — El número cardinal es el ente abstracto que resulta de la coordinabilidad entre conjuntos (§ 2-8). Por ser ésta una relación de equivalencia, es decir, reflexiva, simétrica y transitiva, divide a los conjuntos (de determinada colección de ellos) en clases (§ 1-5) que agrupan a los coordinables entre sí. Esto conduce a definir por abstracción el *número cardinal* de un conjunto: *Dos conjuntos tienen el mismo número cardinal* (o sea, pertenecen a la misma clase) *cuando son coordinables entre sí.*

Al *contar* (§ 2-9) los elementos de un conjunto finito, establecemos implícitamente una *ordenación* (§ 2-7) entre sus elementos, y al último *n* se le llama por eso *número ordinal* del conjunto.

Del teorema fundamental sobre conjuntos finitos (§ 2-9, Teor. 1) deducimos que un conjunto nunca puede coordinarse con dos secciones distintas de la sucesión numérica natural, ya que entonces éstas serían coordinables entre sí, lo que es absurdo por el teorema fundamental, pues una de ellas es parte de la otra. Esto demuestra el *teorema de invariancia del número ordinal de un conjunto finito*: "Cualquiera sea la manera de contar los elementos de un conjunto finito, siempre llegaremos al mismo número ordinal *n*".

Este número ordinal n caracteriza una sección $(1, n)$ de la sucesión numérica natural, la que puede tomarse como representante de la clase (§ 1-6) de los conjuntos finitos que tienen un *mismo número cardinal*. Es decir, todos los conjuntos finitos que tienen un *mismo número cardinal* están caracterizados por la propiedad de ser *coordinables* entre sí y con una sección de la sucesión numérica natural.

A pesar de lo intuitivo del concepto de número cardinal, que constituye una de las facultades más notables de la mente humana, obsérvese, sin embargo, que utilizar la inducción completa (§ 2-2, *a*) como *principio* implica dar a la idea de orden un papel primordial en la formación del concepto de número.

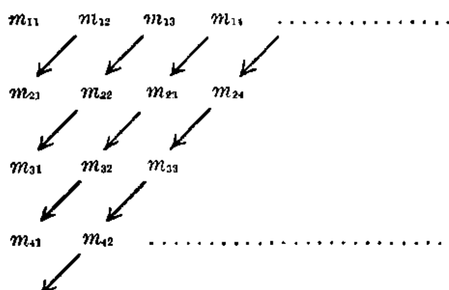
11. **Conjuntos numerables.** — Todo conjunto que sea coordinable con toda la sucesión numérica natural se dice es *infinito-numerable;* a cada uno de sus elementos se le puede asignar exactamente un índice, de modo que elementos distintos tengan índices distintos; entonces, el conjunto recibe el nombre de *sucesión* (§ 7-2). La sucesión es al conjunto infinito-numerable lo que el número ordinal es al cardinal, es decir, se tiene o no en cuenta una ordenación para los elementos del conjunto.

Los conjuntos infinito-numerables y los conjuntos finitos se llaman *numerables.*

No sólo puede demostrarse que un conjunto infinito-numerable es coordinable con el que se obtiene añadiéndole un número finito numerable de nuevos elementos, sino que vamos a probar más en general el teorema:

TEOR.: *El conjunto que forman todos los elementos de un conjunto numerable de conjuntos numerables es numerable.*

DEM.: Sean $M_1, M_2, M_3, \ldots$, los conjuntos, y designemos los elementos de M_r por $m_{r1}, m_{r2}, m_{r3}, \ldots$ Basta entonces ordenar los m_{rs} en forma tal que vaya antes el elemento que tenga menor la suma de ambos índices, y en caso de igual suma aquel cuyo primer índice sea menor. Es el mismo procedimiento que hemos empleado en el § 2-7, ej. 4, y que demuestra es numerable el conjunto de los números racionales, como ilustra el cuadro adjunto (2º índice: numerador; 1er índice: denominador):



Ejercicios

1. Efectuar las demostraciones completas de los teoremas que se han enunciado.

2. Demostrar para todo número natural n las fórmulas:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2, \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n\ (n+1)} = \frac{n+1}{n}.$$

3. Hállense y demuéstrense por inducción las relaciones de desigualdad entre los números

$$2^{3^n},\quad 3^{2^n},\quad n^{3^2},\quad 2^{n^3},\quad 3^{n^2},\quad n^{2^3},$$

averiguando en cada caso desde qué valor de n se cumplen.

4. Demostrar que el número de elementos de la reunión de dos conjuntos finitos disjuntos es igual a la suma de los números de cada uno.

5. Demostrar que el número de elementos de la reunión de r conjuntos dos a dos disjuntos, de s elementos cada uno, es $r.s$.

6. Indicar dónde está la falla de la siguiente "demostración" inductiva de la proposición: "Tomados repetida o distintamente dos cualesquiera números naturales de la sucesión numérica natural, resultan iguales". Demostración: 1º) La proposición es cierta para la sección s_1, que consta solamente del número 1; 2º) Si la proposición es cierta para la sección s_{n-1}, que consta de los $n-1$ primeros números naturales, lo es para s_n, pues para probar que $a = b$ en s_n, bastará suponer $a-1 = b-1$, que al pertenecer a s_{n-1} se verifica por hipótesis inductiva.

7. Lo mismo para la siguiente proposición: "Toda familia finita de rectas en el plano tiene algún punto común a todas", si se admiten los puntos impropios comunes a las rectas paralelas. En efecto: 1º) La proposición es cierta para $n = 1$; 2º) Supuesta la proposición cierta para $n-1$ rectas, la n-ésima recta debe pasar por el punto común a las restantes.

¿En qué eslabón se rompe la cadena inductiva?

8. En la ordenación sin repetición de los números racionales positivos **por el método diagonal respecto al numerador y denominador** (§ 2-11), encontrar el lugar que ocupan 25/4 y 0,05.

9. Demostrar que todo subconjunto de los números naturales es numerable.

§ 3. El número entero

1. **Definición de número entero.** — Su introducción se hace necesaria, para poder dar solución en todos los casos a la ecuación

[3-1] $$a_2 + x = a_1.$$

Esta ecuación tiene solución en el campo de los números naturales, sólo si $a_1 > a_2$, y entonces se designa por $a_1 - a_2$; en cambio [3-1], no tendrá solución si $a_2 > a_1$ por la ley [2-16] de tricotomía.

Las ecuaciones: [3-1] con $a_1 > a_2$, y $b_2 + x = b_1$ con $b_1 > b_2$ tendrán *la misma* solución, es decir

(*) $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$ *cuando y sólo cuando* $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$.

Si no se cumplen las condiciones $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, pierden sentido ambos miembros de la primera ecuación (*). Conservaremos la validez de la condición (*) llamando *números enteros* a los *pares ordenados* $\{a_1\text{-}a_2\}$ (minuendo-sustraendo) de números naturales con la condición de que:

$\{a_1\text{-}a_2\} = \{b_1\text{-}b_2\}$ *cuando y sólo cuando* $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$.

Por ejemplo, verifíquese:

$\{2\text{-}5\} = \{5\text{-}8\}$, $\{3\text{-}3\} = \{5\text{-}5\}$, $\{5\text{-}2\} = \{8\text{-}5\}$.

Más precisamente, definamos por abstracción (§ 1-6) el número entero, mediante *pares ordenados* de números naturales *cualesquiera*, que indicaremos $[a_1\text{-}a_2]$ (aquí, provisionalmente, - representa un guión). La relación E (equivalencia), definida entre estos pares, poniendo:

[3-2] $[a_1\text{-}a_2]\ E\ [b_1\text{-}b_2]$ *cuando, y sólo cuando,* $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$

es una relación de equivalencia (§ 1-5) (compruébese). Por consiguiente, E divide al conjunto de los pares en *clases*, que llamaremos *números enteros*. Indicando con $\{a_1\text{-}a_2\}$ a la clase o número entero determinado por el par $[a_1\text{-}a_2]$, tendremos:

[3-3] $\{a_1\text{-}a_2\} = \{b_1\text{-}b_2\}$ *cuando, y sólo cuando* $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$.

En lo que sigue no haremos distinción entre una clase $\{a_1\text{-}a_2\}$ y un par $[a_1\text{-}a_2]$ que la represente; diremos, por ejemplo, *par* $\{a_1\text{-}a_2\}$.

Una interpretación concreta del número entero la puede dar un *balance* de una situación contable dado por el *haber* (minuendo) y el *debe* (sustraendo). La condición [3-2] es la que han de cumplir los pares {haber-debe} para que representen un *mismo* balance.

2. **Enteros positivos y negativos.** — Convendremos, por definición, en llamar *entero positivo* $+a$ al representado por el par

[3-4] $+a = \{(a+n)\text{-}n\}$

con n número natural cualquiera, lo que nos dice que para $a_1 > a_2$ será por [3-3]:

[3-5] $\{a_1\text{-}a_2\} = \{(a_1 - a_2 + n)\text{-}n\} = +(a_1 - a_2)$;

es decir, en este caso el número entero indicado en el primer miembro da la diferencia que figura en el último miembro.

Estos enteros positivos pueden identificarse con los números naturales (ver § 3-5).

Llamaremos *cero* o *nulo* al número entero cuyo par $\{a_1\text{-}a_2\}$ cumpla $a_1 = a_2$; así será, por definición:

[3-6] $0 = \{n\text{-}n\}$

con n número natural cualquiera.

Toda situación contable en que el haber es igual al debe, tendrá un mismo *balance nulo*.

Como el par $\{n\text{-}(a+n)\}$ representa el mismo número entero para cualquier valor natural de n, será cómodo y fecundo usar el *nuevo símbolo* $-a$, mediante la definición:

[3-7] $$-a = \{n\text{-}(a+n)\}$$

independiente del número natural cualquiera n, con lo cual, si $a_2 > a_1$, podremos escribir, en virtud de [3-3]:

[3-8] $$\{a_1\text{-}a_2\} = \{n\text{-}(a_2 - a_1 + n)\} = -(a_2 - a_1).$$

En virtud de la ley de tricotomía [2-16] entre a_1 y a_2, todo número entero ha de ser positivo, nulo o negativo.

Los números [3-7] llamados *enteros negativos*, conjuntamente con el cero, se han logrado mediante la ampliación creadora del nuevo concepto: número entero.

En la interpretación concreta dada, si la situación contable se refiere a un balance en que el debe es mayor que el haber, se tendrá un *balance en déficit*, representable por un entero negativo.

3. **Suma, producto y desigualdad.** — Las operaciones fundamentales de adición y multiplicación y la relación de desigualdad se habrán de introducir por *definiciones* referidas a conceptos anteriores (dados en el § 2), y que en el caso particular de aplicarlas a enteros positivos coincidan con las ya definidas en el § 2 para números naturales; además, habrán de adaptarse al mencionado principio de permanencia de las leyes formales (§ 2-6).

Para ello, teniendo en cuenta que si $a_1 > a_2$ y $b_1 > b_2$, es

$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)$;
$(a_1 - a_2) \cdot (b_1 - b_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)$;
$a_1 - a_2 < b_1 - b_2$ equivale a $a_1 + b_2 < a_2 + b_1$;

definiremos:

[3-9] *Suma*: $\{a_1\text{-}a_2\} + \{b_1\text{-}b_2\} = \{(a_1 + b_1)\text{-}(a_2 + b_2)\}$.

[3-10] *Producto*: $\{a_1\text{-}a_2\} \cdot \{b_1\text{-}b_2\} = \{(a_1b_1 + a_2b_2)\text{-}(a_1b_2 + a_2b_1)\}$.

[3-11] *Desigualdad*: Es $\{a_1\text{-}a_2\} < \{b_1\text{-}b_2\}$ *cuando y sólo cuando* $a_1 + b_2 < a_2 + b_1$.

Estas definiciones nos permitirán operar con los números enteros (balances) en función de los pares que los determinan {haber - debe}, pero su fecundidad radica en que las *reglas operatorias serán las mismas que las vistas anteriormente en el* § 2, y por lo tanto, el nuevo concepto de número entero (balance) tomará como tal número importancia propia e independiente.

4. **Ley uniforme y leyes formales.** — Las definiciones del apartado anterior cumplen como teorema la *ley uniforme*, es decir, el resultado obtenido por ellas es *independiente* del par que se elija para representar cada número entero que en ellas interviene. Obsérvese que precisamente por esto, las operaciones de suma y producto y la relación de desigualdad pueden considerarse definidas entre números enteros (es decir, entre clases de pares y no entre pares aislados) (§ 2-4).

En efecto, si $[a_1\text{-}a_2] = [a_1'\text{-}a_2']$ con $[b_1\text{-}b_2] = [b_1'\text{-}b_2']$, es decir, por [3-2], es $a_1 + a_2' = a_2 + a_1'$ con $b_1 + b_2' = b_2 + b_1'$, para la ley uniforme de la suma, resulta ser $(a_1 + b_1) + (a_2' + b_2') = (a_2 + b_2) + (a_1' + b_1')$ por aplicación de la hipótesis y de las leyes asociativa [2-7] y conmutativa [2-8] de la suma de números naturales. Para la ley uniforme del producto se procede análogamente teniendo en cuenta las leyes distributivas [2-12] y cancelativa de la suma [2-9]. Para la ley uniforme de la desigualdad, de la hipótesis que exista un número natural n tal que $a_1 + b_2 + n = a_2 + b_1$, se deduce (§ 2-4, b) que $a_1 + a_1' + b_2 + b_1' + n = a_2 + a_1' + b_1 + b_1'$ y aplicando las equivalencias de partida, resulta $a_1 + a_1' + b_1 + b_2' + n = a_1 + a_2' + b_1 + b_1'$, es decir $[a_1'\text{-}a_2'] < [b_1'\text{-}b_2']$.

Se demuestra como teoremas, que las leyes formales: asociativa [2-7], conmutativa [2-8], cancelativa [2-9] de la adición; distributiva [2-12], asociativa [2-13], conmutativa [2-14] de la multiplicación; de tricotomía [2-16], transitiva de la monotonía [2-17] y de monotonía de la adición [2-18] se conservan; en cambio, la ley cancelativa de la multiplicación [2-15] sólo se cumple si el factor común es $a \neq 0$, y la ley de monotonía de la multiplicación [2-19] sólo si el factor común es $c > 0$. Así, pues, ahora tendremos también demostradas como teoremas:

[3-12] De $a.b = a.c$ y $a \neq 0$ se deduce $b = c$ (*Ley general cancelativa de la multiplicación*):

[3-13] De $a < b$ y $c > 0$ (< 0, $= 0$) se deduce $a.c < b.c$ ($> b.c$, $= b.c$) (*Ley general de monotonía de la multiplicación*).

En efecto, para la fácil demostración de las leyes que se conservan, se sustituyen los números enteros por sus pares de números naturales que los representan y se aplican a éstos las correpondientes leyes ya demostradas en §§ 2-4 y 2-5.

Para demostrar [3-12], de $\{a_1\text{-}a_2\}.\{b_1\text{-}b_2\} = \{a_1\text{-}a_2\}.\{c_1\text{-}c_2\}$ y aplicación de [3-10], [3-3], [2-7], [2-8] y [2-12] se obtiene $a_1(b_1 + c_2) + a_2(b_2 + c_1) = a_1(b_2 + c_1) + a_2(b_1 + c_2)$. Si $a_1 = a_2$, esta igualdad es cierta para $\{b_1\text{-}b_2\}$ y $\{c_1\text{-}c_2\}$ *cualesquiera*. Si en cambio, es $\{a_1\text{-}a_2\} \neq 0$, supongamos por ejemplo $\{a_1\text{-}a_2\} < 0$; entonces, aplicando [2-9] y [2-12], de la igualdad anterior, se deduce $(a_2 - a_1)(b_2 + c_1) = (a_2 - a_1)(b_1 + c_2)$, de donde por la ley cancelativa del producto [2-15] para números naturales, resulta $b_2 + c_1 = b_1 + c_2$, es decir por [3-3], la conclusión $\{b_1\text{-}b_2\} = \{c_1\text{-}c_2\}$.

Para demostrar [3-13], de $a_1 + b_2 < a_2 + b_1$ y $c_1 > c_2$, ($<$), por [2-19] se deduce $(a_1 + b_2).(c_i - c_j) < (a_2 + b_1)(c_i - c_j)$ con $i = 1$, $j = 2$, ($i = 2$, $j = 1$). De ésta, por [2-12], [2-7] y [2-18], resulta la conclusión $(a_1c_1 + a_2c_2) + (b_1c_2 + b_2c_1) < (a_1c_2 + a_2c_1) + (b_1c_1 + b_2c_2)$, ($>$). Si $c_1 = c_2$, la demostración es inmediata.

Muchas demostraciones falsas que se dan en pasatiempos matemáticos, pretendiendo probar absurdos, se basan en la aplicación sin restricciones de [2-15], para lo cual se expresa $a = 0$ en forma disimulada.

5. Isomorfismo entre los números naturales y los enteros positivos. — En general, si dados dos conjuntos M_1 y M_2 se introducen en ambos operaciones y relaciones análogas, se dice que ambos conjuntos son *isomorfos* si es posible establecer entre sus elementos una correspondencia biunívoca (llamada

entonces *isomorfismo*, cfr. § 1-6) tal que los resultados de cada operación con datos correspondientes sean también correspondientes y si en M_1 dos elementos están ligados por una relación, sus correspondientes en M_2 estén ligados por la relación análoga.

Aunque *un* numero natural a no es exactamente lo mismo que un entero positivo $+a$, dado por los *pares* [3-4] de números naturales que cumplan el criterio de igualdad [3-3], fácil es ver que puede establecerse una correspondencia biunívoca entre cada número natural a y el entero positivo correspondiente $+a$, según [3-4], de manera que para cualquier par de números naturales, a y b, se cumple por aplicación de [3-9], [3-10] y [3-4]:

$$[3\text{-}14]\quad \begin{cases} (+a)+(+b) = \{(a+n)\text{-}n\} + \{(b+m)\text{-}m\} = \\ \qquad = \{(a+b+n+m)\text{-}(n+m)\} = +(a+b) \\ (+a).(+b) = \{(a+n)\text{-}n\}.\{(b+m)\text{-}m\} = \\ \qquad = \{[(a+n)(b+m)+n.m]\ \text{-} \\ \qquad \text{-}\ [(a+n)m+n(b+m)]\} = \\ \qquad = \{ab+(am+bn+2nm)\ \text{-} \\ \qquad \text{-}\ (am+bn+2nm)\} = +(a.b). \end{cases}$$

Si indicamos la correspondencia biunívoca con $a \leftrightarrow +a$, [3-14] equivale a:

$$[3\text{-}15]\quad a+b \leftrightarrow (+a)+(+b)\,;\quad a.b \leftrightarrow (+a).(+b),$$

es decir: el correspondiente de la suma (producto) es la suma (producto) de los correspondientes.

Por lo tanto, ambos conjuntos de números naturales y enteros positivos están relacionados mediante un *isomorfismo*, en el que se conservan en correspondencia los resultados de la adición y la multiplicación. Éstas son, precisamente, las operaciones características que ligan a los sistemas de números, y por esto, en el álgebra de los números se suele reservar la palabra isomorfismo a la correspondencia biunívoca que posea las propiedades [3-15].

Es también un *isomorfismo ordenado*, porque $a < b$ equivale a que $(+a) < (+b)$.

Todo ello nos hace ver que el número natural y el entero positivo corresponden a un concepto esencialmente único (§ 1-6), y pueden por lo tanto identificarse:

$$[3\text{-}16]\qquad a = +a$$

Los resultados y propiedades de las operaciones entre números no dependerán del idioma en que se designen (aquí se traduce número natural por entero positivo), o de que se escriban en una u otra notación (a, $+a$, la usual notación decimal, la notación romana u otra cualquiera que pueda considerarse; véase nota II).

6. La sustracción. Operaciones enteras. — *a*) La ecuación

[3-17] $$\beta + x = \alpha$$

tiene siempre solución única en el campo de los números enteros (es decir, en él es siempre unívocamente posible la operación de sustracción), y por lo tanto, también la tiene su caso particular [3-1]; donde $a_2 = +a_2$, $a_1 = +a_1$, con solución $\{a_1\text{-}a_2\}$; de aquí que podamos convertir el guión - en signo de diferencia.

De las [3-4], [3-7], [3-9] y [3-6] deducimos el teorema:

[3-18] $$(+a) + (-a) = \{(a+n) - n\} + \{n - (a+n)\} = \\ = \{(a+2n) - (a+2n)\} = 0.$$

es decir:

[3-19] $$-a = 0 - (+a); \quad +a = 0 - (-a),$$

en las que los últimos miembros suelen escribirse sin minuendo. Las [3-19] equivalen a escribir $-(-\alpha) = \alpha$ para $\alpha = \pm a$. Por tanto, se cumple la llamada *ley de inversión aditiva*: Para todo α entero existe un único entero $-\alpha$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Los números α y $-\alpha$ se llaman *opuestos*, y también *asociados* en Álgebra moderna (§ 5-2, a_2); si uno de ellos es positivo, el otro es negativo. El *valor absoluto* de α, indicado por $|\alpha|$, se define como el número positivo entre los dos $+\alpha$ y $-\alpha$ si $\alpha \neq 0$, poniendo además $|0| = 0$.

EJEMPLOS: 1. $|-4| = 4$, pues de los dos números, -4 y $-(-4) = 4$, el segundo es el positivo.

2. Se tiene siempre $|-\alpha| = |\alpha| \geqslant 0$ y sólo $= 0$ si $\alpha = 0$.

OBSERVACIÓN: La forma de la definición anterior deberá modificarse, para extenderla al campo de los números complejos (§ 9-4).

Es útil aplicar la siguiente *regla general de sustracción*, demostrable como teorema: La diferencia $\alpha - \beta$ se obtiene sumando al minuendo α el opuesto $-\beta$ del sustraendo, es decir,

[3-20] $$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

b) Dentro del conjunto de los números enteros:

[3-21] $$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

son siempre realizables las operaciones de *suma*, *resta* y *multiplicación*, que por esta razón se llaman *operaciones enteras*.

La ordenación *consecutiva* [3-21] de menor a mayor se justifica en la siguiente forma. La definición de desigualdad [3-11] implica que los enteros positivos (negativos) son mayores (menores) que 0, cumpliéndose $\alpha < \alpha + 1$ para α entero cualquiera. Además, si α es entero positivo, vimos ya (§ 2-7) que entre α y $\alpha + 1$ no hay números enteros (positivos; pruébese por [2-17] que tampoco los hay negativos). De aquí y de la ley de monotonía [2-18] de la suma, resulta que lo mismo puede afirmarse para α entero cualquiera, pues si hubiese un entero β que cumpliese $\alpha < \beta < \alpha + 1$, sumando a los tres miembros $1 - \alpha$, habría números enteros entre 1 y 2, en contra de ser $2 = \text{sg}\,1$.

Esto prueba que en el orden (§ 2-7) definido por la relación de desigualdad [3-11], podamos poner para *α entero cualquiera*:

[3-22] $\alpha + 1 = \text{sg}\,\alpha \quad ; \quad \alpha - 1 = \text{pr}\,\alpha .$

y en particular:

[3-23] $0 = \text{pr}\,1,$

dejándose de cumplir en los enteros el axioma III de PEANO (§ 2-2, *a*)

c) Se generaliza el axioma de inducción completa (§ 2-2, *a*), para poder introducir conceptos o proposiciones válidas para n entero cualquiera, mediante el siguiente *teorema de recurrencia entera*:

TEOR.: ***Si en el conjunto* E *de enteros se tiene un conjunto* C(≦)E *que cumple*: 1º C *no es vacío*; 2º *si* $x \in$ C, *también* sg $x \in$ C, pr $x \in$ C; *entonces es* C = E.**

En efecto, existe un $c \in$ C y por el Ax. V de PEANO (§ 2-2), para todo n natural, tanto $c + n$ como $c - n$ pertenecerán a C; entonces, para todo $b \in$ E, existirá un entero $\pm n = b - c$ tal que $b = c \pm n \in$ C.

7. **Módulos de las operaciones fundamentales.** — Se llama *módulo* de una operación a un número que no modifica el valor de otro cualquiera cuando se aplica a ambos la operación.

La *ley modular de la suma* dice que *su único módulo es el* 0. En efecto, para todo α entero es $\alpha + 0 = \alpha$, pues basta aplicar [3-9], [3-6] y [3-3].

Además, si en el conjunto E de los enteros, para todo $\alpha \in$ E existiese otro módulo $\theta \in$ E de la adición, es decir, fuese también $\alpha + \theta = \alpha$, entonces siendo 0 módulo respecto de $\alpha = \theta$, será $\theta + 0 = \theta$, y también θ módulo respecto de $\alpha = 0$, será $0 + \theta = 0$; de estas dos, por la ley conmutativa de la suma, resulta $\theta = 0$, como queríamos demostrar. Obsérvese que no se ha utilizado la ley cancelativa de la adición; mediante ésta, basta suponer que para un solo $\alpha \in$ E sea $\alpha + \theta = \alpha = \alpha + 0$, para que cancelando α en los miembros extremos resulte $\theta = 0$. Por otra parte, la ley modular junto con la ley de inversión aditiva (§ 3-6) y la ley asociativa de la suma, demuestran la ley cancelativa de la suma; ésta puede por tanto sustituirse por aquéllas. En efecto, de $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ se deduce

$$\alpha = \alpha + 0 = \alpha + [\gamma + (-\gamma)] = (\alpha + \gamma) + (-\gamma) =$$
$$= (\beta + \gamma) + (-\gamma) = \beta + [\gamma + (-\gamma)] = \beta + 0 = \beta$$

como queríamos demostrar.

La *ley modular del producto* dice que *su único módulo es el* 1. De la definición [3-10] y de [3-4] y [3-3] se deduce inmediatamente que para todo $\alpha \in$ E es $\alpha . 1 = \alpha$.

Por otra parte, si para algún $\alpha \neq 0$, fuese $\alpha . \mu = \alpha = \alpha . 1$, aplicancando la ley cancelativa del producto entre los enteros, sería $\mu = 1$. Si para todo $\alpha \in$ E, fuese $\alpha . \mu = \alpha$, sin aplicar la ley cancelativa, sino la conmutativa del producto, de $\mu . 1 = \mu$ con $1 . \mu = 1$ se deduce $\mu = 1$. Pero aquí no podemos demostrar la ley cancelativa a partir de la ley modular porque en el conjunto de los enteros no se cumple la ley de inversión del producto.

8. **Productos de valor nulo.** — De la ley modular se deduce que para todo α es:

[3-24] $\alpha . 0 = 0$

es decir, *el producto de un número cualquiera por cero es cero.* En efecto, por las leyes modular y distributiva es

$$\alpha . \beta = \alpha(\beta + 0) = \alpha . \beta + \alpha . 0 \quad ,$$

de donde $\alpha . 0$ es módulo de $\alpha . \beta$ respecto de la suma, y por lo tanto $\alpha . 0 = 0$.

Por otra parte, mediante la ley general cancelativa de la multiplicación [3-12], se deduce que para $\alpha . \beta = 0 = \alpha . 0$, si $\alpha \neq 0$, ha de ser $\beta = 0$, es decir:

[3-25] $\qquad \alpha . \beta = 0 \quad \text{implica} \quad \alpha = 0 \quad \text{ó} \quad \beta = 0 \quad ,$

por tanto, *un producto no puede ser nulo sin serlo alguno de los factores.* Para expresar que el cero no tiene divisores simultáneamente no-nulos, se dice que el "cero no tiene divisores" (cfr. [5-7]).

La ley general cancelativa de la multiplicación [3-12] puede demostrarse partiendo de [3-25], mediante las demás leyes formales y por tanto dentro del marco de éstas, [3-12] y [3-25] resultan equivalentes. En efecto, de $\alpha\beta = \alpha\gamma$ con $\alpha \neq 0$ se deduce $\alpha\beta + \alpha(-\gamma) = \alpha\gamma + \alpha(-\gamma)$ y por [2-12], ley modular y [3-24] se obtiene $\alpha[\beta + (-\gamma)] = \alpha[\gamma + (-\gamma)] = \alpha \; 0 = 0$, la que aplicando [3-25] da $\beta + (-\gamma) = 0$, pues $\alpha \neq 0$, de donde $\beta + [(-\gamma) + \gamma] = 0 + \gamma = \gamma$, es decir $\beta + 0 = \beta = \gamma$, como queríamos demostrar.

9. **Regla de los signos y de la desigualdad.** — Mediante la definición de números opuestos (§ 3-6) y las leyes formales, se demuestran como teoremas las *reglas de los signos*:

$$(+ . + = + \quad ; \quad + . - = - . + = - \quad ; \quad - . - = +).$$

Demostremos por ejemplo la última, anteponiendo como lema la ley distributiva de la diferencia $(\alpha - \beta)\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma$, pues es

$$(\alpha - \beta)\gamma + \beta\gamma = (\alpha - \beta + \beta)\gamma = (\alpha + 0)\gamma = \alpha\gamma .$$

Entonces, resulta

$$(-\alpha)(-\beta) = (0 - \alpha)(0 - \beta) = (0 - \alpha) . 0 - (0 - \alpha) . \beta =$$
$$= 0 - (0 . \beta - \alpha\beta) = -(0 - \alpha\beta) = + \alpha\beta \quad ,$$

como queríamos demostrar.

La definición [3-11] equivale a la siguiente *regla general de desigualdad*: Es $\alpha > \beta$ cuando y sólo cuando $\alpha - \beta$ es positivo $(\alpha - \beta > 0)$.

10. **Representación gráfica.** — Los números enteros [3-21] se pueden representar por puntos de una recta, en la siguiente

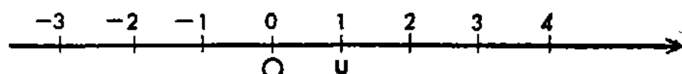


Fig. 10. — Si a partir del origen O transportamos sucesivamente la unidad $\mu = OU$ en el sentido del eje, obtendremos ciertos puntos que haremos corresponder con los números positivos 1, 2, 3, ... Transportando la misma unidad en sentido contrario, obtendremos la representación de los números negativos.

forma: Se fijan arbitrariamente sobre la recta un *punto origen* O (punto 0) y un *punto unidad* U (punto 1), quedando así determinada la *unidad de medida* u y el *sentido positivo* sobre la recta; se suele tomar U a la *derecha* de O y entonces el sentido positivo es el que va de izquierda a derecha (fig. 10). A esto se le llama determinar un *sistema de abscisas*.

Entonces, un número a es *menor* que otro b, si el punto a está a la *izquierda* del punto b.

11. **La facultad de abstracción.** — La dificultad de desarrollar en el hombre su facultad de abstracción (que con la facultad de razonamiento constituye uno de los principales objetivos *formativos* en la enseñanza de la Matemática) lo prueba la historia del cero y del número negativo. La palabra cero (de origen árabe: *sifr* = vacío) fué introducida hacia fines del siglo XV, y el uso del cero como *número* se aceptó sólo desde el siglo XIII por LEONARDO DE PISA (también llamado FIBONACCI); éste lo tomó de la escuela arábiga española, cuyo representante más prominente era JUAN DE SEVILLA. Los hindúes, en su célebre numeración decimal, usaban el cero como hueco, lo que ya representa el avance formidable de representar la *nada* (o *ausencia* de unidades) por un símbolo; es oportuno señalar que a esto llegaron también los mayas en su notable sistema de numeración vigesimal.

Y hasta el siglo XVII no fueron aceptados sin discusión los números negativos; los griegos nunca consideraron como solución de un problema una cantidad negativa o irracional.

Aun las mismas "fracciones" no eran números para los matemáticos griegos, sino "razones de números". Sin embargo el *logístico* = hábil calculador entre los griegos, o *escriba* entre los egipcios, persistía en "calcular" profesionalmente con las "fracciones" como si fuesen "números" sin preocuparse de justificar lógicamente sus reglas de cálculo e indiferente a las críticas irónicas de PLATÓN.

Por otra parte, muchas discusiones modernas sobre fundamentación matemática tienen el mismo origen; toda abstracción es en sí misma una fuente de contradicciones: su depuración es larga y difícil, pues las ideas tardan siempre en madurar. Muchas definiciones que se han dado de conceptos ahora perfectamente claros, son las mismas que hoy día nos hacen estremecer cuando las escuchamos de algún alumno.

EJERCICIOS

1. Efectuar las demostraciones completas de los teoremas que se han enunciado.

2. Decir cuáles de las siguientes operaciones binarias entre enteros son asociativas, y cuáles conmutativas:

$$a - b, \quad a^2 + b^2, \quad \tfrac{1}{2}(a + b), \quad -a - b.$$

3. Dadas las desigualdades $2a < b < 3b$, y $0 < c - a < d - b < a$, formar con los números $a, b, c, d, 2a, a + b, a + d, c - a$ y $d - b$ una sucesión monótona. Intercalar en ella otros números; por ejemplo: $2d$, $b + c - a$.

4. Respecto a la sucesión monótona buscada en el ejercicio anterior, ver qué podría afirmarse en el caso de ser $2a < b < 3b$ y $c - a < d - b < a < 0$.

5. Si en los axiomas de PEANO que introducen el número natural (§ 2-2, *a*), se sustituye "natural" N por "entero" E, el axioma III por el **axioma III'**: *Cada número entero es el siguiente de algún otro entero*

(Si $x \varepsilon$ E, existe un pr $x \varepsilon$ E, tal que sg (pr x) $= x$), y el axioma V por el teorema de recurrencia entera (§ 3-6, *c*) tomado como axioma V', desarróllese una teoría análoga a la del § 2, demostrando que el concepto de número así obtenido es isomorfo (§ 3-5) con el estudiado en este § 3. (Ver A. LOEWY: *Lehrbuch der Algebra*, Leipzig, 1915).

§ 4. SÍMBOLOS NUMÉRICOS Y OPERATORIOS. POLINOMIOS

1. **Símbolos numéricos.** — El sistema de reglas y convenios mediante los cuales se logra representar todos los números, valiéndose de signos o *cifras* (o varias palabras), combinados convenientemente, se llama *numeración*. (Véase nota II).

Estos signos, escritos o verbales, sólo son representaciones o expresiones de los entes abstractos que hemos llamado *números;* sin embargo, para abreviar el lenguaje, suele llamarse también *números* a estos signos.

La Aritmética decimal o vulgar estudia los números mediante su expresión decimal en cifras. Por el contrario, la Aritmética universal no necesita de ningún sistema de numeración para estudiar las propiedades generales de los números, y designa a éstos por letras: *a, b, c, ...* De este modo, no fijándonos en un caso particular, las demostraciones serán válidas, cualesquiera sean los números representados por estas letras.

Cuando las letras del abecedario no son suficientes, o conviene conservar cierto paralelismo entre dos clases de números, se acude a las letras griegas. He aquí su equivalencia con las del abecedario.

Figura	*Nombre*	*Equivalencia*	*Figura*	*Nombre*	*Equivalencia*
A α	Alfa	A	N ν	Nu	N
B β	Beta	B	Ξ ξ	Xi	X
Γ γ	Gamma	G	O o	Omicron	O breve
Δ δ	Delta	D	Π π	Pi	P
E ε	Epsilon	E breve	P ρ	Rho	R
Z ζ	Dseta	Z	Σ σ	Sigma	S
H η	Eta	E larga	T τ	Tau	T
Θ θ	Theta	Th (t)	Y υ	Ypsilon	Y
I ι	Iota	I	Φ φ	Phi	Ph (f)
K κ	Kappa	K	X χ	Ji (chi)	Ch (c)
Λ λ	Lambda	L	Ψ ψ	Psi	Ps
M μ	Mu	M	Ω ω	Omega	O larga

2. **Monomios.** — *a*) Si un producto se compone de α factores, todos iguales a a, se llama *potencia del número* a, y se representa más brevemente por a^α; a se llama *base*, y α, *exponente*.

b) Las propiedades conmutativa [2-14] y asociativa [2-13], aplicadas a este caso, demuestran:

TEOR.: *Para multiplicar varias potencias del mismo exponente, se multiplican las bases, conservando el mismo exponente.*

c) Se llama *monomio* o *expresión monomia* a la compuesta con varios números mediante la operación única de multiplicar. Cuando hay factores numéricos conocidos se efectúa su producto, y este número k llamado *coeficiente*, suele colocarse delante en la forma siguiente:

[4-1] $$k . a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}.$$

Se llama *grado* de un monomio al número total de factores literales que contiene; por ej.: $2\,a^5$ es de grado 5.

Ejemplos de monomios de grados 3, 4 y 7:

$$11\,p\,q\,r, \qquad -5\,a^2\,b\,d, \qquad 7\,x\,y^3\,z\,t^2.$$

3. **Símbolo** Π. — Cuando los factores de un producto son números que se deducen de una expresión única, en la cual figura un número determinado i, dando a éste valores sucesivos (por ejemplo: $i = 3$, $i = 4$, $i = 5$, $i = 6$), el producto se representa más brevemente, utilizando el signo *pi mayúscula* (que se lee *producto de*), antepuesto a dicha expresión, y escribiendo debajo y encima los valores extremos que toma dicho número i. Así, por ejemplo:

$$\prod_{i=1}^{7} i^3 = 1^3 . 2^3 . 3^3 . 4^3 . 5^3 . 6^3 . 7^3$$

$$\prod_{h=3}^{6} 2\,h = 2 . 3 . 2 . 4 . 2 . 5 . 2 . 6$$

$$\prod_{j=4}^{n} a_j = a_4\, a_5\, a_6 \ldots a_n.$$

El producto de los n números naturales podría representarse mediante este símbolo, pero como se presenta con gran frecuencia en los cálculos (principalmente en la Combinatoria), se suele designar por una notación especial, que consiste en encerrar el último factor n en un ángulo recto, o en agregarle el signo ! así: $\underline{|n}$ o $n!$, y se lee *factorial de n.*

Por ejemplo:

$$\underline{|8} = 8! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 .$$

Por comodidad tipográfica se usa, preferentemente, la segunda notación; pero cuando el factorial se refiere a un número resultado de alguna operación, habrá que encerrar a éste entre paréntesis. Por ejemplo: $(2 . 3)!$

4. **Símbolo** Σ. — Cuando los sumandos de una suma se deducen todos de una misma expresión, dando valores sucesivos

a un número indeterminado que en ella figura, se representan abreviadamente, escribiendo delante de dicha expresión el símbolo de sumación *sigma*, poniendo debajo y encima del mismo los valores primero y último que toma dicho índice. Por ejemplo, la suma de los cubos de los veinticinco primeros números naturales, la suma de los cinco primeros números pares que siguen al 4, la suma de los ocho primeros números impares que siguen al 3, se representarán, respectivamente, así:

$$\sum_{n=1}^{25} n^3, \qquad \sum_{i=3}^{7} 2i, \qquad \sum_{h=2}^{9} (2h+1)$$

A veces se usa el signo de sumación en un sentido más general, para representar la suma de todos los valores que toma una expresión, cuando varios índices que en ella figuran cumplen condiciones determinadas; por ejemplo:

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=3} a^\alpha b^\beta c^\gamma = a^3 + a^2b + a^2c + ab^2 + abc + ac^2 + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3$$

$$\sum_{\alpha=1,\ \beta=2}^{3,4} a^\alpha b^\beta = ab^2 + ab^3 + ab^4 + a^2b^2 + a^2b^3 + a^2b^4 + a^3b^2 + a^3b^3 + a^3b^4$$

5. **Producto de potencias de igual base.** — Por definición:

$$a^\alpha a^\beta \dots a^\lambda = \overbrace{(a\,a \dots a)}^{\alpha} \overbrace{(a\,a \dots a)}^{\beta} \dots \overbrace{(a\,a \dots a)}^{\lambda} =$$

[4-2] $$= \overbrace{a\,a \dots\dots\dots\dots a}^{\alpha+\beta+\dots+\lambda} = a^{\alpha+\beta+\dots+\lambda}.$$

En particular, si todos los exponentes son iguales,

[4-3] $$(a^\alpha)^n = a^\alpha a^\alpha \dots a^\alpha = a^{\alpha+\alpha+\dots+\alpha} = a^{n\alpha}$$

Así establecemos los teoremas:

TEOR. 1: *Para multiplicar varias potencias de la misma base, se conserva ésta y se suman los exponentes.*

TEOR. 2: *Para elevar al exponente n una potencia de exponente α, se multiplican los dos exponentes.*

Resulta de aquí: $(a^\alpha)^n = (a^n)^\alpha = a^{\alpha n}$; expresiones que no deben confundirse con estas otras, las cuales suelen escribirse suprimiendo los paréntesis:

[4-4] $$a^{(\alpha^n)} = a^{\alpha^n}, \qquad a^{(n^\alpha)} = a^{n^\alpha}.$$

Con tres cifras puede escribirse el número 9^{9^9} (mayor que el $(9^9)^9 = 9^{81}$), imposible prácticamente de expresar en numeración decimal ordinaria, teniendo más unidades que número de átomos se cree existen en el Universo.

6. Supresión de paréntesis. — Hasta ahora hemos introducido los signos operatorios +, — y . ; las operaciones $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, representan la suma, la diferencia y el producto de los números a y b. Cuando con estos resultados y otros números se efectúan nuevas adiciones, sustracciones y multiplicaciones, es preciso encerrar aquéllos entre paréntesis, para indicar que es el resultado, y no los datos, lo que se somete a las nuevas operaciones. Cada paréntesis equivale, pues, a una sola letra; y el cálculo de una expresión se efectúa, sin ambigüedad, mediante operaciones sucesivas entre dos datos.

Para simplificar la escritura, sin perder nada en precisión, se hacen los siguientes convenios, alguno de los cuales ya hemos aplicado.

1º Cuando las operaciones efectuadas son multiplicaciones solamente, o sólo adiciones, en cualquier orden, se suprimen todos los paréntesis. Por ejemplo:

$$[(m+n)+p]+(r+s) = m+n+p+r+s.$$

2º Cuando a la suma (o diferencia) de dos números, $a \pm b$, se suma (o resta) c, al resultado se suma (o resta) d, al resultado se suma (o resta) otro numero, etc., se suprimen todos los paréntesis, conservando el mismo orden de los datos. Por ejemplo:

$$[((a - b) - c) + d] - e = a - b - c + d - e.$$

Recíprocamente, dada una expresión de la forma $a \pm b \pm \ldots \pm l$, habrán de efectuarse las operaciones, sucesivamente, en este mismo orden.

3º Dados varios números, por ejemplo: a, b, c, d, si elevamos al exponente a el número b, después elevamos c al resultado obtenido b^a, y por último elevamos d al resultado anterior, en vez de escribir:

$$d^{\left(c^{\left(b^{a}\right)}\right)}, \quad \text{pondremos, simplemente:} \quad d^{c^{b^{a}}}$$

En cambio, el resultado de las operaciones:

$$\left(\left(d^c\right)^b\right)^a, \quad \text{en virtud de [4-3] es:} \quad d^{c\,b\,a}.$$

De la supresión de paréntesis en las expresiones compuestas de adiciones, sustracciones y multiplicaciones, nos ocupamos en los párrafos siguientes.

7. Polinomios. — Cuando varios números están sometidos a operaciones enteras: suma, resta y multiplicación (§ 3-6, b), la expresión se llama *entera.* Toda expresión entera puede reducirse a un monomio o a una suma de monomios, que llamaremos *expresión polinómica,* o simplemente *polinomio.* Ejemplos:

$(x^2 - 2x) \,.\, (3x^3 - x^3) = (2x^5) + (-4x^4),$
$(x^2 - 2) \,.\, 2y = (2x^2 y) + (-4y).$

Cada monomio de la suma se llama *término* del polinomio.

Hemos llamado (§ 4-2) *grado* de un monomio al número de factores literales que lo forman, o sea, a la suma $\alpha + \beta + \ldots + \lambda$ de los exponentes de todas sus letras.

Grado de un polinomio se llama al mayor de los grados de sus términos; y un polinomio se llama *homogéneo*, cuando todos sus términos son de igual grado. El trinomio $(3x^3) + (-5x^2y) + (-7y^3)$ es homogéneo de tercer grado. Los polinomios homogéneos reciben a veces el nombre de *formas*.

Los polinomios de primer grado se llaman también *lineales* (porque en Geometría analítica sirven para representar rectas). Por ejemplo, son lineales:

$$2y + x + 1;\ m + (2p) + q;\ x + y + (-z) + t.$$

En la notación de los polinomios podemos suprimir los paréntesis interiores de cada monomio; convendremos, además, en omitir el paréntesis que encierra cada monomio y operar con los signos, escribiendo así: $2x^2y - 4y$, pero este binomio es siempre una *suma* de monomios con coeficientes 2 y -4. Con este convenio, dada una sucesión de números ligados por los signos $+$, $-$, . , cada signo $+$ o $-$ representará la adición o sustracción, no del número siguiente, sino del producto obtenido multiplicando todos los números siguientes, hasta el próximo signo $+$ o $-$. Si no hiciéramos explícitamente este convenio, el significado natural de la expresión anterior sería este otro: $(2x^2y - 4)y$.

8. **Producto de dos sumas.** — *a*) Aplicando la propiedad distributiva obtenemos los teoremas: a_1) *El producto de dos sumas*

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)\,(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

es igual a la suma de todos los productos obtenidos multiplicando cada término de la primera por cada uno de la segunda.

a_2) *El producto de dos sumas cuyos números de sumandos son m y n, respectivamente, tiene m n términos.*

En particular se tiene:

[4-5] $$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 + 2\,(a_1 a_2 + \ldots + a_1 a_m + a_2 a_3 + \ldots + a_2 a_m + \ldots + a_{m-1} a_m),$$

es decir, queda demostrado el teorema:

a_3) *El cuadrado de una suma es igual a la suma de los cuadrados de todos los sumandos, más el duplo de los productos binarios de éstos.*

b) Empleando el símbolo Σ, se abrevia notablemente la expresión del producto de dos sumas:

[4-6]

Los paréntesis pueden omitirse sin inconveniente y el orden de las dos *sigmas* puede invertirse, sin alterar el resultado.

Finalmente, observaremos que la suma de los términos del producto puede hacerse en cualquier orden, dando a los índices i, j del término general $a_i\ b_j$ todos los valores de 1 a m y de 1 a n, respectivamente, combinando cada uno en i con todos los de j; esta suma suele expresarse así:

$$\sum_{i=1,\ j=1}^{m,\ n} a_i\ b_j$$

y se llama *suma doble.*

9. **Producto de varias sumas.** — *a*) Para efectuar el producto $(a_1+a_2+\ldots+a_m)\ \ (b_1+b_2+\ldots+b_n)\ \ (c_1+c_2+\ldots+c_p)\ldots\ \ (f_1+f_2+\ldots+f_r)$ se aplican los siguientes teoremas de demostración inmediata:

a_1) *El producto de varias sumas es la suma de todos los productos que se pueden formar tomando como factor un término de cada una de las sumas.*

a_2) *El número de los términos del producto es el producto de los números de términos de las diversas sumas.*

b) Utilizando el símbolo de sumación, puede expresarse en fórmulas el teorema a_1. Limitándonos, por brevedad, a considerar tres sumas, resulta, suprimiendo los paréntesis:

[4-7] $$\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=1}^{p} c_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i\ b_j \sum_{k=1}^{p} c_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i\ b_j\ c_k = \sum_{i=1,\ j=1,\ k=1}^{m,\ n,\ p} a_i\ b_j\ c_k.$$

Esta última expresión da los términos del producto en cualquier orden; la anterior los ordena respecto de las a, de las b y de las c.

10. **Casos notables.** — He aquí algunos, que el lector puede enunciar como teoremas:

$$(a+b)\ (a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)\ (a^2 - a\,b + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)\ (a^2 + a\,b + b^2) = a^3 - b^3$$

y en general:

[4-8] $$(a-b)\ (a^{k-1} + a^{k-2}\,b + \ldots + a\,b^{k-2} + b^{k-1}) = a^k - b^k.$$

Siendo $a > b > 0$, de esta última igualdad se deduce esta desigualdad notable:

[4-9] $$k\ (a-b)\ b^{k-1} < a^k - b^k < k\ (a-b)\ a^{k-1}$$

11. **Valor numérico de un polinomio.** — La expresión general de un polinomio de grado k con una sola variable x, es:

[4-10] $$y = a_0\,x^k + a_1\,x^{k-1} + a_2\,x^{k-2} + \ldots + a_{k-1}\,x + a_k$$

y es frecuente el problema de calcular el valor numérico $y = \beta$ que éste toma, cuando a x se atribuye un valor conocido $x = \alpha$.

Si hiciéramos este cálculo por el camino que parece natural, esto es, calculando separadamente las potencias $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^k$, multiplicándolas por los coeficientes respectivos, y luego efectuando las sumas y restas de los monomios, el número total de operaciones efectuadas sería $2k - 1$ multiplicaciones y k adiciones o sustracciones. Se reduce a k el número de multiplicaciones, sacando factores comunes en la forma siguiente:

$$\beta = \left\{ [(a_0 \alpha + a_1) \alpha + a_2] \alpha + a_3 \ldots \right\} \alpha + a_k,$$

es decir, calculando sucesivamente estos números:

[4-11] $a_0 \alpha + a_1 = p_1, \quad p_1 \alpha + a_2 = p_2, \quad \ldots, \quad p_{k-1} \alpha + a_k = \beta;$

y observando que cada uno de estos números resulta de multiplicar el anterior por α y sumarle el coeficiente siguiente, resulta demostrada como teorema esta regla práctica:

Para calcular el valor numérico de un polinomio, cuando se da a la variable x el valor de α, se multiplica por éste el coeficiente del término de grado k; al número obtenido se le suma el coeficiente del término de grado $k - 1$; el resultado se multiplica por α; se suma el tercer coeficiente, etc.; hasta llegar a sumar, finalmente, el término a_k independiente de x.

Ejemplo: Calcular para $x = 5$ el valor numérico de $x^5 + 3x^3 + x^2 + 7$. Dispondremos el cálculo así:

	1	0	3	1	0	7
		5	25	140	705	3525
5)	1	5	28	141	705	3532

En el § 16-5 veremos que esto es sólo la aplicación de la regla de Ruffini, o ley de cocientes, para efectuar la división del polinomio dado [4-10] por $x - \alpha$.

Ejercicios

1. Efectuar la demostración completa de los teoremas que se han enunciado.

2. Reducir a una base común cada uno de los productos:

$$(-a)^{2n} \cdot a, \quad (-a)^{2n} \cdot (-a), \quad q^{2n} \cdot q^{3-n}, \quad 8x^7 \cdot 5x^4 \cdot 9x.$$

3. Simplificar: $(-a^3)^{2n}$, $(-a^{2n})^3$, $(7a^2 x^{n-1} y^r)^3$, $(a^3 x^4)^4/(a x)^{10}$ $(a^2)^3$ $(b^3)^2/(a b)^5$, $(2^3)^5/4^4$, $(3^8)^5/27^{13}$, $(8^2 5^3)^3/20^9$.

4. En caso necesario, corríjase el segundo miembro de: $3^2 \cdot 3^3 = 9^5$ $3^8/3^2 = 3^4$, $3^2 + 3^3 = 6^5$, $6^3/2^3 = 3^3$, $3^2 \cdot 3^3 = 3^6$.

5. Demostrar que si $a \neq b$, es $(a + b)^2 > 4ab$.

6. Descomponer en dos factores cuadráticos $(a^2 + b^2)^2 - a^2 b^2$.

7. Desarrollar: $\sum_{m+n=6} (m^2 - n^2)\, a^m b^n$; $\sum_{m+n=7} (-1)^m a^m/b^n$;

$\sum_{p=3}^{19} (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} x^p/p^2$ (p primo).

8. Desarrollar: $\sum\limits_{m=2}^{4} \sum\limits_{n=4}^{7} (-1)^{m+n} \dfrac{x^m y^n}{m+n}$

9. Desarrollar:

$$\prod_{n=0}^{9} \left[\frac{x^n}{2a} + (-1)^n b^{n(n-1)} \right] ; \quad \prod_{n=3}^{6} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]$$

10. Expresar simbólicamente: $1 - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} - \dfrac{1}{7^2} + \dfrac{1}{9^2}$;

$$\frac{1}{3.4.10} - \frac{2}{5.6.16} + \frac{3}{7.8.22} - \frac{4}{9.10.28}.$$

11. Expresar simbólicamente:

$$\begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} + \\ + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} + \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ + a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn}. \end{array} \qquad \begin{array}{l} \dfrac{a^5}{b^3} - \dfrac{a^6}{b^3} + \dfrac{a^7}{b^3} - \dfrac{a^8}{b^3} - \\ - \dfrac{a^5}{b^4} + \dfrac{a^6}{b^4} - \dfrac{a^7}{b^4} + \dfrac{a^8}{b^4} + \\ + \dfrac{a^5}{b^5} - \dfrac{a^6}{b^5} + \dfrac{a^7}{b^5} - \dfrac{a^8}{b^5}. \end{array}$$

12. Expresar simbólicamente:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \operatorname{tg}\frac{x}{4} \operatorname{tg}\frac{x}{8} \operatorname{tg}\frac{x}{16} \operatorname{tg}\frac{x}{32} ; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(\frac{6}{5}\right)^4 \left(\frac{8}{6}\right)^5 \left(\frac{12}{11}\right)^6 .$$

13. Si $P(x)$ es un polinomio en x con coeficientes enteros, y son $P(0)$ y $P(1)$ impares, demostrar que $P(x)$ no puede anularse para ningún valor entero de x.

14. Valor numérico de $x^7 + 3x^6 + 73x^4 - 25x^3 - x$ para $x = -2$.

§ 5. Divisibilidad numérica

1. **División entera.** — Si se reparten $a = 17$ vacas entre $b = 5$ personas, corresponden $q = 3$ vacas a cada una, pues 3 es el mayor entero, cuyo producto por 5 no supera a 17, y sobran $r = 17 - 5.3 = 2$ vacas. Este resto se toma no negativo y, además, < 5, pues si fuera $\geqq 5$, se podría seguir repartiendo vacas. Como el número a de vacas por repartir puede ser también negativo (deuda), vemos la oportunidad de la siguiente definición:

DEF.: *Dividir el entero a (dividendo) por el entero positivo b (divisor) es encontrar dos enteros q (cociente: positivo, nulo o negativo) y r (resto: no negativo) siempre determinados unívocamente* (como demostraremos a continuación), *tales que*:

[5-1] $$a = bq + r \quad con \quad 0 \leqq r < b.$$

La división entera suele indicarse con el esquema

[5-2] $$\begin{array}{c|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

utilizado en la práctica de la operación.

Situemos sobre la recta los múltiplos $c\,b$ de b (fig. 11), obtenidos multiplicando b por cada uno de los enteros [3-21]. El conjunto de los múltiplos de b comprende siempre el 0, pero sólo es parte del conjunto [3-21] de los enteros, si $b \neq 1$. Entonces, efectuar gráficamente la ope-

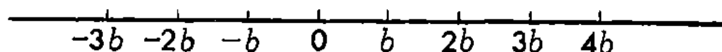


Fig. 11.

ración [5-1] es encontrar en cuál de los intervalos iguales en que la recta queda dividida por dichos múltiplos $c\,b$ (fig. 11) está el punto a, de modo que:

[5-3] $$b\,q \leqq a < b\,(q+1).$$

Esto es posible, por ser (§ 3-4):

$$-\mid a \mid . b \leqq a \leqq \mid a \mid . b.$$

De aquí y el principio del número mínimo (§ 2-7), se obtiene, lógicamente, [5-3]. De [5-3] se deduce que el resto, $r = a - b\,q$, es menor que el divisor, según indica la desigualdad en [5-1].

Al resto, r, se le llama también *resto por defecto*, correspondiente al *cociente por defecto*, q. En cambio, escribiendo [5-1] así:

[5-4] $$a = b\,.(q+1) - (b - r) = b\,.(q+1) - r' \quad ,$$

se obtiene el *cociente por exceso*, $q+1$, y el *resto por exceso*

[5-5] $$r' = b\,.(q+1) - a \quad ,$$

tal que cumple

[5-6] $$r + r' = b.$$

Si el resto r es nulo, resulta a "múltiplo" de b, y también se dice que a es "divisible" por b, o que b es "submúltiplo", "divisor" o "factor" de a, o bien que b "divide" a a, todo lo cual se expresa mediante el símbolo $b \mid a$, o la notación $a = \dot{b}$. Por lo tanto, $b \mid a$ *cuando, y sólo cuando, existe un entero* d *tal que* $a = bd$.

2. **Divisibilidad y orden parcial.** — a) Un teorema más profundo de lo que parece a primera vista es el siguiente:

Los únicos divisores de 1 *son* $\pm$ 1.

En efecto, si $a\,.\,b = 1$, ni a ni b son nulos (§ 3-8), y por la regla de los signos (§ 3-9) es $|a|\,.\,|b| = 1$; entonces, si fuese por ejemplo $1 < |a|$, resultaría por la ley de monotonía de la multiplicación [3-13] que $0 < |b| < |a|.|b| = 1$; así, el teorema dado queda reducido por el absurdo a probar que entre 0 y 1 no hay números enteros, cosa que ya sabemos (§ 3-6, b).

Todo entero a es divisible por a, $-a$, $+1$ y -1. Esta observación da lugar a las dos siguientes definiciones:

a_1) *Un entero, p, se llama primo si, siendo distinto de* 0 *y* $\pm$ 1, *es divisible solamente por* $\pm$ 1 *y* $\pm p$.

a_2) *Dos enteros, a y b, se llaman asociados si se verifica a la vez* $a \mid b$ *y* $b \mid a$. *Se llama unidad a un asociado de* 1.

Fácil es ver que dos números son asociados cuando, y sólo cuando, $\mid a \mid = \mid b \mid$, volviendo a encontrar así la definición del

§ 3-6, *a*. Por lo tanto, las unidades en la teoría de la divisibilidad y en el dominio de los enteros, que ahora estudiamos, son ± 1.

La relación que liga a los números asociados es una relación de equivalencia (§ 1-5) (verifíquese), y emplear uno u otro en la teoría de la divisibilidad significa considerar o prescindir de los factores ± 1.

NOTA: En lo sucesivo tomaremos de entre dos números asociados el *positivo* como representante de la clase (§ 1-5) que ambos forman.

b) La relación de divisibilidad goza de las propiedades de un orden parcial (§ 2-7, Nota 1), si se toman como equivalentes los números asociados, pues cumple los teoremas, fácilmente demostrables (hágase):

1) *Ley transitiva*: *De* $c \mid b$ y $b \mid a$ se deduce $c \mid a$;
2) *Ley reflexiva*: $a \mid a$;
3) *Ley asimétrica*: De $a \mid b$ y $b \mid a$ se deduce $|a| = |b|$.



Fig. 12.

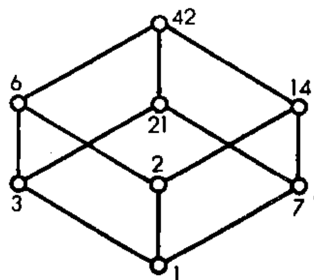


Fig. 13.

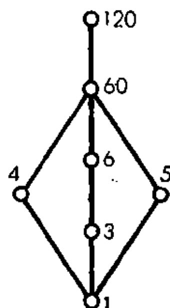


Fig. 14.

Este orden parcial da origen a una jerarquía, para la relación de divisibilidad, que tiene cierta analogía con un árbol genealógico. Para resaltarla, modernamente se usa el llamado *diagrama de* HASSE, referido a un conjunto dado, A, de enteros, y que tiene también otras importantes aplicaciones (véase nota I).

Si ambos enteros $b \mid a$ pertenecen al conjunto A, y en éste existe otro entero *d*, tal que $b \mid d \mid a$, entonces se dice que *d* es un *divisor intermedio* entre *b* y *a*. En el caso de que en el conjunto A no existan divisores intermedios entre *b* y *a*, se dice que *a* es *múltiplo inmediato* de *b* en A.

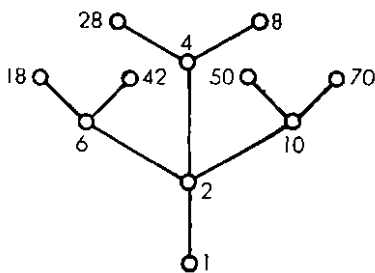


Fig. 15.

Con estas definiciones, el diagrama de HASSE de un conjunto A de enteros se construye según las siguientes reglas:

1) Cada entero se representa por una marca llamada *afijo*, tal como un circulito o.

2) Los afijos de los enteros *a* y *b* están ligados por un segmento cuando, y sólo cuando, *a* es múltiplo inmediato de *b* en el conjunto A.

3) Si *a* es múltiplo inmediato de *b*, el afijo de *a* se dibuja *encima* del afijo de *b*.

Con estas reglas se dibujan los diagramas de HASSE de los conjuntos de enteros que aparecen en las figuras 12 a 15.

Se reconoce que el entero *b* divide al *a*, cuando, y sólo cuando, es

posible ligar uno al otro mediante una línea poligonal formada de segmentos ascendentes. Así, en la figura 13 se puede ligar 1 a 42 por seis caminos distintos.

Estos diagramas de HASSE se aplican análogamente a conjuntos finitos en los que se ha establecido determinada relación de orden parcial.

Respecto al conjunto de todos los números enteros, se dice que 1 es el *primer divisor* y 0 es el *último divisor,* porque se cumple:

[5-7] $1 \mid a \mid 0$ para todo entero a.

En la relación de orden parcial establecida por la inclusión ($\leqq$) entre conjuntos (§ 2-7, ej. 6), el conjunto vacío (§ 1-1) ocupa posición análoga a la de la unidad en la relación de divisibilidad.

c) La relación "$\leqq$" entre los enteros positivos es más restrictiva que la "$|$", porque aquélla no implica ésta, y en cambio se cumple el teorema:

TEOR.: *Si* $a \neq 0$ *no es asociado a* b *y* $b \mid a$, *entonces es* $|b| < |a|$.

DEM.: Podemos suponer a y b positivos (§ 5-2, Nota). Si $a = b \cdot c > 0$, será $c > 0$ por la regla de los signos (§ 3-9). Si fuese $a < b$, por la ley de monotonía de la multiplicación [3-13] quedaría $a.c < b.c = a$, de donde $c < 1$, pues si fuese $c \geqq 1$, por la misma [3-13] sería $a.c \geqq a$. Es decir, es absurdo suponer $a < b$, pues entonces existiría un entero c tal que $0 < c < 1$, lo que ya hemos visto es imposible (§ 3-6, *b*). Por no ser a asociado a b, debe cumplirse $|b| < |a|$, como queríamos demostrar.

3. **La divisibilidad con respecto a la adición y a la sustracción.** — La suma o diferencia de dos múltiplos de a es también múltiplo de a, es decir, la clase A de los múltiplos de a contiene, con cada dos de sus elementos, su suma y su diferencia. Aun más: en el dominio de los enteros, que actualmente estudiamos, se cumple la propiedad recíproca de la anterior, lo que constituye el *teorema fundamental de la divisibilidad,* que ahora demostraremos.

Un conjunto A de enteros no vacío se dice que forma un *grupo aditivo* * si es *cerrado* respecto a la adición y la sustracción (§ 2-4, *a*), es decir, si A contiene la suma $a + b$ y la diferencia $a - b$ de cualquier par de enteros a y b pertenecientes al conjunto A.

Veremos justificado más adelante (§ 5-12), el empleo de la palabra "grupo" para designar tal conjunto.

EJEMPLO: Todos los números pares forman grupo aditivo, no así los impares.

Entonces el teorema fundamental de la divisibilidad se enuncia así:

TEOR.: *Todo grupo aditivo de enteros está formado, ya sea por cero solamente, ya sea por todos los múltiplos de un entero positivo* b.

En efecto, si el grupo aditivo B considerado tiene un elemento $a \neq 0$, contiene la diferencia $a - a = 0$, así como el opuesto $-a = 0 - a$, y

* Tales conjuntos fueron llamados *módulos de números* por DEDEKIND y KRONECKER.

por tanto existe por lo menos un entero positivo $|a| = \pm a$ en B. Por el principio del número mínimo (§ 2-7) habrá en B un mínimo entero positivo b. Por inducción completa (§ 2-2), resulta entonces que pertenecen también a B todos los múltiplos positivos de b, y por [3-19], también los negativos. Recíprocamente, cualquier elemento a perteneciente a B es múltiplo de b, ya que al aplicar la división entera [5-1], el resto $r = a - b\,q$ debe pertenecer a B, y por ser b el mínimo entero positivo de B, será $r = 0$, y por lo tanto, $a = b\,q$ es un múltiplo de b, como queríamos demostrar.

4. **La divisibilidad respecto a la multiplicación.** — La relación de divisibilidad cumple, respecto de la multiplicación, los siguientes teoremas:

TEOR. 1. *De $b|a$ se deduce $(bc)|(ac)$ para todo entero c.*

Más generalmente puede formularse este teorema para la *división entera* (§ 5-1), diciendo que *si el dividendo y el divisor se multiplican por un mismo número positivo, el cociente no varía y el resto queda multiplicado por este número,* pues de [5-1] se deduce, si $c > 0$:

[5-8] $$ac = (bc)q + rc, \qquad 0 \leqq rc < bc.$$

TEOR. 2. *Si $c \neq 0$ y $(bc)|(ac)$, entonces $b|a$.*

En efecto, basta aplicar la ley general cancelativa de la multiplicación [3-12] a la hipótesis $ac = q.bc$.

TEOR. 3. *De $a|a'$ y $b|b'$ se deduce $(ab)|(a'b')$.*

En efecto, basta aplicar el teorema 1 reiteradamente, $(ab)|(a'b)$, $(a'b)|(a'b')$, y la propiedad transitiva de la divisibilidad (§ 5-2).

TEOR. 4. *Es siempre $a|(ac)$ para todo entero c.*

En efecto, basta aplicar el teorema 1 a $1|c$ con el factor a.

TEOR. 5. *Dos enteros a y b cualesquiera tienen siempre un múltiplo común c, que puede ser no nulo si no lo son ni a ni b.*

En efecto, basta tomar para c el entero ab.

El interés de este teorema está en mostrar por él que la divisibilidad tiene la propiedad de composición o dirección de MOORE-SMITH (§ 2-7, nota 2), y que por lo tanto, todos los números enteros forman un conjunto dirigido, respecto de la relación de divisibilidad.

5. **Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números.**

a) Dados dos números enteros, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, los números $\sigma a + \tau b$ para σ y τ enteros cualesquiera forman un grupo aditivo D (pruébese), que contiene los enteros $a = 1.a + 0.b$ y $b = 0\,a + 1.b$. Por el teorema fundamental de la divisibilidad (§ 5-3), todos los números $\sigma a + \tau b$ son los múltiplos del mínimo entero positivo contenido en D, que se designa

por (a, b), o mejor por $a \frown b$ (cfr. nota I). Esto quiere decir que (a, b) es divisor común de a y b, y que al existir s y t, tales que:

[5-9] $$a \frown b = s.a + t.b,$$

todo divisor común de a y b lo es de $a \frown b$.

Análogamente, el conjunto M de los múltiplos comunes de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ es un grupo aditivo (pruébese) y que por § 5-4, teor. 5, no es vacío. Por el mismo teorema fundamental de la divisibilidad (§ 5-3), su mínimo entero positivo, que se designa por $[a, b]$, o mejor por $a \smile b$ (cf. nota I), será múltiplo común de a y b, y además dividirá todo otro múltiplo común de a y b.

b) Así se introducen las nociones de *máximo común divisor* (m. c. d.) y *mínimo común múltiplo* (m. c. m.) de dos enteros, mediante las definiciones:

Un entero, d, es un m.c.d. *de los enteros a y b, si verifica las condiciones*:

D1) *d es un divisor común de a y b;*

D2) *cualquier divisor común de a y b es divisor de d.*

Un entero, m, es un m.c.m. *de los enteros a y b, si verifica las condiciones*:

M1) *m es un múltiplo común de a y b;*

M2) *cualquier múltiplo común de a y b es múltiplo de m.*

EJEMPLO: Un m. c. d. de 8 y 12 es 4; también lo es su asociado —4 (Ver § 5-2, nota). Según la definición, dos distintos m. c. d. deben ser asociados, y por tanto difieren sólo en el signo. Lo mismo ocurre en el caso del m. c. m.

Las consideraciones iniciales (*a*) demuestran los teoremas:

Respecto de dos enteros cualesquiera, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, existe siempre un único m. c. d. *positivo $a \frown b$, que puede expresarse por la combinación lineal* [5-9], *con coeficientes enteros s y t.*

Respecto de dos enteros cualesquiera, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, existe siempre un único m. c. m. *positivo $a \smile b$*

Diremos que dos enteros, *a* y *b*, son *primos entre sí*, cuando $a \frown b = 1$.

c) El orden parcial introducido (§ 5-2, *b*) mediante la relación de divisibilidad " | " es tal, que para cada par de enteros a y b existen siempre enteros $a \frown b$ y $a \smile b$ que satisfacen respectivamente las condiciones D 1), D 2) y M 1), M 2). Esta circunstancia se expresa diciendo que todos los enteros forman un *reticulado* (en inglés "*lattice*") respecto de la relación de orden parcial " | ", a la que también se da el nombre de *reticulado de la divisibilidad de los enteros*

Si en vez del conjunto de todos los enteros se consideran los conjuntos de enteros que aparecen en los diagramas de HASSE de las figuras 12 a 15, se ve que los tres primeros forman reticulado, no así el de la

figura 15, por faltarle un m a los pares con que da cima el diagrama (véase nota I)*.

6. El algoritmo de Euclides. — *a)* El siguiente teorema es de demostración inmediata:

En la división entera [5-1], *todo divisor común de a y b lo es también de b y r, y recíprocamente. Por tanto*:

[5-10] $$a \frown b = b \frown r.$$

En esta propiedad se basa un método constructivo para hallar el m. c. d. $a \frown b$. Podemos suponer que a y b son ambos positivos (§ 5-2, nota). Si uno de los enteros es cero, entonces $a \mid b = 0$, y $a \frown b = a$.

Supongamos, pues, que $a \geqq b > 0$. Si $b|a$, es $a \frown b = b$, por cumplir b las condiciones D1), D2) de la definición de m. c. d. (§ 5-5). Si así no es, se puede efectuar la división entera (§ 5-1):

[5-11] $$a = b \cdot q_1 + r_1, \qquad 0 < r_1 < b.$$

Reiterado el proceso para b y r_1, se sigue así sucesivamente:

[5-12] $$\begin{array}{ll} b = r_1 \cdot q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1; \\ r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2; \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}. & \end{array}$$

Al decrecer, uno tras otro, los restos sucesivos, r_i, por el principio del número mínimo (§ 2-7), ha de llegarse forzosamente a un último resto, $r_{n+1} = 0$, como indica la última igualdad [5-12].

El teorema [5-10] asegura entonces:

[5-13] $$a \frown b = b \frown r_1 = r_1 \frown r_2 = \dots = r_{n-1} \frown r_n = r_n,$$

por ser finalmente r_n divisor de r_{n-1}.

El anterior *algoritmo de* EUCLIDES, o *de las divisiones sucesivas,* suele aplicarse escribiendo los cocientes sucesivos sobre los respectivos divisores, para dar lugar a los nuevos restos, es decir:

[5-14]

		q_1	q_2	q_3	q_n	q_{n+1}
	a	b	r_1	r_2 .... r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
	r_1	r_2	r_3	r_n	0	

* Algunos autores (v. gr. B. L. VAN DER WAERDEN) designan también el mínimo *común* múltiplo de a y b por $[a \smile b]$, refiriéndose a que el conjunto de sus múltiplos es la intersección de los conjuntos de múltiplos de a y b. La notación aquí seguida, $[a, b]$ =

EJEMPLO:

	2	11	3	24
25 905	12 405	1 095	360	15
1 095	360	15	0	

m. c. d. $25\,905 \frown 12\,405 = 15.$

b) Mediante el algoritmo de EUCLIDES se prueba inmediatamente el siguiente teorema:

Si dos números, a y b, se dividen por un divisor común, h, el m. c. d. *queda dividido por este número h. En particular, los cocientes de dividir dos números por su* m. c. d. *son primos entre sí.*

La combinación lineal [5-9] puede encontrarse explícitamente, por expresión de los restos sucesivos, r_i, mediante a y b, en la forma:

$$[5\text{-}15]\qquad \begin{aligned} r_1 &= a - q_1.b = a + (-q_1).b, \\ r_2 &= b - q_2.r_1 = (-q_2).a + (1 + q_1 q_2).b, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned}$$

c) *La expresión* [5-9] es muy útil para demostrar fácilmente el siguiente *teorema de* EUCLIDES:

Si $c \mid (ab)$ y $c \frown a = 1$, entonces $c \mid b$ (*Un divisor de un producto de dos factores, primo con uno de ellos* (§ 5-5, *b*) *divide al otro*).

En efecto, por [5-9] es $1 = s.a + t.c$, de donde $b = s.a.b + t.c.b$. Como ambos sumandos del último miembro son divisibles por c, también lo es b, como queríamos demostrar.

d) Un método constructivo para hallar el m.c.m. de dos números, a y b, se funda en lo siguiente. Si $d = a \frown b$, será $a = d.a'$, $b = d.b'$, con $a' \frown b' = 1$ Formemos $m = d.a'.b'$, con lo que m cumple M 1) de § 5-5, *b*, al ser $a \mid m$ y $b \mid m$. Además, todo múltiplo común μ de a y b, por ser múltiplo de a es de la forma $\mu = \alpha.d.a'$, y al serlo también de b, quedará $\alpha.d.a' = \beta.b = \beta.d.b'$, es decir, $\alpha.a' = \beta.b'$. **De $a' \frown b' = 1$ y $b' \mid (\alpha\, a')$, por el teorema de** EUCLIDES deducimos $b' \mid \alpha$, es decir, $\alpha = k.b'$. En definitiva, queda $\mu = k.d.a'.b' = k.m$, es decir, m cumple también la condición M 2) del § 5-5, *b*.

Por lo tanto:

$$[5\text{-}16]\quad \begin{cases} m = a \smile b = d.a'.b' = a.b' = b.a' = (a.b)/d \\ \text{con } d = a \frown b,\ a = d.a',\ b = d.b', \end{cases}$$

da el m. c. m. $a \smile b$ de a y b, pudiendo enunciarse el:

TEOR.: *El* m. c. m. *de dos números se obtiene multiplicando cualquiera de ellos por el cociente de dividir el otro por el*

$a \smile b$, para el *mínimo* común múltiplo, se refiere a que es el primer múltiplo (cero es el último) en el orden parcial que determina la divisibilidad.

Se suele leer $a \smile b$: "*a verso b*", y $a \frown b$: "*a reverso b*".

m. c. d. *de ambos. Si éstos son primos entre sí, el* m. c. m. *es su producto.*

c) El diagrama de HASSE de los enteros a, b, $a \frown b$ y $a \smile b$ es en general el de la figura 16, pero si $b \mid a$ es el de la figura 17.

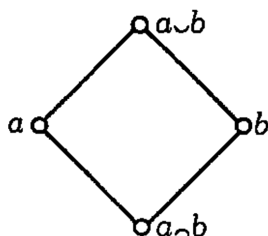


Fig. 16.

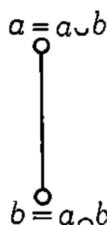


Fig. 17.

7. Divisores y múltiplos comunes de varios números. — *a*) Las operaciones de hallar el m. c. d. $a \frown b$ y el m. c. m. $a \smile b$ de dos enteros cualesquiera a y b gozan de la *ley asociativa*:

[5-17] $(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c)$; $(a \smile b) \smile c = a \smile (b \smile c)$

y de la *ley conmutativa*:

[5-18] $a \frown b = b \frown a$; $a \smile b = b \smile a$.

Esta última resulta inmediatamente de la simetría de las condiciones D 1), D 2) o M 1), M2), que definen, respectivamente, el m. c. d o el m. c. m. (§ 5-5,*b*).

DEM.: Para la ley asociativa [5-17] basta ver, por ejemplo, en el caso del m.c.d., que cada miembro es divisor del otro. En efecto, si a es múltiplo de $a \frown b$ según el § 5-5, *b*, también lo será de $(a \frown b) \frown c$ por la misma razón y la ley transitiva de la divisibilidad (§ 5-2, *b*). Por otra parte, y en la misma forma, se ve que b es múltiplo de $a \frown b$, y por lo tanto, también de $(a \frown b) \frown c$, así como c es múltiplo de $(a \frown b) \frown c$; entonces, si $(a \frown b) \frown c$ es divisor de b y de c, también lo es de $b \frown c$ según § 5-5, *b*. Así, hemos probado que $(a \frown b) \frown c$ es divisor de a y de $b \frown c$, es decir, por § 5-5, *b*, de $a \frown (b \frown c)$. De la misma manera, resulta que $a \frown (b \frown c)$ es divisor de $(a \frown b) \frown c$, y por la ley asimétrica de la divisibilidad (§ 5-2, *b*), queda finalmente establecido [5-17]. Demuéstrese *dualmente* el caso del m.c.m.

b) *El* m. c. d. *y el* m. c. m. *de n enteros a_1, a_2, ..., a_n se definen respectivamente por recurrencia* (§ 2-3), y al ser las respectivas operaciones conmutativas y asociativas, el resultado será independiente del orden en que se vayan sustituyendo pares de enteros por su m. c. d. o su m. c. m. Así queda demostrada la conocida regla práctica:

Para determinar el m. c. d. (m. c. m.) *de varios enteros, calcúlase el* m. c. d. (m. c. m.) *de dos de ellos; después el* m. c. d. (m. c. m.) *de éste con un tercer entero, y se sigue así, sucesivamente, hasta haber utilizado todos los enteros dados. El último* m. c. d. (m. c. m.) *calculado es el* m. c. d. (m. c. m.) *buscado.*

Todos los divisores (múltiplos) comunes a varios enteros son los divisores (múltiplos) de su m. c. d. (m. c. m.).

Se dice que varios números son *primos entre sí,* cuando su m. c. d. es la unidad; si cada uno de los números es primo con *cada uno* de los demás, se llaman *primos entre sí dos a dos.* Varios números primos entre sí, pueden no ser primos dos a dos; ejemplo: 6, 10, 15.

8. Descomposición en factores primos: teorema fundamental. — *a*) En el § 5-2, *a,* hemos dado la definición de número primo, también llamado *primo absoluto.* De su definición y de la correspondiente a números primos entre sí se deduce:

a_1) *Un número primo absoluto es primo con todos los números que no son múltiplos suyos.*

El teorema de EUCLIDES (§ 5-6, *c*) se simplifica cuando el número es primo, reduciéndose a éste:

a_2) *Si un número primo divide a un producto de varios factores, divide por lo menos a uno de ellos.*

Si p divide a $a\ b\ c\ d\ \ldots\ f$, o divide a a, o es primo con él; en este caso segundo, por el teorema de EUCLIDES (§ 5-6, *c*), debe dividir al número $b\ c\ d\ \ldots\ f$. Si no divide al factor b, es primo con él; luego divide a $c\ d\ \ldots\ f$. Resulta, siguiendo así, que si p no es divisor de a, ni de b, ni de c, ..., lo es del último factor, f.

b) Ahora es fácil probar el *teorema fundamental de la descomposición en factores primos*:

TEOR.: *Cualquier entero no nulo puede ser expresado por una unidad* (± 1) *que multiplica a un producto de factores primos positivos. Esta expresión es única, salvo el orden de los factores.*

En efecto, basta considerar enteros positivos (§ 5-2, nota).

Si el número m no es primo, admite divisores distintos de m y de 1; sea a el menor de ellos. Este número es seguramente primo, pues si admitiera un divisor d distinto de 1 y de a (y por tanto menor que a), tendría m este divisor $d < a$, contra lo supuesto. Por consiguiente, $m = a\ m'$, siendo a primo.

Si m' no es primo, admite por igual razón un divisor primo b, y será $m = a\,b\,m''$, etc. Como los enteros positivos $m, m'\ m''$, ..., van disminuyendo y son distintos de 0, por el principio del número mínimo (§ 2-7), esta descomposición no puede prolongarse indefinidamente; es decir, se llega a un cociente que es primo. Resulta, pues,

$$m = a\ b\ c\ d\ \ldots\ f,$$

siendo $a, b, c, d, \ldots, f$, números primos, varios de los cuales pueden ser iguales. Dicha descomposición es única, es decir, si $a\ b\ c\ \ldots\ f = a'\ b'\ c'\ \ldots\ h'$, siendo primos los números $a, b, c, \ldots, f, a', b', c', \ldots, h'$, los factores del segundo miembro son los mismos del primero, salvo el orden. En efecto, a es un divisor del producto $a'\ b'\ c'\ \ldots\ h'$; luego, divide a uno de sus

factores; y como éstos son primos, es igual a uno de ellos; ordenando éstos convenientemente, podemos suponer sea el primero, es decir, $a = a'$, y dividiendo por él ambos miembros de la igualdad supuesta, resulta: $b\,c \ldots f = b'\,c' \ldots h'$.

Por igual razonamiento, b es igual a un factor del segundo miembro, por ejemplo: $b = b'$; dividiendo por ellos obtenemos: $c\,d \ldots f = c'\,d' \ldots h'$; y siguiendo así, resulta que el número de factores de los dos productos es el mismo, y que estos factores son los mismos en ambos.

Por esto, *la expresión más general de un entero no primo, m, en factores primos positivos, p_i, es:*

[5-19] $$m = \pm\, p_1^{e_1}\, p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}, \quad (0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k).$$

La unicidad de la descomposición significa que el exponente e_i que afecta a cada factor primo, p_i, está unívocamente determinado por el entero dado, m. Los números no primos distintos de 0 y de ± 1, se llaman *compuestos.*

EJEMPLO: En virtud de este teorema, la descomposición del número dado en sus factores primos puede hacerse en cualquier orden. Cuando a primera vista aparece el número como producto de varios, basta descomponer estos factores primos y multiplicar todos ellos. Así, por ejemplo: $6\,300 = 9.7.100 = 2^2.5^2.3^2.7.$

Los factores primos, empezando por los menores, también se buscan mediante ensayos, o con el auxilio de criterios de divisibilidad. (Véase nota III, *b*).

El cálculo suele disponerse así:

6 300	2	3 960	2
3 150	2	1 980	2
1 575	3	990	2
525	3	495	3
175	5	165	3
35	5	55	5
7	7	11	11
1		1	

$6\,300 = 2^2.3^2.5^2.7$; $\quad 3\,960 = 2^3.3^2.5.11$

c) Se cumple el teorema (posiblemente de EUCLIDES):

La sucesión de números primos positivos es indefinida.

Esto equivale a decir: dado cualquier número primo, p, hay siempre otro mayor. Formemos, en efecto, el producto de todos los números primos desde 2 hasta p, e incrementándolo en 1, obtenemos el número:

$$q = 2.3.5.7.11 \ldots p + 1.$$

Si este número es primo, queda demostrado el teorema, pues $q > p$; si q no es primo, admite un divisor primo, el cual no puede ser ninguno de los números 2, 3, 5, ..., p, puesto que q, dividido por cualquiera de ellos, da como resto 1. En ambos casos hemos obtenido un número primo mayor que p.

9. **Aplicaciones del teorema fundamental.** — *a*) Descompuestos dos números en factores primos, es fácil saber si uno es divisible por el otro mediante el siguiente *criterio general de divisibilidad*:

a_1) *La condición necesaria y suficiente para que un número* m *sea múltiplo de otro,* n, *es que contenga todos los factores primos de éste, con iguales o mayores exponentes.*

Si es $m = n\,q$, contiene m todos los factores primos de n, con mayores o iguales exponentes, según que los factores primos de q sean estos mismos u otros distintos; luego, la condición es necesaria.

Si esta condición se cumple, en el producto que expresa m se pueden agrupar aquellos factores que componen n, quedando así descompuesto m en el producto de n por otro número; luego, $n \mid m$.

Así, por ejemplo, el número $2^3.5^4.7^3.13^2$ es divisible por $2^3.7^3.13^2$, y por $5^4.7^2.13$; pero no es divisible por $2^4.5.7^3$ ni por $2.3.5.13$.

Cuando la descomposición en factores primos es fácil, el método más rápido para hallar el m. c. d. y el m. c. m. es el fundado en los teoremas siguientes:

a_2) *El* m. c. d. *de varios números es el producto de los factores primos comunes a todos ellos, tomado cada uno con el menor de los exponentes con que figura en todos los números.*

Que este número d así formado es divisor común de todos, resulta de la propiedad anterior. Todo divisor común de los números dados no puede contener otros factores primos que los de d, ni con mayores exponentes que en d; luego, éste es el mayor de todos los divisores comunes.

a_3) *El* m. c. m. *de varios números es el producto de los factores primos de todos ellos, tomado cada uno con el mayor de sus exponentes.*

Por el criterio (a_1), este número es múltiplo de todos los números; cualquier múltiplo común no nulo de éstos debe contener todos sus factores primos, con exponentes iguales o mayores que en m; luego, m es el menor no nulo de todos estos múltiplos.

EJEMPLOS:

m. c. d. $(180, 270, 375)$ = m. c. d. $(2^2.3^2.5,\ 2.3^3.5,\ 3.5^3) = 3.5 = 15$

m. c. m. $[36, 135, 375]$ = m. c. m. $[2^2.3^2,\ 3^3.5,\ 3.5^3] = 2^2.3^3.5^3 = 13\,500$

b) La descomposición de los números en factores primos permite demostrar sencillísimamente multitud de propiedades interesantes.

Dejamos al cuidado del lector, a modo de ejercicio, la demostración de los siguientes teoremas, utilizando (*a*):

b_1) ***La condición necesaria y suficiente para que varios números sean primos entre sí, es que no tengan ningún factor primo común.***

b_2) *Si dos números son primos entre sí, sus potencias de exponentes cualesquiera son números primos entre sí.*

b_3) *Si cada uno de los números a, b, ..., l es primo con cada uno de los p, q, ..., t, el producto a b ... l es primo con el p q ... t.*
Si un número es primo con varios otros, es primo con su producto.

b_4) ***El* m. c. d. *de varios números no varía al multiplicar uno de ellos por un factor primo con los demás.***

b_5) *Los divisores comunes de varios números son los divisores de su* m. c. d.

b_6) *Si varios números se multiplican (o dividen) por otro, su* m. c. d. *y su* m. c. m. *quedan multiplicados (o divididos) por éste.*

b_7) ***Los cocientes de dividir varios números por su* m. c. d. *son primos entre sí.***
Recíprocamente: *Si los cocientes de varios números por otro son primos entre sí, éste es su* m. c. d.

b_8) *Los cocientes de dividir por varios números su* m. c. m. *son primos entre sí.*
Recíprocamente: *Si los cocientes de un número por varios son primos entre sí, es el* m. c. m. *de aquéllos.*

10. **Obtención de todos los divisores de un número.** — *a*) El problema de hallar los divisores comunes a varios números se reduce (§ 5-7, *b*) al de obtener todos los divisores de un solo número. Éste se resuelve fácilmente, teniendo la descomposición [5-19] del número en factores primos.

a_1) *Los divisores del número* $m = p_1^{e_1}\, p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$ *son los términos del producto:*

[5-20]
$$(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{e_1})\ (1+p_2+p_2^2\ldots+p_2^{e_2})\ldots\ (1+p_k+p_k^2+\ldots+p_k^{e_k})$$

Todo término de este producto es de la forma $p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_k^{h_k}$, siendo

[5-21] $$h_1 \leqq e_1,\ h_2 \leqq e_2,\ \ldots,\ h_k \leqq e_k,$$

luego (§ 5-9, a_1) es un divisor del número dado. Recíprocamente, todo divisor de ese número contiene como factores primos solamente los números $p_1, p_2, \ldots, p_k$, luego es de la forma $p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_k^{h_k}$ (pudiendo ser nulos algunos exponentes) con las condiciones [5-21]; por consiguiente, tal número es un término del producto hallado.

COROLARIO: *El número de divisores del número* $p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$ *es:*

$$\nu = (e_1+1)\ (e_2+1)\ (e_3+1)\ \ldots\ (e_k+1).$$

a_2) Se obtienen metódicamente todos los términos del producto [5-20], es decir, todos los divisores del número $p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$, escribiendo en una fila la unidad y las potencias sucesivas de p_1 hasta $p_1^{e_1}$; escribiendo debajo, en filas sucesivas, sus productos por p_2, por p_2^2, ... por $p_2^{e_2}$; luego se multiplican todos los números de este cuadro por p_3, por p_3^2, ... por $p_3^{e_3}$, y así se sigue hasta multiplicar por $p_k^{e_k}$. El último número así obtenido es precisamente el dado.

He aquí, por ejemplo, todos los divisores del número $2\,016 = 2^5.3^2.7$:

1	2	4	8	16	32
3	6	12	24	48	96
9	18	36	72	144	288
7	14	28	56	112	224
21	42	84	168	336	672
63	126	252	504	1 008	2 016

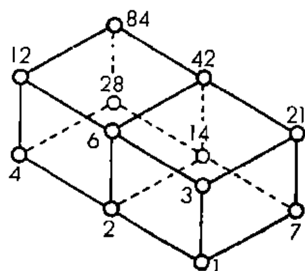


Fig. 18.

b) El diagrama de HASSE de los divisores de un entero que en su descomposición factorial tiene *un* solo factor primo, es *lineal;* tal es el de $8 = 2^3$ (fig. 12). Si el entero tiene *dos* factores primos distintos, el diagrama de HASSE es una figura de dos dimensiones; si tiene *tres* factores primos distintos, como $84 = 2^2.3.7$, el diagrama aparece como un sólido de tres dimensiones (fig. 18). El diagrama de HASSE para los divisores de $2\,016 = 2^5.3^2.7$ tendría también tres dimensiones, y de él formaría parte el construído en la figura 18 para $84 = 2^4.3.7$.

La figura 19 representa el diagrama de HASSE de los divisores de $210 = 2.3.5.7$, que tiene cuatro factores primos en su descomposición factorial. Por ello viene representado por un hipercubo en el espacio de cuatro dimensiones con aristas paralelas a las 1-2, 1-3, 1-5, 1-7, que parten del

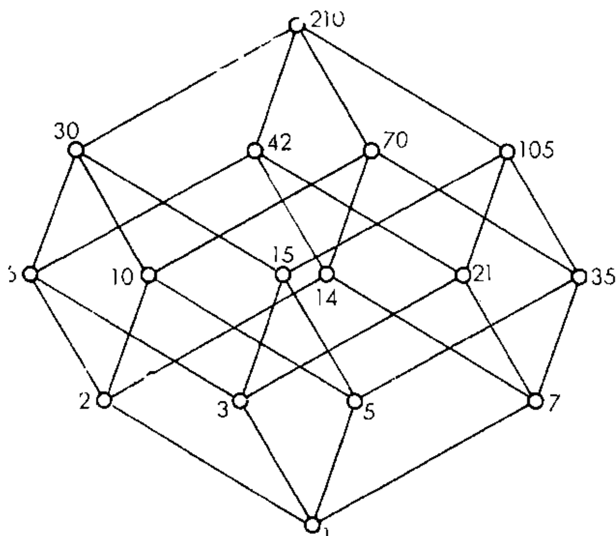


Fig. 19.

vértice 1 y son perpendiculares dos a dos. Así resultan los 16 vértices, 32 aristas, 24 caras y 8 "hipercaras" o "celdas" (cubos) indicados en la figura 19.

Vemos, pues, que la divisibilidad de los enteros está relacionada con los espacios de *n* dimensiones. Por existir una infinidad de números pri-

mos (§ 5-8, *c*), el diagrama de HASSE de "todos" los enteros debería concebirse como una figura en el espacio de *infinitas* dimensiones. Resulta así una noción gráficamente confusa, por lo cual el estudio de sus relaciones mutuas presentará seguramente grandes dificultades.

11. **Congruencias y clases residuales.** — *a*) La manecilla horaria de un reloj cuenta las horas hasta las 12, volviendo luego a empezar, como si las 12 coincidiese con las 0 horas, de manera que recorridas, 1, 13, 25, 37, ..., horas, la manecilla marca siempre la una. Este hecho se expresa diciendo que aquellos enteros son congruentes respecto del módulo 12.

También al tratar de la división entera (§ 5-1) hemos demostrado que, respecto del divisor m, todo número a puede expresarse de modo único en la forma

[5-22] $$a = mq + r, \quad \text{siendo } 0 \leqq r < m.$$

Este número r se llama *resto de a según el módulo m, o respecto del módulo m.*

Dos números, a y b, se llaman *congruentes respecto del módulo m,* cuando divididos por él dan el mismo resto. Simbólicamente, esta relación de congruencia se expresa así:

$$a \equiv b \ (\text{mód. } m) \quad \text{o también} \quad a \equiv b \ (m).$$

De esta definición resulta el siguiente *criterio fundamental*:

La condición necesaria y suficiente para que dos números sean congruentes respecto del módulo m, es que su diferencia sea un múltiplo de m.

La condición es necesaria, pues si $a \equiv b$ (mód. m), será

$$a = mq + r, \quad b = mq' + r \quad \text{con el mismo resto } r.$$

Entonces: $a - b = m(q - q')$ es divisible por m.

Recíprocamente, si $a - b = c.m$, sea r el resto de dividir a por m, es decir, $a = m.q + r$ con $0 \leqq r < m$; entonces,

$$b = a - c.m = m(q - c) + r$$

demuestra que r es también el resto de b respecto de m.

b) La relación de congruencia respecto de un *módulo fijo, m,* es una relación de equivalencia (§ 1-5), como consecuencia inmediata de su definición, es decir, dicha relación es:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Reflexiva}: a \equiv a, \\ \textit{Simétrica}: a \equiv b \text{ implica } b \equiv a, \\ \textit{Transitiva}: a \equiv b \text{ y } b \equiv c \text{ implica } a \equiv c. \end{array}\right\} (\text{mód. } m).$$

Si se conocen solamente los restos que se obtienen cuando dividimos dos enteros dados por el módulo m, sería imposible distinguir dos enteros congruentes. Es lo que sucede en el reloj respecto a los enteros $1 \equiv 13 \equiv 25 \equiv 37 \equiv \ldots$ (mód. 12).

Si nos interesamos solamente por los "restos" que se pueden obtener en la división de los enteros por m : 0, 1, 2, ..., m-1, podemos identificar cada entero con el resto que se obtiene al dividirlo por m, con lo cual se tiene una división en clases (§ 1-5). Dos enteros congruentes serán solamente considerados como diferentes *representantes* (§ 1-6) de una misma clase o de un mismo resto. He aquí un nuevo ejemplo de definición por abstracción (§ 1-6). Así se introduce la *clase resto r* o *clase residual r,* como la de los números a, que cumplen [5-22] respecto de un *módulo fijo m,* para cualquier q entero.

Respecto del módulo 2 sólo hay dos restos, 0 y 1, representantes de dos clases residuales, ya consideradas desde la más lejana antigüedad: la de los enteros *pares* y la de los *impares.*

Para que un entero a sea divisible por m, es necesario y suficiente que a pertenezca a la clase resto 0 respecto del mód. m.

12. **Operaciones con clases residuales. Grupos, anillos, cuerpos.** — *a*) Para los enteros *pares* e *impares*, es bien conocida la siguiente tabla de adición y de multiplicación:

Adición	*Multiplicación*
par + par = par,	par.par = par,
par + impar = impar + par = impar,	par.impar = impar.par = par,
impar + impar = par.	impar.impar = impar.

En vez de expresar teoremas sobre enteros ordinarios, esta tabla podría ser considerada como la definición de operaciones de "adición" y de "multiplicación" en una nueva álgebra de los dos elementos "par" e "impar". Si tomamos como representante de las clases par e impar sus respectivos restos 0 y 1 respecto del módulo 2, la tabla anterior se convierte en:

$0+0=0,$	$0.0=0,$
$0+1=1+0=1,$	$0.1=1.0=0,$
$1+1=0,$	$1.1=1,$

"igualdades" que pueden interpretarse como congruencias respecto del módulo 2; por ejemplo: $1+1=0$ representa la congruencia $1+1\equiv 0$ (mód. 2).

En forma análoga obtenemos un álgebra I_m de m elementos, mediante el *sistema de clases residuales módulo m*, llamado también *sistema completo de números incongruentes* mód. m, o *sistema de enteros* mód. m. Las operaciones de adición y de multiplicación entre los elementos de I_m, es decir, entre clases residuales (mód. m), se definirán por las operaciones ya conocidas del mismo nombre con sus respectivos restos representantes. Para que éstas sean efectivamente operaciones entre las clases residuales, han de cumplir la ley uniforme (§ 2-4, *a*). Así ocurre, por ser fácil demostrar que:

[5-23] $$a\equiv a' \text{ y } b\equiv b' \text{ implica } \begin{cases} a+b\equiv a'+b' \\ a.b\equiv a'.b' \end{cases} \pmod{m}$$

Dichas operaciones cumplen en I_m las siguientes leyes, cuya demostración, casi inmediata, dejamos al lector:

	Adición	*Multiplicación*
1) *Asociativa*:	$(a+b)+c\equiv a+(b+c),$	$(a.b).c\equiv a.(b.c),$
2) *Modular*:	$a+0\equiv a,$	$a.1\equiv a,$
3) *Conmutativa*:	$a+b\equiv b+a,$	$a.b\equiv b.a,$
4) *Distributiva*:	$c.(a+b)\equiv c.a+c.b.$	

La existencia de números opuestos entre los enteros (§ 3-6, *a*) se conserva en el álgebra I_m, pues su adición cumple:

5) *Ley de inversión*: *Dado* a, *existe* $-a$ *tal que* $a+(-a)\equiv 0 \pmod{m}$.

mos (§ 5-8, c), el diagrama de HASSE de "todos" los enteros debería concebirse como una figura en el espacio de *infinitas* dimensiones. Resulta así una noción gráficamente confusa, por lo cual el estudio de sus relaciones mutuas presentará seguramente grandes dificultades.

11. Congruencias y clases residuales. — a) La manecilla horaria de un reloj cuenta las horas hasta las 12, volviendo luego a empezar, como si las 12 coincidiese con las 0 horas, de manera que recorridas, 1, 13, 25, 37, ..., horas, la manecilla marca siempre la una. Este hecho se expresa diciendo que aquellos enteros son congruentes respecto del módulo 12.

También al tratar de la división entera (§ 5-1) hemos demostrado que, respecto del divisor m, todo número a puede expresarse de modo único en la forma

[5-22] $$a = mq + r, \quad \text{siendo } 0 \leqq r < m.$$

Este número r se llama *resto de a según el módulo m, o respecto del módulo m.*

Dos números, a y b, se llaman *congruentes respecto del módulo m*, cuando divididos por él dan el mismo resto. Simbólicamente, esta relación de congruencia se expresa así:

$$a \equiv b \ (\text{mód. } m) \quad \text{o también} \quad a \equiv b \ (m).$$

De esta definición resulta el siguiente *criterio fundamental*:

La condición necesaria y suficiente para que dos números sean congruentes respecto del módulo m, es que su diferencia sea un múltiplo de m.

La condición es necesaria, pues si $a \equiv b$ (mód. m), será

$$a = mq + r, \quad b = mq' + r \quad \text{con el mismo resto } r.$$

Entonces: $a - b = m(q - q')$ es divisible por m.

Recíprocamente, si $a - b = c.m$, sea r el resto de dividir a por m, es decir, $a = m.q + r$ con $0 \leqq r < m$; entonces,

$$b = a - c.m = m(q - c) + r$$

demuestra que r es también el resto de b respecto de m.

b) La relación de congruencia respecto de un *módulo fijo*, m, es una relación de equivalencia (§ 1-5), como consecuencia inmediata de su definición, es decir, dicha relación es:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Reflexiva}:\ a \equiv a, \\ \textit{Simétrica}:\ a \equiv b \text{ implica } b \equiv a, \\ \textit{Transitiva}:\ a \equiv b \text{ y } b \equiv c \text{ implica } a \equiv c. \end{array}\right\} (\text{mód. } m).$$

Si se conocen solamente los restos que se obtienen cuando dividimos dos enteros dados por el módulo m, sería imposible distinguir dos enteros congruentes. Es lo que sucede en el reloj respecto a los enteros $1 \equiv 13 \equiv 25 \equiv 37 \equiv \ldots$ (mód. 12).

Si nos interesamos solamente por los "restos" que se pueden obtener en la división de los enteros por m : 0, 1, 2, ..., m-1, podemos identificar cada entero con el resto que se obtiene al dividirlo por m, con lo cual se tiene una división en clases (§ 1-5). Dos enteros congruentes serán solamente considerados como diferentes *representantes* (§ 1-6) de una misma clase o de un mismo resto. He aquí un nuevo ejemplo de definición por abstracción (§ 1-6). Así se introduce la *clase resto r* o *clase residual r*, como la de los números a, que cumplen [5-22] respecto de un *módulo fijo* m, para cualquier q entero.

Respecto del módulo 2 sólo hay dos restos, 0 y 1, representantes de dos clases residuales, ya consideradas desde la más lejana antigüedad: la de los enteros *pares* y la de los *impares*.

Para que un entero a sea divisible por m, es necesario y suficiente que a pertenezca a la clase resto 0 respecto del mód. m.

12. **Operaciones con clases residuales. Grupos, anillos, cuerpos.** — *a*) Para los enteros *pares* e *impares*, es bien conocida la siguiente tabla de adición y de multiplicación:

Adición	*Multiplicación*
par + par = par,	par.par = par,
par + impar =	par.impar =
impar + par = impar,	= impar.par = par,
impar + impar = par.	impar.impar = impar.

En vez de expresar teoremas sobre enteros ordinarios, esta tabla podría ser considerada como la definición de operaciones de "adición" y de "multiplicación" en una nueva álgebra de los dos elementos "par" e "impar". Si tomamos como representante de las clases par e impar sus respectivos restos 0 y 1 respecto del módulo 2, la tabla anterior se convierte en:

$0 + 0 = 0,$	$0 . 0 = 0,$
$0 + 1 = 1 + 0 = 1,$	$0 . 1 = 1 . 0 = 0,$
$1 + 1 = 0,$	$1 . 1 = 1,$

"igualdades" que pueden interpretarse como congruencias respecto del módulo 2; por ejemplo: $1 + 1 = 0$ representa la congruencia $1 + 1 \equiv 0$ (mód. 2).

En forma análoga obtenemos un álgebra I_m de m elementos, mediante el *sistema de clases residuales módulo m*, llamado también *sistema completo de números incongruentes* mód. m, o *sistema de enteros* mód. m. Las operaciones de adición y de multiplicación entre los elementos de I_m, es decir, entre clases residuales (mód. m), se definirán por las operaciones ya conocidas del mismo nombre con sus respectivos restos representantes. Para que éstas sean efectivamente operaciones entre las clases residuales, han de cumplir la ley uniforme (§ 2-4, a). Así ocurre, por ser fácil demostrar que:

[5-23] $$a \equiv a' \text{ y } b \equiv b' \text{ implica } \begin{cases} a + b \equiv a' + b' \\ a.b \equiv a'.b' \end{cases} \text{(mód. } m)$$

Dichas operaciones cumplen en I_m las siguientes leyes, cuya demostración, casi inmediata, dejamos al lector:

	Adición	*Multiplicación*
1) *Asociativa*:	$(a + b) + c \equiv a + (b + c),$	$(a.b).c \equiv a.(b.c),$
2) *Modular*:	$a + 0 \equiv a,$	$a.1 \equiv a,$
3) *Conmutativa*:	$a + b \equiv b + a,$	$a.b \equiv b.a,$
4) *Distributiva*:	$c.(a + b) \equiv c.a + c.b.$	

La existencia de números opuestos entre los enteros (§ 3-6, a) se conserva en el álgebra I_m, pues su adición cumple:

5) *Ley de inversión: Dado a, existe $-a$ tal que*
$$a + (-a) \equiv 0 \quad \text{(mód. } m).$$

b) Ya hemos señalado la importancia de las leyes formales (§ 2-6) en la generalización del concepto de número; en Álgebra moderna se dan nombres especiales a distintas categorías de entes abstractos que estén ligados entre sí por una o más operaciones, tales que éstas cumplan una parte mayor o menor de dichas leyes formales.

Así *se define el grupo como un conjunto cualquiera de elementos en el cual se ha definido una operación binaria* (§ 2-4, a) *unívocamente determinada, que sea conexa, cerrada y cumpla las leyes asociativa, modular y de inversión. Si además cumple la ley conmutativa, el grupo se llama conmutativo o abeliano.*

Por lo tanto, dado cualquier elemento del grupo, existe otro elemento. llamado su *inverso*, tal que la operación del grupo aplicado a ambos da por resultado el *módulo* (§ 3-7) de dicha operación.

Los enteros y también los restos mód. m, ligados unos y otros por la adición, forman grupo conmutativo. No así respecto de la multiplicación. La ley modular define, unívocamente determinado, el *módulo* o *unidad* u (nombre tomado de los grupos multiplicativos, siendo el 0 el módulo para los aditivos) en el grupo G, y la de inversión define el único inverso $\bar{a}$ de cada $a \varepsilon \mathrm{G}$.

En un grupo es *siempre posible la operación inversa* (a izquierda y a derecha) es decir, con notación de § 2-4:

i) Para cualesquiera a, r de G existe $i \varepsilon \mathrm{G}$ tal que $i \,\&\, a = r$;

d) Para cualesquiera a, r de G existe $d \varepsilon \mathrm{G}$ tal que $a \,\&\, d = r$.

En efecto, basta tomar $i = r \,\&\, \bar{a}$, pues entonces es

$$i \,\&\, a = (r \,\&\, \bar{a}) \,\&\, a = r \,\&\, (\bar{a} \,\&\, a) = r \,\&\, u = r\cdot$$

Análogamente, basta tomar $d = a \,\&\, r$.

Ésta es propiedad característica en el concepto de grupo y así un *grupo puede definirse también mediante una operación conexa, cerrada y asociativa con existencia de operación inversa.*

En efecto, entonces la ley modular resulta así: Dado un $a \varepsilon \mathrm{G}$ y planteada la operación $x \,\&\, a = a$, existe $x = u_i \varepsilon \mathrm{G}$. Entonces, para todo $b \varepsilon \mathrm{G}$ existe $d \varepsilon \mathrm{G}$ tal que $a \,\&\, d = b$ y por tanto $u_i \,\&\, b = u_i \,\&\, (a \,\&\, d) = (u_i \,\&\, a) \,\&\, d = a \,\&\, d = b$. Del mismo modo existe $u_d \varepsilon \mathrm{G}$ tal que para todo $b \varepsilon \mathrm{G}$ sea $b \,\&\, u_d = b$. El módulo es único, porque respecto de un mismo u_d debe ser $u_d = u_i \,\&\, u_d = u_i$; $u_d = u_i' \,\&\, u_d = u_i'$, de donde $u_i = u_i'$ y así resulta un solo módulo $u = u_i = u_d$.

La ley de inversión se demuestra así; Para todo $a \varepsilon \mathrm{G}$, la ecuación $x \,\&\, a = u$ da $\bar{a}_i$ tal que $\bar{a}_i \,\&\, a = u$; del mismo modo $a \,\&\, x = u$ da $\bar{a}_d$ tal que $a \,\&\, \bar{a}_d = u$. La unicidad del inverso se prueba a partir de $\bar{a}_i \,\&\, a = u = \bar{a}_i' \,\&\, a$, que multiplicada a derecha por $\bar{a}_d$ da $\bar{a}_i = \bar{a}_d = \bar{a}_i'$ y así resulta un solo inverso $\bar{a} = \bar{a}_i = \bar{a}_d$.

Un *sistema* de elementos se llama *de doble composición* si en él se han definido dos operaciones binarias (§ 2-4, a): *adición* y *multiplicación*, que hagan corresponder, respectivamente, a cada par de elementos a y b una *suma* $a + b$ y un *producto* $a . b$.

Se llama anillo a todo sistema de elementos de doble composición tal que respecto a la adición forme un grupo abeliano, y respecto a la multiplicación sea cerrado, cumpliendo ésta la ley asociativa y también la distributiva respecto de la adición. El anillo se llama conmutativo (o abeliano), si lo es su multiplicación.

El conjunto de los enteros y también el de las clases residuales mód. m forman anillo.

c) La ley cancelativa de la multiplicación (§ 3-4) presenta gran interés en los sistemas I_m, pues puede no ser válida en ellos. Así, por ejemplo, $3.5 \equiv 3.9$ (mód. 12), pero $5 \not\equiv 9$ (mód. 12). De aquí que en I_{12} *el cero tenga divisores no nulos* (§ 3-8), pues es $3.4 \equiv 0$, $3 \not\equiv 0$, $4 \not\equiv 0$, (mód. 12). En cambio, se cumple el teorema:

Para un módulo primo p, es válida la ley general cancelativa de la multiplicación, es decir:

[5-24] $a \not\equiv 0$ y $a.b \equiv a.c$, implica $b \equiv c$ (mód. p).

En efecto, la hipótesis equivale, por el criterio fundamental (§ 5-11, a), a que sea $p \mid a(b-c)$, y por no ser a múltiplo de p, ya que $a \not\equiv 0$ (mód. p), el factor primo p debe figurar (§ 5-8, a_2) en $b - c$, es decir, $b \equiv c$ (mód. p), como queríamos demostrar.

Según ya sabemos (§ 3-8), este teorema equivale a afirmar que en I_p *el cero no tiene divisores* (no nulos).

Se llama *dominio de integridad a un anillo conmutativo sin divisores de cero, es decir, en el que rige la ley cancelativa de la multiplicación* (§ 3-4).

Por lo tanto, *el sistema de enteros* mód. p *forma un dominio de integridad cuando, y sólo cuando, p es primo.*

Otros ejemplos de dominios de integridad dan el conjunto de enteros ordinarios y también el conjunto de todos los números de la forma $a + b\sqrt{3}$ con a y b enteros ordinarios cualesquiera, con suma y producto definidos por:

$$(a + b\sqrt{3}) + (a' + b'\sqrt{3}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{3},$$

$$(a + b\sqrt{3}) \cdot (a' + b'\sqrt{3}) = (a.a' + 3\,b.b') + (a.b' + b.a')\sqrt{3}.$$

Pruébese que este producto es nulo cuando, y sólo cuando, lo es alguno de los factores (§ 7-1).

Compruébese que los enteros mód. m *no* cumplen las leyes de monotonía (§ 2-5).

d) En los enteros ordinarios no siempre es posible la operación de la división de divisor no-nulo (§ 2-4, c) es decir, no siempre tiene solución entera la ecuación $b \cdot x = a$, ($b \neq 0$). En los sistemas de clases residuales rige el teorema:

d_1) *Si b es primo con m, entonces la congruencia* $b \cdot x \equiv a$ (mód. m) *tiene una solución entera x. Dos soluciones cualesquiera,* x_1 *y* x_2, *son congruentes* mód. m.

En efecto, la hipótesis significa (§ 5-5, a) que existen enteros, s y t, tales, que $1 = s.b + t.m$. De aquí deducimos que $a - b(as) = (at)m$, es decir, $a \equiv bx$ (mód. m), tiene la solución $x = as$. Las propiedades simétrica y transitiva de la congruencia (§ 5-11, b) aseguran que $b.x_1 \equiv b.x_2$ (mód. m), es decir, $m \mid b(x_1 - x_2)$, que implica $m \mid (x_1 - x_2)$ por ser $m \frown b = 1$, según el teorema de EUCLIDES (§ 5-6, c). Por lo tanto, $x_1 \equiv x_2$ (mód. m), como queríamos demostrar.

El teorema anterior tiene como caso particular importante aquel en que el módulo m es un número primo p. Entonces podemos afirmar:

d_2) *Si p es primo, y si* $b \not\equiv 0$ (mód. p), *entonces la ecuación* $b.x \equiv a$ (mód. p) *tiene siempre una solución entera, que es única, módulo p.*

Por lo tanto, en el sistema I_p con p primo, las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de divisor no nulo, llamadas operaciones racionales (§ 6-4), son siempre posibles.

Se llama cuerpo (conmutativo) o campo de racionalidad a un anillo (conmutativo) en el que habiendo algún elemento no nulo, la división de divisor no nulo sea siempre posible dentro del sistema.

También puede definirse el cuerpo como un anillo donde el conjunto de elementos obtenidos al suprimir el módulo de la adición, forma grupo respecto de la multiplicación del anillo.

Pruébese que un cuerpo conmutativo forma siempre un dominio de integridad, utilizando la existencia unívoca del elemento *recíproco* a^{-1} de todo elemento $a \neq 0$.

d_3) *El sistema de enteros* (mód. m) *forma cuerpo cuando, y sólo cuando, m es primo.* Para verlo falta considerar el caso de m compuesto.

b) Ya hemos señalado la importancia de las leyes formales (§ 2-6) en la generalización del concepto de número; en Álgebra moderna se dan nombres especiales a distintas categorías de entes abstractos que estén ligados entre sí por una o más operaciones, tales que éstas cumplan una parte mayor o menor de dichas leyes formales.

Así *se define el grupo como un conjunto cualquiera de elementos en el cual se ha definido una operación binaria* (§ 2-4, *a*) *unívocamente determinada, que sea conexa, cerrada y cumpla las leyes asociativa, modular y de inversión. Si además cumple la ley conmutativa, el grupo se llama conmutativo o abeliano.*

Por lo tanto, dado cualquier elemento del grupo, existe otro elemento. llamado su *inverso*, tal que la operación del grupo aplicado a ambos da por resultado el *módulo* (§ 3-7) de dicha operación.

Los enteros y también los restos mód. m, ligados unos y otros por la adición, forman grupo conmutativo. No así respecto de la multiplicación. La ley modular define, unívocamente determinado, el *módulo* o *unidad* u (nombre tomado de los grupos multiplicativos, siendo el 0 el módulo para los aditivos) en el grupo G, y la de inversión define el único inverso $\bar{a}$ de cada $a \varepsilon \mathrm{G}$.

En un grupo es *siempre posible la operación inversa* (a izquierda y a derecha) es decir, con notación de § 2-4:

i) Para cualesquiera a, r de G existe $i \varepsilon \mathrm{G}$ tal que $i \& a = r$;

d) Para cualesquiera a, r de G existe $d \varepsilon \mathrm{G}$ tal que $a \& d = r$.

En efecto, basta tomar $i = r \& \bar{a}$, pues entonces es

$$i \& a = (r \& \bar{a}) \& a = r \& (\bar{a} \& a) = r \& u = r.$$

Análogamente, basta tomar $d = \bar{a} \& r$.

Ésta es propiedad característica en el concepto de grupo y así un *grupo puede definirse también mediante una operación conexa, cerrada y asociativa con existencia de operación inversa.*

En efecto, entonces la ley modular resulta así: Dado un $a \varepsilon \mathrm{G}$ y planteada la operación $x \& a = a$, existe $x = u_i \varepsilon \mathrm{G}$. Entonces, para todo $b \varepsilon \mathrm{G}$ existe $d \varepsilon \mathrm{G}$ tal que $a \& d = b$ y por tanto $u_i \& b = u_i \& (a \& d) = (u_i \& a) \& d = a \& d = b$. Del mismo modo existe $u_d \varepsilon \mathrm{G}$ tal que para todo $b \varepsilon \mathrm{G}$ sea $b \& u_d = b$. El módulo es único, porque respecto de un mismo u_d debe ser $u_d = u_i \& u_d = u_i$; $u_d = u_i' \& u_d = u_i'$, de donde $u_i = u_i'$ y así resulta un solo módulo $u = u_i = u_d$.

La ley de inversión se demuestra así: Para todo $a \varepsilon \mathrm{G}$, la ecuación $x \& a = u$ da $\bar{a}_i$ tal que $\bar{a}_i \& a = u$; del mismo modo $a \& x = u$ da $\bar{a}_d$ tal que $a \& \bar{a}_d = u$. La unicidad del inverso se prueba a partir de $\bar{a}_i \& a = u = \bar{a}_i' \& a$, que multiplicada a derecha por $\bar{a}_d$ da $\bar{a}_i = \bar{a}_d = \bar{a}_i'$ y así resulta un solo inverso $\bar{a} = \bar{a}_i = \bar{a}_d$.

Un *sistema* de elementos se llama *de doble composición* si en él se han definido dos operaciones binarias (§ 2-4, *a*): *adición* y *multiplicación*, que hagan corresponder, respectivamente, a cada par de elementos a y b una *suma* $a + b$ y un *producto* $a . b$.

Se llama anillo a todo sistema de elementos de doble composición tal que respecto a la adición forme un grupo abeliano, y respecto a la multiplicación sea cerrado, cumpliendo ésta la ley asociativa y también la distributiva respecto de la adición. El anillo se llama conmutativo (*o abeliano*), *si lo es su multiplicación.*

El conjunto de los enteros y también el de las clases residuales mód. m forman anillo.

c) La ley cancelativa de la multiplicación (§ 3-4) presenta gran interés en los sistemas I_m, pues puede no ser válida en ellos. Así, por ejemplo, $3.5 \equiv 3.9$ (mód. 12), pero $5 \not\equiv 9$ (mód. 12). De aquí que en I_{12} *el cero tenga divisores no nulos* (§ 3-8), pues es $3.4 \equiv 0$, $3 \not\equiv 0$, $4 \not\equiv 0$, (mód. 12). En cambio, se cumple el teorema:

Para un módulo primo p, es válida la ley general cancelativa de la multiplicación, es decir:

[5-24] $a \not\equiv 0$ y $a.b \equiv a.c$, implica $b \equiv c$ (mód. p).

En efecto, la hipótesis equivale, por el criterio fundamental (§ 5-11, a), a que sea $p \mid a(b-c)$, y por no ser a múltiplo de p, ya que $a \not\equiv 0$ (mód. p), el factor primo p debe figurar (§ 5-8, a_2) en $b - c$, es decir, $b \equiv c$ (mód. p), como queríamos demostrar.

Según ya sabemos (§ 3-8), este teorema equivale a afirmar que en I_p *el cero no tiene divisores* (no nulos).

Se llama *dominio de integridad a un anillo conmutativo sin divisores de cero, es decir, en el que rige la ley cancelativa de la multiplicación* (§ 3-4).

Por lo tanto, *el sistema de enteros* mód. *p forma un dominio de integridad cuando, y sólo cuando, p es primo.*

Otros ejemplos de dominios de integridad dan el conjunto de enteros ordinarios y también el conjunto de todos los números de la forma $a + b\sqrt{3}$ con a y b enteros ordinarios cualesquiera, con suma y producto definidos por:

$$(a + b\sqrt{3}) + (a' + b'\sqrt{3}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{3},$$

$$(a + b\sqrt{3}).(a' + b'\sqrt{3}) = (a.a' + 3\,b.b') + (a.b' + b.a')\sqrt{3}.$$

Pruébese que este producto es nulo cuando, y sólo cuando, lo es alguno de los factores (§ 7-1).

Compruébese que los enteros mód. m *no* cumplen las leyes de monotonía (§ 2-5).

d) En los enteros ordinarios no siempre es posible la operación de la división de divisor no-nulo (§ 2-4, *c*) es decir, no siempre tiene solución entera la ecuación $b.x = a$, $(b \neq 0)$. En los sistemas de clases residuales rige el teorema:

d_1) *Si b es primo con m, entonces la congruencia* $b.x \equiv a$ (mod m) *tiene una solución entera x. Dos soluciones cualesquiera,* x_1 *y* x_2, *son congruentes* mód. m.

En efecto, la hipótesis significa (§ 5-5, a) que existen enteros, s y t, tales, que $1 = s.b + t.m$. De aquí deducimos que $a - b(as) = (at)m$, es decir, $a \equiv bx$ (mód. m), tiene la solución $x = as$. Las propiedades simétrica y transitiva de la congruencia (§ 5-11, b) aseguran que $b.x_1 \equiv b.x_2$ (mód. m), es decir, $m \mid b(x_1 - x_2)$, que implica $m \mid (x_1 - x_2)$ por ser $m \frown b = 1$, según el teorema de EUCLIDES (§ 5-6, c). Por lo tanto, $x_1 \equiv x_2$ (mód. m), como queríamos demostrar.

El teorema anterior tiene como caso particular importante aquel en que el módulo m es un número primo p. Entonces podemos afirmar:

d_2) *Si p es primo, y si* $b \not\equiv 0$ (mód. p), *entonces la ecuación* $b.x \equiv a$ (mód. p) *tiene siempre una solución entera, que es única, módulo p.*

Por lo tanto, en el sistema I_p con p primo, las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de divisor no nulo, llamadas operaciones racionales (§ 6-4), son siempre posibles.

Se llama cuerpo (conmutativo) o campo de racionalidad a un anillo (conmutativo) en el que habiendo algún elemento no nulo, la división de divisor no nulo sea siempre posible dentro del sistema.

También puede definirse el cuerpo como un anillo donde el conjunto de elementos obtenidos al suprimir el módulo de la adición, forma grupo respecto de la multiplicación del anillo.

Pruébese que un cuerpo conmutativo forma siempre un dominio de integridad, utilizando la existencia unívoca del elemento *recíproco* a^{-1} de todo elemento $a \neq 0$.

d_3) *El sistema de enteros* (mód. m) *forma cuerpo cuando, y sólo cuando, m es primo.* Para verlo falta considerar el caso de m compuesto.

La ecuación $b . x \equiv a$ (mód. m) con $b \not\equiv 0$ (mód. m) no tiene solución si tomamos para b y a distintos factores primos de m, pues entonces nunca podrá ser $a - b . x$ múltiplo de m, al no ser divisible a por b factor primo de $b . x + m$. O también, porque los divisores de m distintos de la unidad no tienen recíproco, o porque la ley general cancelativa de la multiplicación no se cumple.

Ejercicios

1. ¿Cuál es el mayor entero que se puede agregar al dividendo, sin alterar el cociente? ¿Y quitar?

2. Probar que si un sistema parcialmente ordenado tiene "primer elemento" (§ 2-7), este elemento es único, y lo mismo si tiene "último elemento".

3. Demostrar que si un conjunto de enteros es cerrado respecto a la sustracción, es también necesariamente cerrado respecto a la adición. En consecuencia, simplificar la definición de *grupo aditivo* dada en § 5-3.

4. Probar que $0 \frown a = |a|$ para cualquier entero a.

5. El m. c. d. $a \frown b$ puede no ser el *mayor* de todos los divisores comunes de a y b. Demostrarlo.

6. Mediante el algoritmo de EUCLIDES, hallar el m. c. d. $14 \frown 35$ y el $11 \frown 15$, y expresarlos en la forma $s\, a + t\, b = a \frown b$.

7. Si c es un entero tal que para cualquier par de enteros a y b, $c \mid (a\, b)$ implica $c \mid a$ ó $c \mid b$, demostrar que c es 0, ± 1 ó primo. (Cfr. § 5-8, a).

8. Si dos números a y b son primos entre sí, su suma y su diferencia son primas con el producto $a\, b$.

9. Hallar los números tales que divididos por 2, 3, 4, 5 y 6, den como resto: 1, 2, 3, 4 y 5, respectivamente.

10. Demostrar que la sucesión de números primos de la forma $4\, n - 1$ es indefinida.

11. Probar que si a es positivo compuesto, tiene un divisor primo positivo tal que $d^2 \leqslant a$. Aplicar el teorema anterior para formar la lista de los números primos positivos menores que 100.

12. Si $2\, n + 1$ es primo, los restos de dividir por él los números 1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2, son todos distintos.

13. Demostrar que si $2^m + 1$ es primo, m es de la forma 2^n.

14. ¿De cuántas maneras puede descomponerse m en un producto de dos factores primos entre sí?

15. Demostrar que la suma S de todos los divisores positivos del número $m = a^{\alpha}\, b^{\beta} \ldots l^{\lambda}$ es $S = \dfrac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \dfrac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdots \dfrac{l^{\lambda+1} - 1}{l - 1}$, y que su producto es: $P = m^{\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1) \ldots (\lambda+1)}$ Aplicarlo al ejemplo $m = 2\,016$.

16. Demostrar que el número $2^{\alpha - 1}(2^{\alpha} - 1)$ es igual a la suma de todos sus divisores positivos menores que él, si $2^{\alpha} - 1$ es primo.

17. Demostrar que si p es primo ($p > 3$), los números 2, 3, 4, ..., $(p - 2)$ se distribuyen en pares $r \neq s$, tales que $r\, s \equiv 1$ (mod. p).

18. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que un número positivo $p \neq 1$ sea primo, es que cumpla $(p - 1)! + 1 \doteq p$ (WILSON).

19. Calcular el resto (mod. 7) de $4\,525^{1000}$.

20. Demostrar que la congruencia módulo cero es la igualdad ordinaria.

21. Resolver las siguientes ecuaciones de congruencia (x entero): *a*) $3x \equiv 2(5)$; *b*) $7x \equiv 3(10)$; *c*) $x + 6 \equiv 4(7)$; *d*) $6x + 3 \equiv 4(10)$.

22. Verificar que en el dominio de integridad de elementos $a + b\sqrt{3}$ (a y b enteros) definido en § 5-12, *c*, la correspondencia biunívoca $a + b\sqrt{3} \leftrightarrow a - b\sqrt{3}$ es un isomorfismo.

§ 6. El número racional

1. **Definición de número racional.** — Su introducción se hace necesaria para poder dar solución en todos los casos a la ecuación.

[6-1] $$a'.\,x = a \quad (a' \neq 0),$$

es decir, poder efectuar la *división* de divisor no nulo sin excepción. Además, en la aplicación de la Aritmética a la teoría de magnitudes, se hace también necesaria su introducción para resolver el problema de la *medida*.

Si a y a' son enteros, y a es múltiplo de $a'(\neq 0)$, se cumple:

[6-2] $$a = a'.\,s;$$

si otro par de números enteros cumple también

[6-3] $$b = b'.\,s,$$

se verificará

[6-4] $$a.b' = a'.\,b.$$

Recíprocamente, de [6-4] y [6-2] se deduce [6-3].

Pues bien, aun cuando a no sea múltiplo de a' ($\neq 0$), esta observación justifica que *definamos el número racional* α por un *par ordenado de números enteros*, que simbolizaremos por la *fracción* a/a' con $a' \neq 0$ (de términos: a, numerador; a', denominador), *mediante la siguiente convención*:

[6-5] $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ cuando y sólo cuando sea } \quad a.b' = a'.\,b.$$

Más precisamente, esto significa definir el número racional α *por abstracción* (§ 1-6) como *clase de pares ordenados* a/a' *de enteros*, mediante la *relación de equivalencia*: $(a/a')\,\mathrm{E}\,(b/b')$ cuando y sólo cuando $ab' = a'b$.

En virtud de la regla de los signos, ya establecida (§ 3-9) para los números enteros, la condición de igualdad [6-5] *permite dar siempre el número racional por un par de números tales que el numerador* a *sea un número entero y el denominador* a' *un entero positivo* (siendo por tanto $a' \neq 0$), y así lo haremos en lo sucesivo.

Si el m. c. d. de a y a' es h y escribimos

[6-6] $$a = h.b, \quad a' = h.b'$$

en que b y b' son primos entre sí (§ 5-5, b), el criterio [6-5] nos dice que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \qquad [6\text{-}7]$$

cuyo segundo miembro expresa el número racional mediante una fracción llamada *irreducible*. Además, para cualquier fracción c/c' que cumpla [6-5], habrá de ser

$$b \,.\, c' = b' \,.\, c$$

y por el teorema de EUCLIDES (§ 5-6, c).

$$c = k \,.\, b, \quad c' = k \,.\, b',$$

es decir, *cualquier fracción que represente un número racional tiene sus términos equimúltiplos de la irreducible que representa dicho número racional.* (¿Por qué los términos de 12/9 no son equimúltiplos de los de 8/6?).

Varios números racionales podrán siempre expresarse por fracciones que tengan el mismo denominador, el que será múltiplo del m. c. m. de los denominadores de las fracciones irreducibles que representen los números racionales dados; así, pues, en la *reducción a un común denominador*, dicho m. c. m. será el *mínimo* denominador común (§ 5-7, b).

EJEMPLO: Las fracciones

$$+\frac{3}{16}, -\frac{11}{36}, -\frac{1}{60},$$

reducidas a un común denominador por la regla del producto de denominadores, adoptan las expresiones siguientes:

$$+\frac{6\,480}{34\,560}, -\frac{10\,560}{34\,560}, -\frac{576}{34\,560}$$

En cambio, reducidas por la regla del m. c. m., toman las formas más sencillas:

$$+\frac{135}{720}, -\frac{220}{720}, -\frac{12}{720}.$$

2. Suma y producto de números racionales: leyes formales. — a) A las operaciones fundamentales de adición y de multiplicación entre dos números racionales $\alpha = a/a'$ y $\beta = b/b'$, las definiremos en la siguiente forma:

Suma $\alpha + \beta$

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} = \frac{a\,b' + a'\,b}{a'\,b'}. \qquad [6\text{-}8]$$

Nótese que $a'\,b' \neq 0$, según § 3-8, y por tanto, la operación es siempre posible, es decir, es conexa y cerrada (§ 2-4, a).

La sustracción se define como operación inversa de la suma.

Producto $\alpha \,.\, \beta$

[6-9] $$\frac{a}{a'} \,.\, \frac{b}{b'} = \frac{a \,.\, b}{a' \,.\, b'}.$$

Aquí también es $a' b' \neq 0$, y por tanto, la operación es siempre posible, es decir, es conexa y cerrada.

El cociente se define como operación inversa del producto.

Para que las operaciones de suma y de producto así definidas se refieran efectivamente a los entes que hemos llamado números racionales, es decir, a las clases de pares ordenados de números enteros, y no sólo a estos pares (§ 2-4, *a*), debe ser válida en las definiciones [6-8] y [6-9] la *ley uniforme* de fácil demostración:

[6-10] $\alpha = \alpha_1$ y $\beta = \beta_1$ implica $$\begin{cases} \alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1, \\ \alpha . \beta = \alpha_1 . \beta_1. \end{cases}$$

Decir que las definiciones [6-5], [6-8] y [6-9] son convenciones arbitrarias o libres creaciones de la mente humana, es un desafío al buen sentido, pues tienen su origen en la resolución de problemas concretos. *No es tampoco legítimo afirmar que un par de enteros es un número racional*; para que así sea, es necesario además adoptar las definiciones [6-5], [6-8] y [6-9], comprobando que se cumple para ellas el principio de permanencia de las leyes formales (§ 2-6). En efecto:

b) El sistema con dos operaciones (o de doble composición, § 5-12, *b*) que forman los números racionales cumple las leyes:

		Adición	*Multiplicación*
[6-11]	*Asociativa*	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha . \beta) . \gamma \quad \alpha . (\beta . \gamma)$
[6-12]	*Modular*	$\alpha + (0\ 1) = \alpha$	$\alpha \,.\, (1\ 1) = \alpha$
[6-13]	*Conmutativa*	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \,.\, \beta = \beta \,.\, \alpha$
[6-14]	*Distributiva*	$\alpha \,.\, (\beta + \gamma) = \alpha \,.\, \beta + \alpha \,.\, \gamma$	
[6-15]	*Cancelativa*	$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ *implica* $\beta = \gamma$	$\alpha . \beta = \alpha . \gamma$ y $\alpha \neq 0\ 1$ *implica* $\beta = \gamma$.

Ley de inversión aditiva: Dado el número racional α, *existe siempre el número opuesto,* $-\alpha$, *tal que:*

[6-16] $$\alpha + (-\alpha) = 0\ 1\,.$$

El cumplimiento de estas leyes por los números racionales nos asegura que éstos forman un dominio de integridad (§ 5-12, *c*), es decir, un anillo conmutativo sin divisores de cero, pues éste se define precisamente por ellas. Basta expresar los números racionales α y β por sus respectivas fracciones a/a' y b/b', aplicar las definiciones [6-5], [6-8] y [6-9] y tener en cuenta el cumplimiento de las leyes [6-11] a [6-16] en el dominio de los enteros, según hemos visto en el § 3, para *demostrar* fácilmente los teoremas enunciados por las mismas leyes en el campo de los números racionales (hágase).

Para efectuar la sustracción, es decir, resolver la ecuación

[6-17] $$\beta + x = \alpha,$$

aplicaremos la regla general dada en el § 3-6, *a*:

[6-18] $$x = \alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

esto es, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

3. **Isomorfismo con los enteros.** — Consideremos la clase de los números racionales cuyo denominador sea 1, y hagamos corresponder a cada uno de ellos el entero que está en su numerador. La correspondencia biunívoca así establecida conserva la adición y la multiplicación (cfr. § 3-5), pues si $\alpha = a/1 \leftrightarrow a$, $\beta = b/1 \leftrightarrow b$, entonces tendremos que $\alpha + \beta = (a + b)/1 \leftrightarrow a + b$, $\alpha \, . \, \beta = (a \, . \, b)/1 \leftrightarrow a \, . \, b$.

Así, desde el punto de vista de la teoría de los enteros, éstos y los números racionales de la forma $a/1$ corresponden a un concepto *esencialmente único* (§ 1-6) y pueden por tanto identificarse.

Representaremos un número entero por la fracción

[6-19] $$s = s/1 = ns/n.$$

Si el numerador a es múltiplo del denominador a' según [6-2], el número racional a/a' toma la forma [6-19] para $n = a'$. Recíprocamente, [6-5] nos dice que si el número racional es igual a un entero $s/1$ se cumplirá [6-2], por tanto, *la condición necesaria y suficiente para que un número racional sea entero es que el numerador sea múltiplo del denominador.* Un número racional no entero suele designarse por *número fraccionario*.

En esta forma logramos la nueva ampliación del concepto de número, siguiendo el método genético expuesto en el § 1-6, con lo que generalizado ya el concepto de número, el nuevo campo de los números racionales queda clasificado así:

$$\text{Números racionales} \begin{cases} \text{enteros} \begin{cases} \text{positivos (naturales).} \\ \text{negativos y cero.} \end{cases} \\ \text{fraccionarios.} \end{cases}$$

Recordando los teoremas (§ 3-8) sobre números enteros, referentes a productos de valor nulo, con demostraciones basadas en las leyes formales, subsistirán con éstas dichos teoremas [3-24] y [3-25]. Además quedará probado también que *un número racional a/a' es nulo cuando, y sólo cuando, lo es el numerador* (siendo siempre $a' \neq 0$).

4. **La división en el campo racional. Operaciones racionales.** — Vamos ahora a examinar algo que distingue esencialmente los enteros de los números racionales.

Supuestos los enteros $b \neq 0$, $b' \neq 0$, $a' \neq 0$, al tener en cuenta la definición de igualdad [6-5], la resolución en x, x' de

[6-20] $\frac{b}{b'} \cdot \frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$ equivale a la de $a' \, b \, x = a \, b' \, x'$.

Esta se verifica para $x = a \, b'$ y $x' = a' \, b$ (en que para $a' \neq 0$ es $x' \neq 0$, cuando, y sólo cuando, sea $b \neq 0$, según el § 3-8). Esta solución es única, pues otra solución, x_1/x_1' de [6-20], al verificar $a' \, b x_1 = a \, b' \, x_1'$ por la misma [6-5], será igual a la dada por:

$$\frac{x}{x'} = \frac{a \, b'}{a' \, b} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b'}{b} \quad \text{en que} \quad \frac{b'}{b} \cdot \frac{b}{b'} = 1.$$

Por lo tanto, *en el campo racional, la división de divisor no nulo*, es decir, la resolución de la ecuación

[6-21] $\beta \cdot \xi = \alpha, \quad (\beta \neq 0)$

es siempre posible unívocamente. Si dos números se llaman *recíprocos* cuando su producto es la unidad, todo número $\beta \neq 0$ tendrá un solo recíproco $1/\beta$, y podrá darse como *regla general de división*: El cociente $\alpha : \beta$ con $\beta \neq 0$ se obtiene multiplicando el dividendo α por el recíproco del divisor β, es decir,

[6-22] $\alpha : \beta = \alpha \cdot (1/\beta) \quad (\beta \neq 0)$.

Como en el caso de números enteros es

[6-23] $a : b = a/b \quad (b \neq 0)$,

podremos también emplear el símbolo de fracción / para indicar la división.

Así, pues, en el campo de los números racionales, las cuatro operaciones, de adición, sustracción, multiplicación y división de divisor no nulo, por eso llamadas *operaciones racionales*, son siempre posibles. En cambio, *la división por cero es imposible* (o indeterminada, si el dividendo es nulo).

Según vimos en el § 5-12, *d*, diremos también que el conjunto de todos los números racionales forma un cuerpo conmutativo o un campo de racionalidad. Ahora la ley modular de la multiplicación [6-12] es equivalente a la ley cancelativa de la multiplicación [6-15] dentro del marco de las demás leyes formales, por existir número recíproco de otro no nulo (cfr. § 3-7).

Por basarse en las leyes formales, es inmediato que en este campo, la regla de los signos (§ 3-9) conserva también su validez.

5. **La desigualdad en el campo de los números racionales.** — *a*) Las fracciones cuyos términos tengan el mismo signo se llamarán *positivas* (mayores que cero), y las de términos de distinto signo, *negativas* (menores que cero) ; entonces se aplica como definición la *regla general de desigualdad*, dada en § 3-9, es decir:

[6-24] $\alpha > \beta$ *cuando, y sólo cuando, es* $\alpha - \beta > 0$.

Si los dos números son enteros, esta definición coincide con la dada en § 3-9. Además, tiene las propiedades fundamentales:

Entre dos números racionales, α *y* β*, existe una, y sólo una, de las relaciones:*

[6-25] $\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha > \beta.$ (*Ley de tricotomía*).

En efecto, si tomamos por denominadores enteros positivos (§ 6-1), por la misma ley de tricotomía y la regla general de desigualdad, ya demostradas en el dominio de los enteros, ha de darse uno, y sólo uno, de los casos $ab' - a'b < 0$, $= 0$ ó > 0, lo que asegura lo mismo para la diferencia $\alpha - \beta = (ab' - a'b)/(a'b')$, de acuerdo con la definición anterior de fracciones negativas, nulas o positivas.

[6-26] *Si es* $\alpha < \beta$, *y* $\beta < \gamma$, *es* $\alpha < \gamma$. (*Ley transitiva de la monotonía*).

Pues siendo positivos por hipótesis los números $\gamma - \beta$ y $\beta - \alpha$, en virtud de dicha definición, también lo es su suma, y por [6-16] queda:

$$(\gamma - \beta) + (\beta - \alpha) = \gamma + (-\beta) + \beta + (-\alpha) = \gamma + (-\alpha) = \gamma - \alpha,$$

luego: $\gamma > \alpha.$

El cumplimiento de [6-25] y [6-26] asegura que mediante la relación de desigualdad queda *ordenado* (§ 2-7) el conjunto de todos los números racionales.

Además, *también se cumplen las leyes de monotonía de la adición y de la multiplicación,* establecidas en el § 3-4, para los enteros.

Un cuerpo (§ 5-12, *d*) en que pueda definirse una relación de orden cumpliendo estas leyes, se llama *cuerpo ordenado.* Así, pues, lo es el de los números racionales.

Entonces, todas las propiedades del dominio de los enteros que se deduzcan exclusivamente de las leyes formales, [6-11] a [6-16], [6-24] a [6-26], [2-18] y [3-13], subsistirán para las fracciones, sólo con que en los respectivos enunciados se sustituya entero por fracción. Lo mismo ocurrirá en el estudio del número real (§ 7-5) y del complejo (§ 9-5), y aun en muchos otros sistemas aritméticos. Aquí radica una de las más importantes ventajas con que la Matemática moderna utiliza el formalismo lógico, al sacarle el máximo de sus posibilidades. Ello produce gran economía de esfuerzo, al evitar una repetición mecánica de demostraciones análogas (paraíso trillado, que anhelan los mediocres), y una mayor penetración del conocimiento de las diversas teorías al desentrañar en los diversos conceptos hasta qué punto las condiciones que los definen y relacionan influyen en las conclusiones que de ellos se establecen.

b) Ya hemos señalado (§ 6-4) una distinción esencial entre los números racionales y los enteros. Otra diferencia importante resulta del teorema:

Dadas dos fracciones, $\alpha < \beta$*, existe siempre una fracción* γ *tal, que* $\alpha < \gamma < \beta$, como lo hemos probado (§ 2-7, ej. 4).

Este teorema muestra que al no tener elementos consecutivos la ordenación según la relación de desigualdad de los números racionales, no será aplicable a ellos el principio de in-

ducción completa (§ 2-2 y § 3-6, *c*) respecto de dicha ordenación, ni el teorema básico de los divisores de uno (§ 5-2, *a*), mediante el que desarrollábamos la teoría de la divisibilidad numérica en el § 5.

A pesar de que los números racionales *positivos* no tengan primer elemento (§ 2-7) en la ordenación según la relación de desigualdad, se tiene:

Teorema de ARQUÍMEDES (ya conocido por EUDOXO): *Dados* α *y* β *con* $0 < \alpha < \beta$ *existe un número natural* n *tal que* $n\,\alpha > \beta$. En la teoría del número real y en la representación geométrica de los números este teorema adquiere su profundo significado; intuitivamente dice que por pequeño que sea $\alpha > 0$, y por grande que sea $\beta > 0$, sumando suficiente número de α llegaremos a sobrepasar β. En efecto, si $\alpha = a/a'$ y $\beta = b/b'$, habremos de hallar un n que cumpla $n \cdot (a/a') - (b/b') = (n\,a\,b' - a'\,b)/a'\,b' > 0$, es decir $n\,a\,b' > a'\,b$, bastando escoger $n \geqq a'\,b$.

El mismo conjunto de fracciones positivas, *bien ordenado*, según [2-21], del § 2-7, ej. 5, muestra que entonces deja de ser válido el teorema de ARQUÍMEDES; pues, por ejemplo, ningún múltiplo de $a/2$ quedará *detrás* de 1/3 en dicha ordenación. Otros muchos ejemplos pueden darse, como el de los infinitésimos (§ 24-3) de magnitudes *no-arquimedianas*.

c) Diremos que un numero variable a_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ crece (decrece) *monótona indefinidamente* (es decir, sin fin), si la sucesión de valores $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es monótona creciente (decreciente) o sea: $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots$, con la condición de que haya infinitos signos $<$ para el crecimiento (y lo mismo, con $>$, para el decrecimiento).

Diremos que el número variable a_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ crece *infinitamente*, si en la sucesión de valores $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, hay números en valor absoluto superiores a cualquier número dado.

En el campo de los números enteros, todo crecimiento o decrecimiento monótono indefinido es también infinito; pero aquí no sucede lo mismo.

Ejemplos de crecimiento *monótono indefinido*, pero no *infinito*, nos ofrecen las sucesiones:

1º) $$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \ldots\ldots < \frac{n}{n+1} < \ldots\ldots$$

2º) $$0{,}1 < 0{,}11 < 0{,}111 < \ldots\ldots < 0{,}11\ldots\ldots1 < \ldots\ldots$$

Los números de la primera sucesión, a pesar de crecer indefinidamente, se conservan inferiores a 1; los de la segunda son todos inferiores a 0,2.

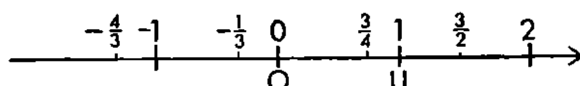
He aquí algunas sucesiones de números que crecen *infinitamente*, pero *no monótona indefinidamente*.

3º) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

4º) $4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9, \ldots\ldots$

5º) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots\ldots$

6. Representación gráfica de los números racionales. — Los números racionales pueden representarse también en el sistema de abscisas, introducido en el § 3-10. Por ejemplo, para representar el número 3/4 dividiremos la unidad, u, en cuatro partes iguales, y transportaremos una de ellas tres veces, a partir del origen, en el sentido del eje.



A todo punto que represente un número racional lo llamaremos simplemente *punto racional*, y al número de que tratamos, *abscisa del punto*.

Al conjunto de puntos x (en este caso racionales) situados entre otros dos, a y b, lo llamaremos *intervalo* (racional) de *extremos* a y b. Así, $a \leqq x \leqq b$ se designa por $[a, b]$.

La representación gráfica de los números racionales sugiere la importante propiedad, usualmente enunciada diciendo que su conjunto es *denso en todo el intervalo*, es decir, por pequeño que sea dicho intervalo, se encuentran siempre en él números racionales; del mismo modo, entre cada dos números racionales, por próximos que estén (por pequeña que sea su diferencia), podemos construir tantos como queramos (§ 6-5, b).

Como consecuencia de esta propiedad, los números racionales son *suficientes para todas las aplicaciones prácticas*. Por ejemplo: para medir la longitud, L, de un pizarrón. Si la unidad de longitud (p. ej.: 1 m) cabe 5 veces, y sobra un trozo menor que 1 m, tendremos:

$$5\,\text{m} < \text{L} < 6\,\text{m},$$

es decir, dos medidas aproximadas: una *por defecto*: 5 m, y otra *por exceso*: 6 m. Para mejorar la aproximación dividimos la unidad metro en un cierto número (p. ej.: 10) de partes iguales; si en el trozo que sobraba caben tres partes pero no cuatro, tendremos:

$$\left(5 + \frac{3}{10}\right)\,\text{m} = 5{,}3\,\text{m} < \text{L} < \left(5 + \frac{4}{10}\right)\,\text{m} = 5{,}4\,\text{m},$$

es decir, dos medidas *más aproximadas*. Así podemos seguir, tanto como lo permita la precisión del instrumento de medida usado, y *por grande que ésta sea, nunca nos obligará a salir de los números racionales*.

A pesar de ello, los números racionales *no llenan* la recta, cosa que ya los griegos reconocieron, y servirá de justificación a la introducción del número real (§ 7-1).

7. **Potencias de exponente entero.** — Definamos, por recurrencia entera (§ 3-6, *c*), la potencia de base cualquiera, $\alpha \neq 0$, y exponente *entero* p en la forma:

[6-27] $$\alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha^{p+1} = \alpha^p \, . \, \alpha,$$

de la que podemos pasar tanto de α^p a α^{p+1}, como de α^{p+1} á α^p, puesto que aplicar el principio de recurrencia entera (§ 3-6 ,*c*), implica quede definida la potencia para todo exponente *entero*. Entonces, resulta como *teorema*:

[6-28] *Si* $\alpha \neq 0$, *debe ser* $\alpha^0 = 1$,

pues en la segunda igualdad [6-27] quedará $\alpha^1 = \alpha^0 \, . \, \alpha$, y bastará aplicar la ley cancelativa [6-15] de la multiplicación (§ 6-2, *b*).

Aplicada esta misma ley al cociente de dos potencias de la misma base:

$$\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \frac{\overbrace{\alpha \, . \, \alpha \, . \, . \, . \, \alpha}^{m}}{\underbrace{\alpha \, . \, \alpha \, . \, . \, . \, \alpha}_{n}} \qquad (\alpha \neq 0)$$

según que sea $m > n$, es decir, $m = n + p$, ó $m = n$, o bien $n = m + p$ (siendo m, n y p números naturales), resulta:

$$\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^p, \quad \frac{\alpha^m}{\alpha^m} = 1, \quad \frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha^p}.$$

Esta distinción de casos queda evitada mediante **[6-27]**, **por** lo cual **para** m **y** n enteros cualesquiera queda

[6-29] $$\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n}, \quad (\alpha \neq 0),$$

y para $m = 0$ en particular:

[6-30] $$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}, \quad (\alpha \neq 0).$$

Si $\alpha = 0$ y $p > 0$, es $\alpha^p = 0$; si $\alpha = 0$ y $p = -n < 0$, la división [6-30] es imposible (§ 6-4). Nótese que en virtud de esto y [6-28], el símbolo 0^0 no tiene significado. Podríamos convenir en dárselo según la definición que apareciera más adecuada.

En ciertas teorías algebraicas y en la teoría de la continuidad de funciones (§ 25-3) aparecerá como ventajoso que subsista [6-28], aun para $\alpha = 0$, pero teniendo en cuenta el cálculo general de límites, nosotros *tomaremos* 0^0 *como símbolo de indeterminación* (§ 21-4).

Las mismas reglas operativas de los §§ 4-2 y 4-5, subsisten sin modificación, sintetizadas en las fórmulas:

[6-31] $$\begin{cases} \alpha^m \cdot \beta^m = (\alpha \cdot \beta)^m; & \alpha^m/\beta^m = (\alpha/\beta)^m; \\ \alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^m/\alpha^{-n} = \alpha^{m+n}; & (\alpha^m)^n = \alpha^{m \cdot n} \end{cases}$$

8. **Series de fracciones iguales y desiguales.** — *a*) En caso de ser iguales, llamamos así a una expresión de la forma:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, números racionales *cualesquiera* distintos de cero. También se dice que los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, son *proporcionales* a los $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. El valor común de estas fracciones se llama *razón* de proporcionalidad.

Llamando λ a la razón de proporcionalidad, se tiene:

$$\alpha_1 = \lambda\,\beta_1, \quad \alpha_2 = \lambda\,\beta_2, \ \ldots, \ \alpha_n = \lambda\,\beta_n.$$

Si multiplicamos estas igualdades por números racionales *cualesquiera*, k_i, positivos o negativos (algunos pueden ser nulos), y sumamos, se obtiene:

$$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \ldots + \alpha_n k_n = \lambda\,(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \ldots + \beta_n k_n),$$

y de aquí se obtiene la igualdad:

$$\frac{\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \ldots + \alpha_n k_n}{\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \ldots + \beta_n k_n} = \lambda,$$

válida siempre que el denominador no sea nulo.

Por este procedimiento, de una proporción se deducen una multitud de proporciones equivalentes, que suelen ser ventajosas en el cálculo.

EJEMPLO 1: De $\alpha/\beta = \gamma/\delta$, equivalente a $\alpha\,\delta = \beta\,\gamma$, se deduce:

$$\frac{\alpha \pm \gamma}{\beta \pm \delta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma} = \frac{\beta + \delta}{\beta - \delta}, \quad \frac{m\,\alpha + n\,\gamma}{p\,\alpha + q\,\gamma} = \frac{m\,\beta + n\,\delta}{p\,\beta + q\,\delta}.$$

b) En las series de fracciones desiguales, ordenémoslas de menor a mayor:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \leqq \frac{\alpha_2}{\beta_2} \leqq \frac{\alpha_3}{\beta_3} \leqq \ldots \leqq \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

o sea:

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$$

donde hay por lo menos un signo $<$, siendo por tanto $\lambda_1 < \lambda_n$.

Si todos los denominadores $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ son *positivos*, deducimos:

$$\begin{array}{l} \lambda_1\,\beta_1 = \lambda_1\,\beta_1 < \lambda_n\,\beta_1 \\ \lambda_1\,\beta_2 \leqq \lambda_2\,\beta_2 \leqq \lambda_n\,\beta_2 \\ \lambda_1\,\beta_3 \leqq \lambda_3\,\beta_3 \leqq \lambda_n\,\beta_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1\,\beta_n < \lambda_n\,\beta_n = \lambda_n\,\beta_n \end{array}$$

Como los números $\lambda_1\,\beta_1, \lambda_2\,\beta_2, \ldots, \lambda_n\,\beta_n$ son precisamente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, sumando resulta:

$$\lambda_1\,(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < \lambda_n\,(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n),$$

y por ser $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n > 0$, obtenemos (§ 3-4):

$$\lambda_1 < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n} < \lambda_n.$$

La fracción obtenida sumando los términos homólogos de varias otras de denominadores positivos está comprendida entre la mayor y la menor.

EJEMPLO 2: De $-7/3 < 3/2$ sería erróneo deducir

$$\frac{7}{-3} < \frac{7+3}{-3+2} < \frac{3}{2}$$

siendo en cambio correcto

$$\frac{-7}{3} < \frac{-7+3}{3+2} < \frac{3}{2}.$$

9. **Medias aritméticas, geométricas y armónicas.** — *a*) Si en las series de fracciones desiguales de § 6-8 es $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots\ldots = \beta_n = 1$, resulta: *dados los números* $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots\ldots \leqq \alpha_n$ *positivos, negativos o nulos, el número*

$$m = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n}{n}$$

está comprendido entre el menor y el mayor; y si todos son iguales, es igual a ellos.

Este número m se llama *promedio* o *media aritmética* de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Dados varios números, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, se llama *media armónica* al número x cuyo recíproco es media aritmética entre los recíprocos de éstos, es decir,

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right) : n,$$

o sea:

$$x = \frac{n}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_n}}.$$

Media geométrica o *proporcional* de los números *positivos* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, se llama al número

$$g = \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n}.$$

En particular, si se trata de sólo dos números positivos: $\alpha_1 > \alpha_2$, entre las medias aritmética, geométrica y armónica existe la relación:

$$\alpha_1 > \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} > \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} > \frac{2\,\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} > \alpha_2.$$

En efecto:

$$\alpha_1 - m = \alpha_1 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} > 0$$

$$m^2 - g^2 = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 - \alpha_1 \alpha_2 = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)^2 > 0$$

$$g^2 - x^2 = \alpha_1 \alpha_2 - \frac{4\,\alpha_1^2\,\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} = \frac{\alpha_1\,\alpha_2\,(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} > 0$$

$$x - \alpha_2 = \frac{2\,\alpha_1\,\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \alpha_2 = \frac{\alpha_2\,(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} > 0.$$

EJEMPLO: $\alpha_1 = 16$; $\alpha_2 = 4$; $m = 10$; $g = 8$; $x = 32/5$.

b) Pero si es $\alpha_1 = \alpha_2$, entonces las tres medias son iguales a ellos. De aquí se deduce:

b_1) *Entre todos los pares de números positivos de suma constante, s, el producto máximo se obtiene cuando ambos son iguales a s/2.*

b_2) *Entre todos los pares de números positivos de producto constante p, la suma mínima se obtiene cuando ambos son iguales a* $\sqrt{p}$.

También se prueba, en general:

b_3) *El producto de n números positivos de suma constante, s, es máximo cuando éstos son iguales a s/n.*

Si para demostrarlo fuésemos sustituyendo pares de números por su media aritmética, puede resultar un proceso indefinido, que para tratarlo con rigor requiera conocer la teoría de los límites. Es mejor aplicar la inducción completa (§ 2-2), en la siguiente forma:

El teorema es cierto, como hemos visto, para dos factores, lo que también se comprueba por:

$$(m - z) \cdot (m + z) = m^2 - z^2$$

de suma constante $s = 2m$, y que es máximo para $z = 0$.

Supuesto ahora el teorema cierto para $n - 1$ factores, vamos a demostrarlo para n factores de suma:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n = s,$$

y cuya media aritmética es $m = s/n$.

Si no son todos los factores iguales a m, habrá algún $\alpha_1 < m$, y algún otro $\alpha_2 > m$; entonces, siendo p y q números positivos, pongamos $\alpha_1 = m - p$, $\alpha_2 = m + q$, y sustituyamos el producto $\alpha_1 \alpha_2 = (m - p) \cdot (m + q)$, cuyos factores suman $2m - p + q$, por el de igual suma:

$$m \cdot (m - p + q) = \alpha_1 \alpha_2 + pq > \alpha_1 \alpha_2,$$

es decir, será

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n < m \cdot (m - p + q) \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n.$$

Por haber supuesto el teorema cierto para $n - 1$ factores, es

$$(m - p + q) \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n \leqq m^{n-1},$$

por lo que podremos escribir para el producto de los n *factores desiguales* dados:

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n < m^n,$$

como queríamos demostrar.

De aquí resulta que también *en el caso de varios números positivos, la media geométrica no supera a la aritmética*, y al ser

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n \geqq n \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n} = n \sqrt[n]{p},$$

resulta:

b_4) *La suma de n números positivos de producto constante, p, es mínima cuando éstos son iguales a* $\sqrt[n]{p}$.

EJERCICIOS

1. Efectuar las demostraciones completas de los teoremas que se han enunciado.

2. La suma de dos números positivos recíprocos no puede ser inferior a 2.

3. Si a, b, c son no todos iguales, se verifica $a^2 + b^2 + c^2 > ab +$

$+ bc + ca$; $(a + b - c)^2 + (a + c - b)^2 + (b + c - a)^2 > ab + bc + ca$.

4. Efectuar la operación:

$$\left(\frac{x + (1/y)}{x + \dfrac{1}{y + (1/z)}} - \frac{1}{y(xyz+x+z)}\right) : \left(\frac{1}{1 + \dfrac{a}{b + (c/d)}} + \frac{a}{a + b + \dfrac{c}{d}}\right)$$

5. Dada la sucesión

$$\frac{1}{1}\quad \frac{2}{1}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{3}{1}\quad \frac{2}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{4}{1}\quad \frac{3}{2}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{1}{4}\ \ldots,$$

en la que están contenidos, aunque repetidos, todos los números racionales positivos, demostrar que la fracción p/q ocupa el lugar $\frac{1}{2}(p + q - 1)(p + q - 2) + q$. **Demostrar que las distintas expresiones fraccionarias** de 2 y de 3/5 ocupan respectivamente los lugares $\frac{1}{2}(9n^2 - 7n + 2)$; $32n^2 - 7n + 1$, en que n es un número natural cualquiera.

6. Transformar las siguientes proporciones, por adición o sustracción de sus términos, de manera que sólo en uno de ellos quede despejada la x:

$$1º)\quad \frac{a}{b + x} = \frac{c}{b - x};\qquad 2º)\quad \frac{x}{b + x} = \frac{a - x}{c - x};$$

$$3º)\quad \frac{x + a}{x} = \frac{x + b}{x - b};\qquad 4º)\quad \frac{x + a}{x} = \frac{x}{x - b}.$$

7. Para p y q números naturales, y a_1, a_2 números no-negativos cualesquiera, demostrar es $(a_1^p - a_2^p)(a_1^q - a_2^q) \geqslant 0$, de donde $a_1^{p+q} + a_2^{p+q} \geqslant a_1^p a_2^q + a_1^q a_2^p$. Estudiar directamente el caso $p = q = 1$ como relación entre las medias aritmética y geométrica. Obtener para a_1, a_2, ..., a_n la generalización de la fórmula anterior:

$$n \sum_i a_i^{p+q} \geqslant (\sum_i a_i^p)(\sum_i a_i^q), \text{ y de ésta, la } \frac{1}{n} \sum_i a_i^h \geqslant \left(\frac{1}{n} \sum_i a_i\right)^h.$$

8. Comprobar que los siguientes pares de números enteros tienen enteras **sus tres medias: aritmética, geométrica y armónica**:

1º) $2kr^2(r^2 + s^2)$, $2ks^2(r^2 + s^2)$;

2º) $\frac{1}{2}ki^2(i^2 + j^2)$, $\frac{1}{2}kj^2(i^2 + j^2)$;

siendo i y j impares, y k, r y s enteros arbitrarios.

9. Aplicar los teoremas del § 6-9, *b*) a resolver: 1º) Entre todos los triángulos de igual base a y perímetro $2p$ hallar el de área máxima; 2º) Hallar la más corta de las cuerdas que pasan por un punto P interior a una circunferencia; 3º) Inscribir mediante una paralela a la base b de un triángulo acutángulo de altura h, el rectángulo de área máxima; 4º) Entre los triángulos rectángulos de área dada k^2, hallar el que tiene la menor hipotenusa.

NOTAS AL CAPÍTULO I

I. **El álgebra de Boole.** — En el § 1-2 hemos visto cómo podían establecerse las relaciones de J. DÍAZ GERGONNE entre dos *clases* o *conjuntos* (§ 1-1). Respecto de las *subclases* o conjuntos *contenidos* (§ 1-1) en un conjunto dado, I, llamado *total*, pueden además establecerse tres operaciones fundamentales:

La *unión* de X é Y, simbolizada por X ⌣ Y, entre dos conjuntos X(≦)I, Y(≦)I, formada por los elementos que pertenezcan a X ó a Y.

La *intersección* de X é Y, simbolizada por X ⌢ Y, entre dos conjun-

tos: $X(\leqq)I$, $Y(\leqq)I$, formada por los elementos que pertenecen a la vez a X y a Y.

El *complemento* de X, simbolizado por CX, de un conjunto $X(\leqq)I$, formado por los elementos de I que *no* pertenecen a X.

Estas operaciones se ilustran fácilmente, en forma gráfica, mediante diagramas (§ 1-2), cuyo uso se recomienda vivamente para aclarar cada una de las leyes que se expondrán seguidamente.

Una familia de conjuntos a la que pertenezcan la unión y la intersección de todo par de conjuntos de la familia y el complemento de todo conjunto de la familia, se llama un *cuerpo de conjuntos*.

Estas operaciones están también íntimamente relacionadas con las propiedades lógicas fundamentales que pueden establecerse entre proposiciones (§ 1-2). Las proposiciones pueden combinarse mediante las conexiones gramaticales "o", "y", "no", para dar nuevas proposiciones, en la misma forma en que se combinan clases mediante "unión", "intersección" y "complemento", para dar nuevas clases. Si p representa la proposición "$a \in X$", y q la "$a \in Y$", entonces:

$p \cup q$ representa $a \in X$ "o" $a \in Y$, es decir, $a \in (X \cup Y)$;
$p \cap q$ representa $a \in X$ "y" $a \in Y$, es decir, $a \in (X \cap Y)$;
Cp representa a "no" pertenece a X, es decir, $a \in CX$.

Obsérvese que $p \cup q$ no excluye la posibilidad de que valgan p y q a la vez. Entonces, de los dos significados que "o" puede tomar en castellano, corresponde el del latín *vel* y no *aut-aut*; este último se expresa así: $(p \cap Cq) \cup (q \cap Cp)$.

En el cálculo proposicional, la verdad se representa por I y la falsedad por 0. Las proposiciones que son siempre verdaderas, por su propia estructura lógica, se llaman *tautologías*. Así, cualquiera que sea la proposición p, siempre será verdadera la $p \cup Cp$, pudiendo escribirse: $p \cup Cp = I$.

La implicación "$p \rightarrow q$", que se lee: "p implica q" o "de p se deduce q", puede expresarse por las operaciones anteriores, mediante $(p \rightarrow q) = (Cp \cup q)$. Si p es la proposición "$a \in X$", y q la "$a \in Y$", entonces "$p \rightarrow q$" es equivalente a:

$$[(a \in X) \rightarrow (a \in Y)] = [(a \in CX) \cup (a \in Y)] = [(a \in (CX \cup Y)].$$

Si en un conjunto de pares ordenados de proposiciones, cada par está en implicación verdadera, se dice que las proposiciones de cada par están en *relación de implicación*. Así, para que las dos proposiciones "$a \in X$" y "$a \in Y$" estén en ese orden en relación de implicación para todo a, es necesario y suficiente que $X(\leqq)Y$, pues entonces y sólo entonces $CX \cup Y = I$.

Hemos dicho (§ 1-2, *a*) que una proposición es una expresión que tiene y sólo puede tener uno de los dos valores V (verdad) o F (falsedad). Las proposiciones compuestas quedan implícitamente definidas por sus *tablas de verdad*, obtenidas dando de todas las maneras posibles a las proposiciones simples componentes sus valores de verdad V o de falsedad F, es decir, formando las variaciones con repetición de dos objetos V y F con orden igual al número de proposiciones simples componentes (§ 11-1, notas 2 y 1). Por ejemplo:

p	q	Cp	$p \cup q$	$p \cap q$	$p \rightarrow q$	$p \cup Cp$	$p \cap Cp$
V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V	F

Obsérvese que $p \rightarrow q$ se ha formado como equivalente a la $Cp \cup q$. Dos proposiciones son equivalentes si y sólo si tienen la misma tabla de verdad. Así, formada la tabla de verdad de la condición necesaria y suficiente: $(p \rightarrow q) \cap (q \rightarrow p)$ se comprueba ser la que corresponde a darle el valor V o F según que p y q tengan o no el mismo valor de ver-

dad (§ 1-3). La tautología es una proposición que es siempre verdadera; tales son la $p \smile Cp$ (tercero excluído) y la negación de la $p \frown Cp$ (contradicción). También es una tautología (compruébese formando su tabla de verdad) el silogismo $[(p \rightarrow q) \frown (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$. En cambio, no es tautología la proposición compuesta $[(p \rightarrow q) \frown (r \rightarrow q)] \rightarrow (r \rightarrow p)$, aunque a veces tenga valor de verdad (§ 1-2, ejemplos 3 y 4).

Las operaciones del cálculo de clases y del cálculo de proposiciones tienen propiedades algebraicas, muchas de las cuales son idénticas a las reglas familiares de la Aritmética.

Así como las teorías matemáticas se desarrollan a partir de axiomas y definiciones (§ 1-8), cuya elección depende de la finalidad que busquemos, mediante las interpretaciones concretas de la teoría de que se trate, es decir, quedan en último término sugeridas por la experiencia, así también un sistema lógico parte de principios primeros, que van aceptándose tradicionalmente, por la experiencia mental que de ellos deriva.

Las leyes más importantes del álgebra de clases corresponden a las que cumple la relación de inclusión $(\leqq)$:

Reflexiva: $X(\leqq)X$;

Asimétrica: De $X(\leqq)Y$ e $Y(\leqq)X$ se deduce $X = Y$;

Transitiva: De $X(\leqq)Y$ e $Y(\leqq)X$ se deduce $X(\leqq)Z$,

por las cuales dicha relación $(\leqq)$ establece entre las subclases de I un orden parcial (§ 2-7, nota 1). Vimos también que la relación de divisibilidad establece entre los enteros un orden parcial (§ 5-2, *b*). Los subespacios lineales (punto, recta, plano, etc.) de un espacio lineal, los puntos de una recta relacionados por $\leqq$ entre sus abcisas, y muchos otros ejemplos, son sistemas parcialmente ordenados.

Un sistema parcialmente ordenado de un número finito de elementos puede siempre representarse por un diagrama de HASSE (§ 5-2, *b*), y recíprocamente, dibujando diagramas arbitrariamente, podemos definir sistemas abstractos parcialmente ordenados.

Del orden parcial "$[\leqq]$" podemos deducir el "$[\geqq]$", así como del "$\leqq$" se deduce el "$\geqq$", o del establecido por "divisor", el establecido por "múltiplo", dando lugar al llamado

PRINCIPIO DE DUALIDAD: *Cualquier teorema verdadero en todo sistema parcialmente ordenado por $[\leqq]$, subsiste como verdadero si en sus proposiciones se intercambian $[\leqq]$ con $[\geqq]$.*

Así, por ejemplo, pueden desarrollarse dualmente las teorías del m. c. d. y m. c. m. (§ 5-5).

A todo conjunto que contenga a la vez X e Y lo llamaremos *cota superior* de ambos (en la divisibilidad, múltiplo común), mientras que si está contenido en ambos, lo llamaremos *cota inferior* (en la divisibilidad, divisor común). Obsérvese que el conjunto $X \smile Y$ es la *cota superior mínima,* mientras que el $X \frown Y$ es la *cota inferior máxima,* por lo cual en la ordenación parcial dada por $(\leqq)$ diremos que $X \smile Y$ es un *supremo* (o extremo superior, § 23-14) de ambos, mientras que $X \frown Y$ es un *ínfimo* (o extremo inferior, § 23-14) de los dos. En la relación de divisibilidad, lo mismo ocurre (§ 5-5) respecto al m. c. m y m. c. d. de dos números *a* y *b*, por lo que se ha escrito:

m. c. m. de a y $b = a \smile b$; m. c. d. de a y $b = a \frown b$.

Se llama reticulado (en inglés *"lattice"*) *a todo sistema parcialmente ordenado tal, que cada par de elementos,* X *e* Y, *tengan supremo* $X \smile Y$ *e ínfimo* $X \frown Y$.

La ley asimétrica implica que cada par de elementos pueda solamente tener, a lo más, *un* supremo y *un* ínfimo.

Se demuestra que todo reticulado cumple las siguientes leyes:

Idempotente: $X \smile X = X$ y $X \frown X = X$;

Conmutativa: $X \smile Y = Y \smile X$ y $X \frown Y = Y \frown X$;

Asociativa: $X \smile (Y \smile Z) = (X \smile Y) \smile Z$ y $X \frown (Y \frown Z) = (X \frown Y) \frown Z$;

De consistencia: Son mutuamente equivalentes las condiciones
$$X\ [\leqq]\ Y,\ X \smile Y = Y \text{ y } X \frown Y = X;$$
De absorción: $X \smile (X \frown Y) = X \frown (X \smile Y) = X.$

Las demostraciones son análogas a la de la ley asociativa ya dada en detalle para la interpretación [5-17], válida en general si en lugar de múltiplo se lee cota superior y en lugar de divisor, cota inferior.

En cambio, un reticulado puede no cumplir (por ejemplo, los subgrupos de un grupo, § 5-12, *b* o bien fig. 14) la ley
Distributiva: $X \smile (Y \frown Z) = (X \smile Y) \frown (X \smile Z)$ y $X \frown (Y \smile Z) = (X \frown Y) \smile (X \frown Z)$.

Dos elementos, 0 e I, de un reticulado que para todo otro elemento X satisfagan $0\ [\leqq]\ X\ [\leqq]\ I$, se llaman *cotas universales*. En el reticulado dado se dice que CX es *complemento* de X si satisface la ley
Completiva: $X \smile CX = I$ y $X \frown CX = 0$.

Entonces, las cotas universales 0 é I tienen también las propiedades de:
Unión: $0 \smile X = X$ é $I \smile X = I$;
Intersección: $0 \frown X = 0$ é $I \frown X = X$;
mientras que en un reticulado *distributivo* la operación de tomar complemento, si existe, es *unívoca*, y cumple las leyes:
Dualitiva: $C(X \smile Y) = CX \frown CY$ y $C(X \frown Y) = CX \smile CY$;
Involutiva: $C(CX) = X$.

En efecto, dados dos complementos CX y C_1X, por las leyes de intersección, completiva, distributiva, completiva y de unión será $C_1X = C_1X \frown I = C_1X \frown (X \smile CX) = (C_1X \frown X) \smile (C_1X \frown CX) = 0 \smile (C_1X \frown CX) = C_1X \frown CX$, de donde por ley de consistencia $C_1X\ [\leqq]\ CX$. De la misma manera $CX\ [\leqq]\ C_1X$ y por ley asimétrica queda probada la unicidad del complemento $CX = C_1X$

Para demostrar, por ejemplo, la primera ley dualitiva, basta verificar mediante las propiedades anteriores de un reticulado distributivo que $(X \smile Y) \smile (CX \frown CY) = L$ y $(X \smile Y) \frown (CX \frown CY) = 0$, en virtud de la ley completiva. Si se aplica la ley conmutativa a la ley completiva, resulta la ley involutiva $C(CX) = X$, pero en un reticulado distributivo CX y C(CX) son además únicos, es decir X no es sólo *un* complemento de *un* complemento de X, sino que X es *el* complemento *del* complemento de X.

En un reticulado no distributivo con cotas universales, tal el formado por X, Y, Z independientes acotados por 0 é I, un elemento X puede tener más de un complemento $Y = CX$, $Z = CX$, y ser además $C(CX) = CY \neq Z \neq X$, aunque también sea $C(CX) = X$. Es decir, la negación de la negación puede ser distinta de la afirmación de partida en un reticulado lógico no distributivo. Puede no cumplirse tampoco la ley dualitativa: $C(X \smile Y) = CI = 0 \neq Z = Z \frown Z = CX \frown CY$.

Son ejemplos de cotas universales, el conjunto vacío y el total en las clases, o 1 y 0 en la divisibilidad (§ 5-2, *b*).

Diremos que *un reticulado es un álgebra de* BOOLE *si es distributivo y con cotas universales respecto a las que cualquier elemento tenga complemento.*

Demuéstrese:

Si B *es un sistema de elementos con las siguientes propiedades*:

1) B *tiene dos operaciones binarias, conexas y cerradas,* "$\smile$" *y* "$\frown$", *que satisfacen las leyes uniformes, indempotente, conmutativa, asociativa y distributiva*;

2) B *contiene dos elementos,* 0 *é* I, *que satisfacen las leyes de unión e intersección*;

3) B *tiene una operación unívoca y cerrada de complemento que cumple la ley completiva, entonces en* B *la relación* $X \smile Y = Y$ *es equivalente a la* $X \frown Y = X$, que es de orden parcial $X\ [\leqq]\ Y$ (*ley de consistencia*) *respecto a la cual todo par* X *é* Y *tiene por supremo* $X \smile Y$,

y por ínfimo $X \frown Y$, *dando así un álgebra de* BOOLE *que tiene* 0 *é* I *por cotas universales y cumple las leyes dualitiva e involutiva.*

La clase de todos los subconjuntos de un conjunto I, o el álgebra de proposiciones con las conexiones "o", "y", "no", son ejemplos de álgebras de BOOLE. Aun más, STONE ha demostrado que dada un álgebra de BOOLE B cualquiera, existe un cuerpo de conjuntos isomorfo a B (§ 3-5), dando así un modelo concreto o representación de B.

De lo anterior pueden deducirse reglas operatorias que faciliten el cálculo algebraico en sus diversas aplicaciones a muy diversas cuestiones.

II. **El algoritmo de la numeración.** — Al conjunto de reglas y convenios que permiten la representación de todos los números mediante varios signos, o varias palabras, se llama *sistema de numeración.*

Sistemas muy conocidos, de índole muy diversa, son el *romano* y el *decimal*. El primero descompone el número en suma o diferencia de otros varios, cada uno de los cuales está representado por un símbolo especial:

I, V, X, L, C, D, M;

el segundo, en vez de introducir nuevos símbolos para estos diversos sumandos, utiliza el principio *del valor relativo,* es decir, una misma cifra representa valores distintos según el lugar que ocupa. Los sistemas fundados en los mismos principios que el decimal, son los únicos que tienen interés aritmético.

El sistema decimal, ideado en la India (hacia el siglo VI antes de J. C.) y llevado a Europa por los árabes en la Edad Media, está fundado en el número fijo que llamamos *diez,* habiendo elegido éste y no otro, como base, por ser el número de dedos de ambas manos. Mas, desde el punto de vista aritmético, se puede establecer un sistema de numeración de igual naturaleza que el decimal, tomando como base un número cualquiera mayor que uno.

Toda combinación de operaciones fundamentales efectuadas con números cualesquiera a, b, c, ..., h, que da origen a un nuevo número, se llama *algoritmo.* Ahora vamos a estudiar el *algoritmo de la numeración,* compuesto de multiplicaciones y adiciones, como veremos.

La notación decimal depende de la división repetida por 10. Por ejemplo, 475 significa $4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$. Dado el número N, la cifra a de las unidades es el resto de dividir N por 10; es decir, $N = 10 \cdot q_1 + a$, con $0 \leqq a \leqq 9$. Si $q_1 = 0$, el símbolo que representa N es la cifra a; si $q_1 \neq 0$, se vuelve a dividir el número de decenas q_1 por 10, para hallar su resto menor que 10, es decir: $q_1 = 10 \cdot q_2 + b$ siendo b $(0 \leqq b \leqq 9)$ la cifra que queda a la izquierda de a. Y así se sigue para las demás cifras.

En general, y de modo análogo, los sistemas de numeración se basan en el siguiente *teorema fundamental*:

TEOR.: *Dada una base* $n > 1$, *todo número* N *puede descomponerse de modo único en la forma*

[I-1] $$N = a + b\,n + c\,n^2 + d\,n^3 + \ldots + f\,n^{k-2} + g\,n^{k-1} + h\,n^k$$

siendo a, b, c, ..., g, h, *números menores que* n.

En efecto, para expresar el número en forma polinómica, basta aplicar el método inverso del que seguíamos en el § 4-11, para pasar del polinomio al número, esto es, efectuar las divisiones siguientes:

[I-2]

$$\begin{array}{l|l}
N & n \\ \hline
a & q_1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
q_1 & n \\ \hline
b & q_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
q_2 & n \\ \hline
c & q_3
\end{array}
\quad \cdots \quad
\begin{array}{l|l}
q_{k-2} & n \\ \hline
f & q_{k-1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
q_{k-1} & n \\ \hline
g & h
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
N & = & q_1 n & + a \\
q_1 & = & q_2 n & + b \\
q_2 & = & q_3 n & + c \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q_{k-2} & = & q_{k-1} n & + f \\
q_{k-1} & = & h\,n & + g
\end{array}$$

Como, por ser $n > 1$, cada cociente es menor que el dividendo, los números q_1, q_2, q_3, ..., van disminuyendo; luego llegamos necesariamente a un cociente $q_k = h < n$, con el que terminamos la serie de divisiones; y como están ligados por las igualdades [I-2], estos números q_{k-1}, q_{k-2}, ..., q_1, N (de abajo a arriba) son precisamente los que calculábamos en [4-11] para formar el polinomio; luego, el resultado final, N, coincide con [I-1].

Recíprocamente, si a', b', c', ..., son números menores que n, hallados por cualquier otro método, los cuales satisfacen a la igualdad [I-1], escrita ésta en la forma

$$N = a' + [b' + c'n + d'n^2 + \ldots + h'n^{k-1}]\, n,$$

resulta (§ 5-1) que a' es precisamente el resto de dividir N por n, y el cociente es:

$$b' + c'n + d'n^2 + \ldots + h'n^{k-1} = b' + [c' + d'n + \ldots + h'n^{k-2}]\, n,$$

luego b' es el resto de dividir este número por n, etc. Y como la división es una operación uniforme, resulta que los números a', b', c', ..., que satisfacen a [I-1], son los mismos a, b, c, ... antes hallados, y por lo tanto, el problema admite una solución única.

Es esencial la restricción de que todos sean *menores* que n; sin ella admite el problema varias soluciones. Por ejemplo:

$$89 = 5.4^2 + 2.4 + 1 = 4^3 + 6.4 + 1 = 3.4^2 + 9.4 + 5 = \ldots..$$

Observemos también que la demostración del teorema no presupone el conocimiento de la práctica de la división decimal, pues la existencia del cociente y del resto han sido demostradas en el § 5-1.

Este teorema permite dar la *expresión de un número en el sistema de numeración de base n*. Para ello, adoptemos como *base* un número cualquiera $n > 1$, y representemos los $n - 1$ números menores que n por signos o *cifras* cualesquiera. Por ejemplo, si n es el número $1 + 1 + 1 + + 1 + 1 + 1$ (que en el sistema decimal llamamos *seis*), podemos adoptar las mismas cifras indias 1, 2, 3, 4, 5 que en el sistema decimal. Si, por el contrario, la base es el número *doce*, además de las cifras 1, 2, ..., 9, necesitamos otras dos, que pueden ser, por ejemplo, los símbolos μ y ν.

Dado un número cualquiera N, es posible descomponerlo en la forma [I-1] de un modo único; luego, el número está perfectamente determinado conociendo los coeficientes a, b, ..., h; y como éstos son todos menores que n, a cada uno podemos representarlo por una sola cifra; designaremos éstas por la notación: $\underline{a}$, $\underline{b}$, ..., $\underline{h}$, respectivamente.

Convendremos en representar el número N escribiendo estas cifras de derecha a izquierda, en el orden en que las hemos obtenido:

[I-3] $$N = \underline{h}\ \underline{g}\ \underline{f} \ldots \underline{b}\ \underline{a},$$

expresión convencional, cuyo significado es la igualdad [I-1], y que no debe confundirse con un producto.

Se indica la base del sistema en que está escrito un número, poniendo ésta como índice, a la derecha o a la izquierda, de este modo:

$$\underline{h}\ \underline{g}\ \underline{f} \ldots \underline{c}\ \underline{b}\ \underline{a}_{(n} \quad \text{o} \quad {}_{n)}\underline{h}\ \underline{g}\ \underline{f} \ldots \underline{c}\ \underline{b}\ \underline{a}.$$

Nótese que en el sistema de base n, este número n está expresado siempre por las cifras 10; y para evitar la ambigüedad que de este modo resultaría, dicho índice se escribe en el sistema decimal. Por ejemplo:

$$43\nu1\mu_{(12}, \quad 2347_{(9}, \quad 1101001_{(8}, \ldots$$

El valor de cada cifra depende, pues, del lugar que ocupa en la expresión [I-3]; la primera cifra de la derecha expresa unidades *simples*; la siguiente representa unidades de *primer orden* (cada una de las cuales equivale a n simples); la siguiente, unidades de *segundo orden* (cada una de las cuales es n^2), etc.

Puede suceder que algunas divisiones sean exactas; el resto es entonces 0, y en la serie de cifras [I-3] escribiremos el símbolo 0 en el

lugar correspondiente. Su omisión alteraría completamente el significado de la expresión [I-3]; en cambio, no se altera agregando ceros a la izquierda.

La *representación diádica o binaria*, de base 2, tiene interés para algunas cuestiones matemáticas y por haberse adoptado como la más apropiada en las modernas máquinas calculadoras electrónicas. En esta notación, los primeros números naturales son:

Decimal:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9;
Diádica:	1,	10,	11,	100,	101,	110,	111,	1 000,	1 001.

¿Cuáles son los números que se representan con la cifra 1 seguida de ceros?

La suma y producto se calculan muy fácilmente, en cualquier sistema, aplicando las reglas conocidas para el decimal, reglas cuya demostración se base en la expresión [I-1]. Por ejemplo, en el sistema diádico es $101 + 111 = 1\,100$.

Las propiedades de los números naturales que se estudian en Matemática son válidas cualquiera sea el sistema de representación adoptado, y pueden ser demostradas a partir de los axiomas y definiciones dados en el § 2. Las propiedades que varían con los sistemas de representación no son propiedades de los números naturales, sino de los polinomios [I-1] que los representan. Por ejemplo, $1+1+1$ se representa por una cifra, 3, en el sistema decimal, y por dos, 11, en el diádico. Lo que verdaderamente interesa son las propiedades de los números, y no la de los símbolos que los representan.

La comprensión del uso de tablas de cálculo numérico se facilita por aplicación del algoritmo de la numeración.

Para el producto de números de muchas cifras, es muy práctico el uso de las *Rechentafeln*, de A. L. Crelle (W. de Gruyter, Berlín, 1930), que contienen todos los productos entre números inferiores a 1 000. Puede considerarse este libro, por lo tanto, como una tabla de Pitágoras para el sistema de base 1 000, y son necesarias 999 cifras; podemos adoptar como tales las mismas expresiones: 1, 2, ..., 99, 100, ..., 999. Para expresar un número en este sistema, se sigue la regla: *se dividen las cifras del número dado, a partir de la derecha, en grupos de a tres; los grupos obtenidos expresan las unidades simples, de primer orden, segundo, etc.*

Así tendremos, por ejemplo:

$$40812597063 = \overline{40}\;\overline{812}\;\overline{597}\;\overline{063}_{(1000}$$

Todas las reglas operativas son, pues, válidas cuando se adopta esta base 1 000, operando con grupos de tres cifras en vez de cifras aisladas.

Para la adición no tendrá ventaja la adopción de esta nueva base 1 000; pero sí la tiene para la multiplicación, utilizando las tablas de Crelle. Con ellas abreviaremos considerablemente el producto de dos números de muchas cifras, aplicando la misma regla del sistema decimal, pero en vez de incorporar al producto siguiente las unidades superiores que resulten de cada producto, es mejor escribir éste íntegro; y en vez de correr cada producto parcial un lugar a la izquierda respecto del anterior, será preciso trasladarlo *tres* lugares.

Ejemplo: Multiplicar 42 965 062 por 684 213:

Productos tomados de la tabla.		
213 . 62	=	13 206
213 . 965	=	205 545
213 . 42	=	8 946
684 . 62	=	42 408
684 . 965	=	660 060
684 . 42	=	28 728

		42	965	062
			684	213
			13	206
		205	545	
	8	946		
		42	408	
	660	060		
28	728			
29 397	253	966	206	

Claro está que modernamente se han generalizado las máquinas de multiplicar, que permiten efectuar los productos con rapidez y seguridad considerables, sin necesidad de comprobación.

III. Complementos sobre divisibilidad numérica. — *a*) RESTOS POTENCIALES. — Para estudiar fácilmente cuestiones de divisibilidad, es conveniente conocer los restos que dejan las potencias sucesivas de un número, es decir, sus llamados *restos potenciales*, equivalentes al cálculo de potencias en el álgebra I_m de un sistema de clases residuales módulo m (§ 5-12, *a*). Obsérvese que aquí no puede demostrarse como teorema la fórmula [6-28], porque la ley cancelativa puede no cumplirse para m compuesto. Del mismo modo que $3 . 5 \equiv 3 . 9$ (mód. 12), no implica la congruencia incorrecta $5 \equiv 9$ (mód. 12), tampoco de $3^1 \equiv 3^0 . 3$ (mód. 12) podría deducirse $3^0 \equiv 1$ (mód. 12), aunque sea cómodo adoptar como definición $a^0 \equiv 1$ (mód. m) si $a \not\equiv 0$ (mód. m). (Cfr. § 2-3).

Un elemento a de I_m se llama *nilpotente* si existe una potencia de a tal que $a^h \equiv 0$ (mód. m). Por ejemplo, lo es 5 respecto al módulo $m = 25$. Se prueba fácilmente (hágase) que si el módulo p es primo, en I_p no pueden existir otros elementos nilpotentes que los $a \equiv 0$ (mód. p).

Un elemento a de I_m se llama *unipotente*, si existe una potencia de a tal que $a^h \equiv 1$ (mód. m), y el menor exponente no nulo, g, tal, que $a^g \equiv 1$ (mód. m) recibe el nombre de *gaussiano* de a (o *período de los restos potenciales* de a) respecto al módulo m.

TEOR. 1: *La condición necesaria y suficiente para que a sea unipotente respecto al módulo m, es que a y m sean primos entre sí* (§ 5-5, *b*).

En efecto, la condición es necesaria, ya que un factor primo de m lo es de $a^g - 1$, y por lo tanto, no puede serlo ni de a^g ni de a (§ 5-9, a_1). La condición es también suficiente, pues si a y m son primos entre sí, hay un número finito de potencias de a incongruentes en I_m (§ 5-12, *a*), y si para $h > k$ es $a^h \equiv a^k$ (mód. m), es decir: $a^k(a^{h-k} - 1) \equiv 0$ (mód. m), entonces, por el teorema de EUCLIDES (§ 5-6, *c*), ha de ser $a^{h-k} \equiv 1$ (mód. m), con $h - k \geqq g$.

Teniendo en cuenta esta última desigualdad, y además que, para un exponente $h = g . q + r$, $(r < g)$ es

$$a^h \equiv a^{g.q+r} \equiv (a^g)^q . a^r \equiv 1^q . a^r \equiv a^r \text{ (mód. } m),$$

resulta que: *los restos potenciales del número a primo, con el módulo m forman una sucesión periódica, que comienza en* $a^0 = 1$, *y de período igual al gaussiano, g.*

Si el módulo p es primo, todos los números naturales no divisibles por p son unipotentes, y su gaussiano es un divisor de $p - 1$, según afirma el célebre e importante teorema de FERMAT:

TEOR. 2: *Si a es un número natural cualquiera, no divisible por el número primo p, entonces es:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ (mód. } p). \quad \text{[I-4]}$$

En efecto, los múltiplos de a:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 . a, \quad a_2 = 2 . a, \quad \ldots, \quad a_{p-1} = (p - 1) . a$$

son incongruentes dos a dos, es decir, forman un sistema completo de números incongruentes mód. p (§ 5-12, *a*), pues la diferencia

$$a_r - a_s = (r - s) . a, \quad (p > r - s > 0),$$

no puede ser múltiplo de p, al ser $r - s$ y a primos con p (§ 5-9, a_1). De aquí resulta:

$$a_1 . a_2 \ldots a_{p-1} \equiv 1 . 2 . 3 \ldots (p - 1), \text{ (mód. } p),$$

es decir:

$$(p - 1) ! \, a^{p-1} \equiv (p - 1) ! \text{ (mód. } p),$$

y por la ley cancelativa [5-24] para p *primo*, queda demostrado [I-4].

Obsérvese que puede ser $p-1>g$; por ejemplo, en I_7 es $2^3\equiv 1$, $4^3\equiv 1$, $6^2\equiv 1$ (mód. 7).

Si a no es primo con m, entre las potencias de a calculadas en I_m sólo puede haber un número finito de números incongruentes dos a dos (§ 5-12, a), por lo cual *la sucesión de restos potenciales de a respecto a m será también periódica a partir del primer resto que se repita, y constará de una parte no periódica, formada al menos por* $a^0\equiv 1$, *que no se repite.* Por ejemplo, los restos potenciales de 15 (mód. 12) son 1; 3, 9; 3, 9; .. ;los de 2 (mód. 12) son 1, 2; 4, 8; 4, 8; ..

b) CRITERIOS PRÁCTICOS DE DIVISIBILIDAD. — Dado un número N escrito en el sistema de base n, sus cifras vienen dadas mediante [I-1].

Sean r_1, r_2, r_3, ... los restos potenciales de n, es decir:

$$n^0\equiv 1,\ n^1\equiv r_1,\ n^2\equiv r_2,\ n^3\equiv r_3,\ldots,\ n^k\equiv r_k \pmod{m};$$

y multiplicando estas congruencias por a, b, c, d, ..., h, respectivamente, y sumándolas, resulta:

[1-5] $$N\equiv a+b\,r_1+c\,r_2+d\,r_3\ldots+h\,r_k \pmod{m}.$$

Por lo tanto:

1º *El resto* (mód. *m*) *del número* $N=\underline{h}\ldots\underline{d}\,\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a}$, *escrito en el sistema de base n, es el mismo que el de la suma de los productos de sus cifras a, b, c, ..., h, por los restos de las potencias sucesivas:* n^0, n^1, n^2, ...

2º *La condición necesaria y suficiente para que* N *sea divisible por m es que lo sea el número* [I-5] *así formado.*

Obsérvese que también pueden utilizarse algunos restos por exceso, en vez de los restos por defecto. Sea, por ejemplo, r'_3 el resto por exceso de n^3, es decir, $r_3=m-r'_3$, y por tanto,

$$N\equiv a+b\,r_1+c\,r_2+d\,(m-r'_3)+\ldots\equiv$$
$$\equiv a+b\,r_1+c\,r_2-d\,r'_3+\ldots \pmod{m},$$

luego, si algún resto por defecto es mayor que el resto por exceso, convendrá utilizar éste en vez de aquél, sin otra variación que la de *restar*, en vez de *sumar*, el producto por la cifra respectiva. Si la sustracción no es posible, basta sumar un múltiplo conveniente del módulo para que sea factible.

Haremos aplicación de este criterio general, para deducir los caracteres de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, ..., en el sistema decimal. Calcularemos, pues, los restos potenciales de 10, respecto de cada uno de estos módulos.

Si 10 es nilpotente en I_m el criterio sólo afecta a las últimas cifras, correspondientes a potencias de 10 no múltiplos de m. Así tendremos:

m	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	...
2	1	0	0	0	.....	.....	.....
4	1	2	0	0	.....	.....	.....
8	1	2	4	0	.....	.....	.....
....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
5	1	0	0	0	.....	.....	.....
25	1	10	0	0	.....	.....	.....
....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

y aplicando el criterio general anterior, resultan los siguientes criterios de divisibilidad:

MÓDULO 2: Ha de ser $a = \dot{2}$.

MÓDULO 4: Ha de ser $a + 2b = \dot{4}$.

MÓDULO 8: Ha de ser $a + 2b + 4c = \dot{8}$.

MÓDULO 5: Ha de ser $a = \dot{5}$, es decir, $a = 0$, o bien $a = 5$.

MÓDULO 25: Ha de ser $a + 10b = \dot{25}$, es decir: el número formado por las dos últimas cifras ha de ser múltiplo de 25: 00, o 25, o 50, o 75.

El lector puede enunciar las reglas respectivas, traducción de estas condiciones, al lenguaje vulgar. Análogamente resultan las reglas para $m = 2^h$ y para $m = 5^h$; pero carecen de interés.

Para los módulos que contienen factores primos distintos de 2 y 5, todos los restos potenciales de 10 son distintos de cero, y por lo tanto intervienen todas las cifras. Basta dar el período de restos para modulos que sólo contienen un factor primo.

m	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	...
3	1	....	....	....	....	....	....	....
9	1	....	....	....	....	....	....	....
7	1	3	2	—1	—3	—2	....	....
11	1	—1	....	....	....	....	....	....
13	1	—3	—4	—1	3	4	....	....
....	....	....	....	....	....	....	....	....

Criterio de divisibilidad por 3 o por 9. — La suma de todas las cifras ha de ser un múltiplo de 3 o 9, respectivamente.

Criterio de divisibilidad por 7. — Como los restos 6, 4, 5 son mayores que los restos por exceso 1, 3 y 2, convendrá utilizar éstos; y así resulta que la condición para que sea N divisible por 7, es:

$$(a+3b+2c)-(d+3e+2f)+(g+3h+2i)-(j+3k+2l)+\ldots=\dot{7}.$$

Así, por ejemplo, el número 1 107 421 es múltiplo de 7, por ser

$$1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 7 - 2 \cdot 1 + 1 = 7.$$

Criterio de divisibilidad por 11. — Tomando en vez del resto 10 el resto por exceso 1, resulta, como condición de divisibilidad por 11:

$$a-b+c-d+e\ldots = (a+c+e+\ldots) - (b+d+\ldots) = \dot{11};$$

por ejemplo, el número 80 797 no es múltiplo de 11, por ser la suma alternada de sus cifras $7 + 7 + 8 - 9 = 13$; su resto es, pues, 2.

c) INDICADOR DE UN NÚMERO. — Dado un número cualquiera $m = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$, es interesante para muchas cuestiones averiguar cuántos números hay en la sucesión

[I-6] $$1, 2, 3, \ldots, m,$$

que son primos con m; el número de ellos se llama *indicador* de m, y se suele designar con el símbolo $\varphi(m)$.

Indicador de un número m es, pues, el número de números primos con m y no superiores a él.

Convendremos en considerar al número 1 como primo consigo mismo, de modo que será: $\varphi(1) = 1$.

En la sucesión [I-6] serán primos con m los que no sean múltiplos ni de a, ni de b, ni de c, ..., ni de l. Quitemos de dicha sucesión [I-6]

los múltiplos de a, luego los de b, etc., y vayamos contando los números que en ella van quedando. Los múltiplos de a no mayores que m son a, $2a$, $3a$, ..., $\frac{m}{a}a$, y por lo tanto, hay m/a múltiplos de a en [I-6], los que suprimidos dejan en [I-6] $m - \frac{m}{a} = \frac{m}{a} \cdot (a-1)$, números primos con a. Los múltiplos de b no mayores que m son b, $2b$, $3b$, ..., $\frac{m}{b} \cdot b$, pero sólo hemos de quitar de éstos los que no sean múltiplos de a. En los múltiplos de b sólo serán múltiplos de a aquellos cuyo coeficiente lo sea, por ser a primo con b. Así, pues, los múltiplos de b que no lo son de a serán los de la sucesión 1, 2, 3, ..., $\frac{m}{b}$ que no sean múltiplos de a, y que por el caso anterior son $\frac{m}{b\,a}(a-1)$. Suprimidos de [I-6] los múltiplos de a y de b, quedan:

$$\frac{m}{a}(a-1) - \frac{m}{b\,a}(a-1) = \frac{m}{a\,b}(a-1)(b-1) \text{ números.}$$

Descontemos ahora los múltiplos de c que no lo son ni de a ni de b. Los múltiplos de c son c, $2c$, $3c$, ..., $\frac{m}{c}c$, y de éstos, no serán múltiplos ni de a ni de b los que no lo sean en la sucesión 1, 2, 3, ..., $\frac{m}{c}$, que por el caso anterior sabemos son $\frac{m}{c\,a\,b}(a-1)(b-1)$. Suprimidos de [I-6] los múltiplos de a, de b y de c, quedan $\frac{m}{a\,b}(a-1)(b-1) -$

$$- \frac{m}{c\,a\,b}(a-1)(b-1) = \frac{m}{a\,b\,c}(a-1)(b-1)(c-1) \text{ números.}$$

Siguiendo así sucesivamente, obtenemos como valor del indicador:

$$\varphi(m) = \frac{m}{a\,b\,c\,...\,l}(a-1)(b-1)\;(c-1)\;...\;(l-1) =$$

$$= a^{\alpha-1}\, b^{\beta-1}\, c^{\gamma-1} \ldots l^{\lambda-1}\; (a-1)(b-1)(c-1)\;\ldots\;(l-1).$$

IV. **Bibliografía.** — Damos a continuación una breve noticia sobre libros que, entre otros muchos, pueden servir para ampliar nuestra exposición o para profundizar temas de este capítulo que interesen particularmente.

Se ha procurado que las obras citadas puedan ser apropiadas para ser consultadas por nuestros lectores, o bien que representen cimas maestras, de influencia decisiva en la marcha del pensamiento científico.

1. Una exposición simplificada de la teoría cardinal del número y su conexión con la teoría ordinal, así como un desarrollo más completo de las técnicas operatorias y teoría de números, sólo esbozadas aquí, se encuentran en:

J. Rey Pastor: *Elementos de Análisis algebraico.* (Bs. As., 5ª ed., 1959).

2. Un ensayo de crítica de las diversas teorías del número, con exposición preferente de la cardinal, conteniendo en cada caso adecuada reseña histórica y además un capítulo sobre números aproximados de gran valor didáctico, es:

M. O. González: *Introducción al Análisis matemático.* (Matanzas, Cuba, 1940).

Una introducción moderna y muy correcta, con los elementos de la teoría de conjuntos y del álgebra abstracta indispensables para dar generalidad y significación a los resultados de la aritmética clásica es:

M. BALANZAT: *El número natural y sus generalizaciones* (Univ. Nac. Cuyo, San Luis, 1er. fascículo, 1953; 2º fasc., 1954).

3. Basado también en la teoría cardinal, de carácter elemental y didáctico, pero destinado a preparar al alumno para proseguir estudios superiores, con desarrollo de las teorías elementales tomando siempre en cuenta, al adecuado nivel, los resultados y métodos de la Matemática moderna, está el libro, apropiado para estudios pre-universitarios, de:

A. A. MONTEIRO y J. S. PAULO: *Aritmética racional.* (A. Machado, Lisboa, 1945).

4. De carácter análogo al anterior, es el de:

J. REY PASTOR: *Aritmética racional.* (1ª parte, Bs. As., 1927; 2ª parte, Bs. As., 1932).

5. Una introducción elemental a las modernas teorías algebraicas abstractas, muy adecuada para completar nuestra exposición y servir de puente a estudios superiores, es la de:

G. BIRKHOFF y S. MAC LANE: *A survey of modern algebra.* (Macmillan, Nueva York, 1941; 2ª ed., 1953; traducción castellana: *Algebra moderna,* Teide, Barcelona, 1954).

Desde el punto de vista del álgebra moderna, se desarrolla la teoría de números en:

H. HASSE: *Zahlentheorie.* (Akad. Verlag, Berlín, 1949).

Una introducción lúcida y sencilla del álgebra abstracta es la de

P. DUBREIL: *Algèbre.* I: *Équivalences, Opérations, Groupes, Anneaux, Corps.* (Gauthier-Villars, París, 2ª ed., 1954).

Un completo desarrollo de la teoría moderna de los reticulados se encuentra en:

G. BIRKHOFF: *Lattice Theory.* (Amer. Math. Soc., Coll. Publ. nº 25; 2ª ed., Nueva York, 1948).

Más amplias aplicaciones con atención escrupulosa al detalle y a la generalización, conteniendo numerosos ejemplos y contraejemplos, y las mutuas relaciones de los conceptos introducidos, da la obra de:

M. L. DUBREIL-JACOTIN; L. LESIEUR y R. CROISOT: *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.* (Gauthier-Villars, París, 1953).

Una descripción precisa del método axiomático, ilustrada con aplicaciones a teorías fundamentales contiene:

R. B. KERSHNER y R. L. WILCOX: *The anatomy of mathematics.* (Ronald Press, Nueva York, 1950).

Una breve introducción lógica y el estudio de algunas estructuras fundamentales del Álgebra contiene el volumen siguiente, primero de una proyectada serie de tres sobre los conceptos básicos y sistemas algebraicos del Álgebra moderna:

A. CHATELET: *Arithmétique et algèbre modernes. Tome* I. *Notions fondamentales. Groupes.* (Presses Univ. de France, París, 1954).

6. El desarrollo del método axiomático de PEANO, expuesto con todo rigor y escrito para alumnos que inician sus estudios universitarios, está contenido en el pequeño libro de

E. LANDAU: *Grundlagen der Analysis.* (Akademische Verlagsg., Leipzig, 1930; Chelsea, Nueva York, 1946). Traducción inglesa: *Foundations of Analysis. The arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers.* (Chelsea, Nueva York, 1951).

Un desarrollo cuidadoso del método de PEANO, que destaca el papel esencial de las clases de equivalencia, da:

A. VOGEL: *Klassische Grundlagen der Analysis.* (Hirzel, Leipzig, 1952).

Dedicado al humanista, siguiendo a PEANO, con crítica severa de FREGE, pero según las ideas del siglo XIX, está la obra de

F. WAISMANN: *Introduction to mathematical thinking. The formation of concepts in modern mathematics.* (Trad. ingl., Harper, Nueva York, 1959).

7. Adopta también el método de PEANO para la introducción del concepto de número, la primera obra sistemática sobre las modernas teorías abstractas del Álgebra, escrita de mano maestra, pero no apropiada para principiantes:

B. L. VAN DER WAERDEN: *Algebra* (2 vols.: Erster Teil: 5ª ed. de *Moderne Algebra* I, 1960; Zweiter Teil; 3ª ed. de *Moderne Algebra* II, 1955. Springer, Berlín); trad. inglesa: *Modern Algebra* (Ungar, Nueva York, 1949).

Similar en propósito a la obra anterior, de la que puede considerarse brillante sucesora, es la obra más moderna:

N. JACOBSON: *Lectures in abstract algebra;* (Van Nostrand; Toronto-Nueva York-Londres), cuyo Vol. I: *Basic concepts* (1951), da ya una introducción a las ramas principales del Álgebra moderna.

Más elemental, muy influído por las ideas de VAN DER WAERDEN y BOURBAKI (ver 9), con exposición excelente y numerosos ejercicios está:

G. PICKERT: *Einführung in die höhere Algebra.* (Vandenhoeck y Ruprecht, Göttingen, 1951).

Mientras para una generación de algebristas, "Álgebra moderna" significó el libro de VAN DER WAERDEN (cuya 1ª edic. data de 1931) o acaso uno o dos posteriores, el Álgebra abstracta ha evolucionado profundamente, en parte por motivaciones de otras ramas de la Matemática que, como la Topología algebraica, muestran insaciable apetito por estructuras algebraicas. Conceptos casi ignorados por la "vieja Álgebra moderna", como el de producto tensorial de módulos, son hoy de importancia central. El nuevo espíritu del Álgebra se advierte en la obra citada de JACOBSON, en la de BOURBAKI (ver 9) y es magistralmente presentado en la obra siguiente:

C. CHEVALLEY: *Fundamental concepts of algebra* (Academic Press, Nueva York, 1956).

8. La teoría general de los campos de números, determinantes y álgebra, representando un estudio precursor de lo que se ha llamado después "Álgebra moderna", está incluído en:

B. LEVI: *Introduzione alla Analisi matematica. I: Teoria formali.* (Hermann, París-Parma, 1916).

9. Obra en curso de aparición por fascículos sucesivos es la escrita bajo el nombre ficticio de BOURBAKI, a que responde un grupo de matemáticos franceses de la nueva generación. En ella se desarrollan en forma rápida, a veces esquemática, pero completa y rigurosa, ilustrada con amplia ejemplificación, las ideas básicas de las teorías matemáticas en su más amplio grado de generalidad. Esta obra, no recomendable para principiantes, es:

N. BOURBAKI: *Éléments de mathématique. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse.* (Lib. I: Conjuntos; Lib. II: Álgebra; Lib. III: Topología; Lib. IV: Funciones de una variable real; Lib. V: Espacios vectoriales topológicos; Lib. VI: Integración; Hermann, París, 1939 a 1962).

Sobre metodología y fundamentación de la Matemática, citaremos los siguientes textos:

10. Examen crítico de la metodología de la Matemática, realizado a un nivel asequible para principiantes, lo constituye el pequeño libro de

J. Rey Pastor y P. Puig Adam: *Metodología y didáctica de la Matemática elemental.* (2ª ed., Iberoamericana Bs. As., 1948).

11. Una exposición elemental, completa y ordenada de los problemas metodológicos y de fundamentación de la Matemática, de objetivo didáctico y no dialéctico, conteniendo en forma sucinta las líneas esenciales de cada sistema y larga lista bibliográfica, ofrece:

F. I. Toranzos: *Introducción a la Epistemología y fundamentación de la Matemática.* (2ª ed., Espasa-Calpe, Bs. As., 1949).

12. Una obra clásica de carácter metodológico, que ha tenido una gran influencia en la enseñanza de la Matemática elemental, por establecer en forma magistral la relación de sus problemas con las cuestiones de carácter superior y su mutuo enlace, la da:

F. Klein: *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* 3 vols., I: Aritmética, Álgebra, Análisis, 1927; II: Geometría, 1931; 1ª trad. castellana, Bibl. Matemática, Madrid; reed. Bs. As., 1949, de la 3ª ed. alemana, Springer, Berlín, 1924-25-28).

En el mismo orden de ideas está la obra más reciente, con notas históricas y didácticas, de

M. Piazzolla Beloch: *Lezioni di Matematica complementare (La Matematica elementare vista dall'alto).* (Inst. Geom. Un. Ferrara, 1953).

13. Famosa obra de colaboración, que en forma miscelánea trata los puntos críticos que debe conocer a fondo el profesor de Matemática en la enseñanza secundaria y pre-universitaria es la de:

F. Enriques: *Questioni riguardanti le matematiche elementari.* (2 vols., 3ª ed., Zanichelli, Bolonia, 1924 y 1926).

14. Un libro de alta divulgación, muy ameno y pedagógicamente escrito, sin bajas concesiones, pero dirigido al gran público de cultura media, que da una visión general de los conceptos y métodos empleados en la Matemática, es el debido a:

R. Courant y H. Robbins: *What is mathematics?* (Oxford Univ. Press, 1941; traducción castellana: *¿Qué es la matemática?*, Alda, Bs. As., 1954).

De gran valor humanístico y científico, debido a la pluma de unos 50 eminentes matemáticos franceses, sobre el significado científico, cultural y filosofico de los diversos aspectos de la Matemática, es el libro editado por:

F. Le Lionnais: *Les grands courants de la pensée mathématique.* (Cahiers du Sud, París, 1948).

Obra que no debiera ser ignorada por ningún hombre culto, sobre la naturaleza, características, métodos, calidad artística y vitalidad de la Matemática, sus antecedentes históricos y su influencia en el progreso humano es la de:

M. Kline: *Mathematics in western culture.* (Oxford Univ. Press, Nueva York, 1953).

15. Obra de filosofía científica sobre metodología, fundamentación y crítica sistemática e histórica de las ideas esenciales para el estudio de la Naturaleza, conteniendo en su primera parte matemática el método lógico y axiomático y el problema del infinito, a la que sigue una segunda parte física sobre espacio, tiempo, causalidad y la posición relativa que respecto al mundo exterior toman las actitudes realista e idealista, es la traducción revisada y ampliada del original alemán de:

H. Weyl: *Philosophy of Mathematics and Natural Science.* (Princeton Univ. Press, 1949).

Admirable ejemplo de exposición sencilla sobre el desarrollo de los conceptos físicos basados en la Matemática es:

E. Whittaker: *From Euclid to Eddington. A study of conceptions of the external world.* (Cambridge Univ. Press, 1949).

16. Las ideas de BOOLE dieron lugar a la moderna *Logística*, la que ha sido principalmente desarrollada por PEANO y su escuela en la obra altamente especializada que ha marcado una época en la Matemática:

G. PEANO: *Formulaire de Mathématiques*. (Ediciones sucesivas y rampantes de 1895 a 1908, Carré et Naud, Paris).

17. Versión castellana de un resumen de las teorías de RUSSELL, según las cuales la Matemática es sólo una parte de la Lógica, conteniendo la teoría cardinal del número, así como problemas relacionados con la teoría de las magnitudes, teoría ordinal de conjuntos, espacio, infinitud, continuidad, geometría y dinámica, aun actual en muchas de sus partes, a pesar de corresponder a una redacción de 1903, es:

BERTRAND RUSSELL: *Los principios de la Matemática*. (Espasa-Calpe, Bs. As., 1948).

18. El libro anterior fué escrito como introducción de la obra monumental, cuya influencia en el desarrollo de la filosofía científica contemporánea ha sido enorme, tratado de carácter altamente especializado:

A. N. WHITEHEAD y B. RUSSELL: *Principia mathematica*. (3 vols., 2ª ed., Cambridge Univ. Press, 1925-27-27).

La fuente original de la obra anterior está en la obra recientemente reeditada en alemán-inglés de:

G. FREGE: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. The foundations of Arithmetic. A logico-mathematical inquiry into the concept of number*. (Philos. Libr., Nueva York, 1950).

Dos valiosos textos elementales de pocas páginas sobre la lógica antigua y moderna son:

I. M. BOCHENSKI: *Ancient formal logic*. (North-Holland, Amsterdam, 1951).

I. M. BOCHENSKI: *Précis de logique mathématique*. (Kroonder, Bussum, 1948).

Obra actual y completa con numerosas aplicaciones, conteniendo los últimos resultados es la de:

J. B. ROSSER: *Logic for mathematicians*. (McGraw, Nueva York, 1953).

Enriquecido con notas históricas y referencias a la literatura contemporánea, está la compacta obra:

P. LORENZEN: *Formale Logik* (W. de Gruyter, Berlín, 1958).

19. El formalismo de HILBERT y el problema matemático de demostrar la no-contradicción de la Matemática, pueden estudiarse en las siguientes obras de dicho autor y sus discípulos; la primera, de carácter más sintético y elemental, puede servir de introducción a la segunda, cuya contribución a la teoría de las definiciones recurrentes y a la teoría de la demostración es fundamental:

D. HILBERT y W. ACKERMANN: *Grundzüge der theoretischen Logik*. (3ª ed., Springer, Berlín, 1949; trad. ingl.: Chelsea, Nueva York, 1950).

D. HILBERT y P. BERNAYS: *Grundlagen der Mathematik*. (2 vols., Springer, Berlín, 1934-39).

Excelentes introducciones modernas sobre la lógica, que interesa a los matemáticos, más técnica la primera, más comprensiva de diversos métodos y escuelas la segunda, son:

P. C. ROSENBLOOM: *The elements of Mathematical Logic*. (Dover, Nueva York, 1950).

E. W. BETH: *Les fondements des Mathématiques*. (Gauthier-Villars, Paris, 1950).

Un tratamiento amplio de la lógica simbólica, siguiendo los puntos de vista establecidos por su autor en publicaciones anteriores, da:

R. CARNAP: *Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen* (Springer, Viena, 1954); trad. ingle-

sa: *Introduction to symbolic logic and its applications* (Dover, Nueva York, 1959).

Adecuadas introducciones elementales a la fundamentación de la Matemática, con discusión de los diferentes puntos de vista, son:

E. R. STABLER: *An introduction to mathematical thought.* (Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953).

R. L. WILDER: *Introduction to the foundations of Mathematics.* (Wiley, Nueva York, 1952).

Una moderna y completa introducción a las investigaciones actuales sobre lógica matemática es la magnífica obra de

S. C. KLEENE: *Introduction to metamathematics.* (D. van Nostrand, Nueva York, 1952).

Importancia histórica tiene la obra, cuya orientación no es primordialmente matemática:

H. REICHENBACH: *Elements of symbolic Logic.* (Macmillan, Nueva York, 1947).

Obras de texto clásicas, adecuadas para cursos universitarios, son las de:

W. VAN O. QUINE: *Methods of Logic.* (Holt, Nueva York, 1950).

W. VAN O. QUINE: *Mathematical Logic.* (Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass.; 2ª ed., 1951).

De carácter más especializado es:

H. B. CURRY: *Leçons de logique algébrique.* (Gauthier-Villars, París, 1952).

Libro muy didáctico y elemental, pero también profundo y revelador, que presenta los principios más importantes que intervienen en la construcción de las teorías matemáticas, con orientación crítica bibiográfica, es:

A. TARSKI: *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences* (Nueva York, 1951); trad. castellana: *Introducción a la Lógica y a la Metodología de las Ciencias deductivas* (Espasa-Calpe, Bs. As., 1951).

De carácter más elevado, también con orientación bibliográfica, constituye una buena introducción a la lógica moderna la obra:

J. FERRATER MORA y H. LEBLANC: *Lógica matemática* (Fondo de Cultura Económica; México y Bs. As., 1955).

Con puntos de vista personales inspirados en la fenomenología de HUSSERL, está:

D. GARCÍA BACA: *Introducción a la lógica moderna* (Labor; Barcelona, 1936).

20. Obra de crítica filosófica, escrita con gran erudición y con el fin expreso de dar un panorama completo de la evolución histórica del pensamiento matemático, teniendo por objetivo tratar el problema de la verdad trascendente en Matemática, problema que en la fundamentación de ésta queda por principio y en general fuera de los trabajos realizados por matemáticos, es la de:

L. BRUNSCHVICG: *Las etapas de la filosofía matemática.* (Lautaro, Bs. As., 1945; trad. de la 3ª ed. francesa, Alcan, París, 1929).

Breve obra excelente, también centrada en el problema de la verdad matemática, cuyo título expresa con precisión su contenido, es:

H. B. CURRY: *Outlines of a formalist philosophy of Mathematics.* (North-Holland, Amsterdam, 1951).

CAPÍTULO II

EL NÚMERO REAL Y EL NÚMERO COMPLEJO

§ 7. CONCEPTO DE NÚMERO REAL

1. Segmentos inconmensurables y resolución aproximada de ecuaciones. — *a*) Se ha visto (§ 6-6) que por pequeña que sea la diferencia entre dos números racionales, a y b, $a < b$, existen infinitos números racionales intermedios; por ejemplo: $a + \nu \dfrac{b - a}{2^n}$, $0 < \nu < 2^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Por esto se decía que los puntos racionales forman un conjunto *denso* sobre la recta, y así, para todos los propósitos prácticos de medida, los números racionales son ampliamente suficientes.

Aun desde el punto de vista teórico, parece a primera vista que en la recta no caben más puntos, estando éstos tan juntos como se quiera.

La comprobación de que los puntos racionales *no llenan* la recta, marca una época en la historia antigua de la Matemática, y data de hace unos veinticinco siglos, cuando el renombre del filósofo PITÁGORAS DE SAMOS y de su secta recorría las islas del mar Egeo. Para los pitagóricos, los puntos no sólo tienen posición, sino que son además extensos, de modo que un segmento está formado por *un número finito de puntos.* Al jefe de la secta se atribuye el llamado teorema de PITÁGORAS, cuyas consecuencias son bien antipitagóricas, como veremos. En efecto, si los catetos son iguales, para poder ubicar exactamente la hipotenusa y formar el triángulo veremos que hay que "romper" esos puntos extensos, por pequeños que sean, y al no haber "átomos de extensión", un segmento tendrá infinitos puntos. Parece probable, sin embargo, que aquel teorema sólo fué conocido por los pitagóricos (por lo menos los primeros) en casos particulares, en que la relación se verifica entre números naturales tales como 3, 4 y 5: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

El teorema de PITÁGORAS afirma que la "razón", $r = d/c$, entre la longitud, d, de la diagonal del cuadrado y la longitud, c, de su lado, debe satisfacer a:

[7-1] $$d^2 = (r\,c)^2 = c^2 + c^2 = 2\,c^2,$$

y por ello se suponía que existía un "número" r tal, que

[7-2] $$r^2 = 2.$$

Pero si r se pudiese expresar por la fracción *irreducible* s/t, habría de ser $s^2 = 2\,t^2$, es decir, s sería par, y al poner $s = 2\,s_1$, quedaría $2\,s_1{}^2 = t^2$, con lo cual t sería también par, en contra de la hipótesis de que s y t no tienen divisor común

(§ 6-1). Así queda probado que no existe ningún número racional que cumpla [7-2], es decir, que exprese $\sqrt{2}$.

Si dividimos el segmento c en partes iguales, cada una de éstas se llama *parte alícuota* de c. La misma demostración anterior prueba que ninguna parte alícuota de c (es decir, c/t) cabe un número exacto de veces ($s.\dfrac{c}{t}$) en d, por lo cual se dice que c y d son segmentos *inconmensurables* (sin medida común). Así es fácil construir geométricamente, a partir del origen, un segmento inconmensurable con el de longitud 1 (fig. 20), y si su extremo se marca con el compás, el punto obtenido no podrá coincidir con ningún punto racional de la recta, por próximos que éstos estén entre sí. Ello parece tan paradójico a nuestra intuición inmediata, que justifica el efecto que ha de producir en toda mente reflexiva como era la de los griegos.

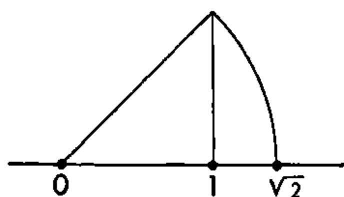


Fig. 20.

El principio rector que éstos siguieron para introducir los números fraccionarios fué el de poder medir las longitudes mediante números, y si se quiere seguir manteniendo una mutua correspondencia entre números y puntos de la recta, nos veremos obligados a introducir el número irracional. Geométricamente, éste representará la longitud de un segmento inconmensurable con la unidad, aun cuando después demos del mismo (§ 7-4) una definición aritmética rigurosa.

Problemas análogos al anterior son, por ejemplo, el determinar la longitud $\sqrt{3}$ de la diagonal de un cubo de lado unidad, o el lado $\sqrt[3]{2}$ de un cubo de volumen 2.

b) Estos resultados son casos particulares del siguiente importante teorema, fácilmente demostrable, y que también obtendremos en los §§ 17-4, *g*, y 41-4:

Si $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$ *es un polimonio en que el coeficiente del término de mayor grado es uno, y todos los demás coeficientes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *son enteros, entonces la ecuación* $p(x) = 0$ *no tiene raíces fraccionarias (racionales no enteras).*

Hay dos tipos de ecuaciones de la clase anterior Uno de ellos es el que corresponde a la ecuación

[7-3] $$x^3 - 2 = 0$$

que aun cuando no tenga raíces racionales, las tiene *aproximadas*, es decir, existen números racionales que aproximan a cero el primer miembro de [7-3], tanto como se quiera.

Esto no ocurrirá para ecuaciones del otro tipo, tal como

[7-4] $$x^2 + 1 = 0.$$

pues cualquier número racional hace al primer miembro de [7-4] mayor o igual a 1.

La posibilidad de ir aproximando más y más, con números racionales, soluciones de las ecuaciones del primer tipo, justificará la introducción del número irracional, mientras que para la resolución de las ecuaciones del segundo tipo necesitaremos introducir el número imaginario.

Los números racionales, ampliados con los irracionales (no expresables como "razón" de enteros), formarán el campo de los números reales. Éstos, ampliados con los imaginarios (no reales), formarán el campo de los números complejos.

2. Sucesiones. — Es importante precisar este concepto para el estudio de la aproximación sucesiva de la incógnita en el tipo de problemas visto en el apartado anterior.

Sucesión es un conjunto infinito, cuyos elementos repetidos o no, están en correspondencia con los números naturales. Si llamamos a_n al elemento que corresponde al número natural n, tendremos:

$$\begin{array}{llllll} [7\text{-}5] & 1 & 2 & 3 & \dots & n \quad \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ [7\text{-}6] & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \quad \dots \end{array}$$

de modo que una sucesión puede indicarse en la forma [7-6]. Los números naturales mismos forman la sucesión [7-5]. El subíndice n, que indica el número de orden del elemento. se llama *orden del elemento*.

EJEMPLOS: 1. En la sucesión:

$$[7\text{-}7] \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

es

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

y el término n-ésimo es:

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

2. En la sucesión

$$[7\text{-}8] \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots$$

el término n-ésimo es:

$$[7\text{-}8'] \qquad a_n = \frac{2}{2n + 1 - (-1)^n}$$

3. Conociendo la expresión general del término n-*ésimo* se puede escribir la sucesión. Por ejemplo: si en [7-8'] damos a n los valores 1, 2, 3, ..., obtenemos los elementos sucesivos de [7-8]. Si fuera:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

la sucesión sería:

$$[7\text{-}9] \qquad -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{-1}{32}, \dots \frac{(-1)^n}{2^n} \dots$$

4. El lector ha considerado sucesiones infinitas muchas veces sin sa-

berlo. Por ejemplo, al dividir 1 por 3, los cocientes aproximados forman la sucesión:

[7-10] $a_1 = 0{,}3,\ a_2 = 0{,}33,\ a_3 = 0{,}333,\ a_4 = 0{,}3333,\ \ldots$

En el último ejemplo, los elementos de la sucesión [7-10] dan valores tan próximos como se quiera al cociente 1/3, por cuya razón diremos que la sucesión [7-10] tiene *límite* 1/3, o *converge hacia* 1/3, y escribiremos:

[7-11] $$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$$

Por ejemplo, la diferencia $\frac{1}{3} - a_n$ es menor que $\frac{1}{10.000}$ para el cuarto término *y todos los que le siguen*, pues

$$\tfrac{1}{3} - 0{,}3333 = 0{,}000033 \ldots < 0{,}0001, \text{ etc.}$$

En general, la sucesión [7-6] será convergente hacia a:

[7-12] $$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

cuando para cada número $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se quiera, existe un número natural $N = N(\varepsilon)$, tal que

[7-13] $$|a_n - a| < \varepsilon \quad \textit{para todo} \quad n > N.$$

Gráficamente esto significa que, dado un intervalo $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, los elementos de la sucesión caen dentro de él *desde uno dado en adelante.*

Las sucesiones [7-7], [7-8] y [7-9] son convergentes (con límite 0). Mostrarlo gráficamente. En cambio, no lo es la sucesión [7-5] de los números naturales, ni la sucesión

[7-14] $1, -1, 1, -1, 1, \ldots (-1)^{n-1} \ldots$

(obsérvese la expresión del término n-ésimo). Sin embargo, hay una diferencia importante en el comportamiento de ambas, pues en [7-5] los puntos n se *alejan* hacia la derecha tanto como se quiera, desde uno dado en adelante, mientras que en [7-14], los términos de la sucesión *oscilan* entre -1 y $+1$. En el § 20 estudiaremos detenidamente ambos casos.

Recordemos (§ 6-5, *c*) que una sucesión $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots$ con $a_n \leqq a_{n+1}$ para todo subíndice n, se llama *monótona creciente,* mientras que si $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots$ con $a_n \geqq a_{n+1}$ para todo n, se llama *monótona decreciente.* Si se verifica $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ o bien $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ (sin signos de igualdad), la monotonía se llama *estricta.*

La sucesión de término general $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + (1/n) - \ln(n+1)$ es monótona creciente, y aun conservándose acotada, no se sabe hoy en día si converge o no hacia un número racional. Sin embargo, veremos (§ 22-3, *b*), que converge hacia un número real, llamado *constante de* EULER o MASCHERONI, cuyo valor aproximado es 0,577 215 6649...

3. **Aproximaciones decimales y su generalización.** — Para ocupar la recta mediante un conjunto denso de puntos, no es necesario considerar todos los puntos racionales. Basta, por ejemplo, tomar los números racionales cuyo denominador es una potencia de 10, llamados *fracciones decimales.* También

bastarían las fracciones diádicas, es decir, las que tienen por denominador una potencia de 2, expresables por un número finito de cifras en el sistema diádico o binario de numeración (ver Cap. I, nota II); el ejemplo con que hemos comenzado el § 7-1 corresponde a este caso.

El número N representado en cifras decimales por $g, a_1 a_2 \ldots a_n$ tiene la forma:

$$N = g + a_1.10^{-1} + a_2.10^{-2} + \ldots + a_n.10^{-n}.$$

EJEMPLO 1:

$$27{,}1892 = 27 + \frac{1}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{2}{10\,000} = \frac{271\,892}{10\,000}$$

Si s/t es tal que $t = 10^n$, es inmediato que es fracción decimal. Pero el recíproco no es cierto, pues si ésta se pone en forma de quebrado, pueden sus términos tener algún divisor común y reducirse a una fracción cuyo denominador sea algún divisor de 10^n.

EJEMPLO 2: $$\frac{271\,892}{10\,000} = \frac{67\,973}{2\,500}.$$

Por otra parte, ninguna fracción irreducible cuyo denominador contenga otros factores primos que 2 y 5 (§ 5-9, a_1) puede ser fracción decimal.

EJEMPLO 3:

$2/11 = s/10^n$ implicaría $2.10^n = 11s$, y el factor primo 11 no figura en el primer miembro (§ 5-9, a_1). Sin embargo, decimos que

$$2/11 = 0{,}181818 \ \ldots,$$

lo que significa que 2/11 está entre 0 y 1, entre 1 y 2 décimas, entre 18 y 19 centésimas, etc., es decir, podemos aproximar 2/11, por defecto y por exceso, mediante aproximaciones decimales, tanto como queramos, de manera que:

$$0 < 2/11 < 1$$
$$0{,}1 < 2/11 < 0{,}2$$
$$0{,}18 < 2/11 < 0{,}19$$
$$0{,}181 < 2/11 < 0{,}182$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Los miembros extremos determinan una *sucesión de intervalos encajados* (§ 6-6), cuya amplitud sucesiva 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ..., tan pequeña como se quiera, acota el error cometido por la aproximación respectiva.

De acuerdo con la definición de límite (§ 7-2), las aproximaciones decimales por defecto (exceso) convergen hacia 2/11.

En este caso, la sucesión de aproximaciones decimales es muy fácil de determinar, pues si consideramos la sucesión creciente que se acerca a 2/11 por defecto, se ve que la cifra decimal que está en cualquier lugar impar es 1, y la que está

en cualquier lugar par es 8, ya que la *expresión decimal infinita* de 2/11 resulta *periódica*.

En general, *la expresión decimal de cualquier número racional que no sea fracción decimal es periódica. Recíprocamente, toda expresión decimal periódica indefinida representa (converge hacia) un número racional.*

En efecto, si un número racional no es fracción decimal, para hallar n cifras decimales después de la coma bastará multiplicar el numerador por 10^n y efectuar con el denominador la división entera vista en el § 5-1; ello equivale, al crecer n indefinidamente, a efectuar la división indefinida en la forma práctica acostumbrada. Ninguno de los sucesivos restos puede ser nulo, pues entonces tendríamos una fracción decimal. Si t es el denominador del número racional, sólo puede haber, a lo mas, $t-1$ restos distintos (de 1 a $t-1$ inclusives) por lo cual alguno habrá de repetirse, y desde entonces los demás irán repitiéndose también en el mismo orden en que aparecen detrás del repetido primeramente. Por lo tanto, en el cociente las cifras formarán también períodos.

Recíprocamente, una expresión decimal periódica indefinida tiene en general la forma E, APPP..., en que E representa el conjunto $g_1, g_2, \ldots, g_q$ de cifras de la parte entera, A el $a_1, a_2, \ldots, a_j$ de la parte decimal no periódica, y P el $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de la parte decimal periódica. Dicha expresión representa un número racional, en el sentido de que converge hacia él la sucesión obtenida tomando una, dos, tres ..., n, ... cifras decimales, sucesión monótona creciente cuyos elementos están comprendidos entre los que tienen $j+mk$ y $j+(m+1)k$ cifras decimales, con $m=0$, 1, 2, ... En efecto (§ 4-10), podemos poner:

$$\text{E,APP}\ldots\text{P} = \text{E.A} + 10^{-j}.\text{P}.(10^{-k} + 10^{-2k} + \ldots + 10^{-mk}) =$$
$$= \text{E,A} + 10^{-j}.\text{P}.\frac{1-10^{-mk}}{10^k-1},$$

sucesión creciente convergente para $m \to \infty$ al número racional $\text{E,A} + \dfrac{10^{-j}.\text{P}}{10^{-k}-1}$, con un error menor que $10^{-j}.\text{P}.\dfrac{10^{-mk}}{10^k-1}$ tan pequeño como se quiera, para m suficientemente grande.

Ejemplo 4. $5{,}2181818\ldots = \lim_{m\to\infty} (5{,}2+10^{-1}.18(10^{-2}+10^{-4}+\ldots+ 10^{-2m})) = \lim_{m\to\infty} (5{,}2+10^{-1}.18.\dfrac{1-10^{-2m}}{10^2-1}) = 5{,}2 + \dfrac{10^{-1}.18}{10^2-1} = \dfrac{52.(100-1)+18}{990}$.

La resolución aproximada decimal de la ecuación $x^2=2$ conduce también a una expresión decimal indefinida, que representa una sucesión de intervalos encajados de amplitudes sucesivas 1, 10^{-1}, 10^{-2}, ..., tan pequeñas como se quieran, y que no puede determinar un número racional, por no serlo $\sqrt{2}$. Aunque no se conoce una ley explícita que determine las cifras sucesivas, pueden determinarse tantas como se quiera obteniendo:

$$\begin{array}{rcl}
1^2 = & 1 < 2 < & 2^2 = 4\\
(1{,}4)^2 = & 1{,}96 < 2 < & (1{,}5)^2 = 2{,}25\\
(1{,}41)^2 = & 1{,}9881 < 2 < & (1{,}42)^2 = 2{,}0264\\
(1.414)^2 = & 1{,}999396 < 2 < & (1{,}415)^2 = 2{,}00225\\
(1{,}4142)^2 = & 1{,}99996164 < 2 < & (1{,}4143)^2 = 2{,}00024449, \text{ etc.}
\end{array}$$

Esto nos sugiere la siguiente definición: "Número" es una expresión decimal indefinida, pudiéndose considerar la fracción decimal como caso particular de expresión periódica que acaba en ... 000 ... o en ... 999 ... (0,25000 ... = 0,24999 ...). Entonces, los números racionales resultan las expresiones decimales periódicas, y los números irracionales, las expresiones decimales aperiódicas.

Hasta mediados del siglo XIX, éste era el concepto aceptado de número real. El período de revisión crítica de los fundamentos y principios de la Matemática y el desarrollo de la Geometría analítica y el Cálculo infinitesimal exigieron un análisis más preciso del concepto anterior, realizado por MÉRAY y WEIERSTRASS (1869), DEDEKIND (1872), CANTOR (1872), etc.

Ante todo, el sistema decimal de numeración puede ser reemplazado por otro cualquiera (ver Cap. I, nota II), y la definición de número real debe ser independiente del modo de representar los números. Esto nos lleva a tener que formular una definición por abstracción (§ 1-6), en que la relación de equivalencia quede establecida en forma precisa. Por otra parte, deben definirse las operaciones fundamentales con resultados que queden determinados de acuerdo con la definición de número dada (por ej.: 7,36363 ... + 1,63636 ...), y para dichas operaciones debe demostrarse el cumplimiento de las leyes formales.

Sin embargo, es fácil aprovechar, generalizándola, la idea esencial de las aproximaciones decimales del número que determinan. Éste debe quedar contenido en una sucesión de intervalos encajados, cuyas amplitudes sucesivas se pueden hacer tan pequeñas como se quiera, sin que para ello el 10 y sus submúltiplos tengan por qué desempeñar ningún papel especial. Vamos, pues, en esta forma, a introducir por definiciones y métodos, análogos a los del capítulo I, el concepto de número real.

4. Definición de número real por sucesiones de intervalos encajados. — Llamamos *monótonas contiguas* a dos sucesiones indefinidas, tales que:

1º La sucesión indefinida $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots$, es monótona creciente, y la $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_i, \ldots$, es monótona decreciente; es decir (§ 7-2)

$$[7\text{-}15] \qquad \begin{cases} a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_i \leqq \ldots \\ a'_1 \geqq a'_2 \geqq a'_3 \geqq \ldots \geqq a'_i \geqq \ldots \end{cases}$$

2º Todo número a_i de la primera es menor que su correspondiente de la segunda, es decir: $a_i < a'_i$.

3º La diferencia $a'_i - a_i$ entre dos términos correspondientes llega a ser menor que cualquier número positivo ε, desde un valor de i en adelante.

Las condiciones 1ª y 2ª hacen ver que los pares de términos correspondientes a_i y a'_i determinan intervalos J_i encajados sucesivamente unos en otros, de manera que cualquier extremo inferior a_i de dichos intervalos es menor que cualquier otro extremo superior a'_j. Por la condición 3ª, la amplitud de los intervalos J_i puede hacerse tan pequeña como se quiera para i suficientemente grande. El conjunto lineal de puntos a_i se dice *contiguo* al de los a'_i por quedar todos los puntos del primer conjunto a la izquierda de los del segundo, y existir pares de elementos de ambos conjuntos tan próximos como se quiera (§ 7-6).

Así se obtiene lo que se llama un *par de sucesiones monótonas contiguas*, o una *sucesión de intervalos encajados*, o también un *encaje de intervalos* que indicaremos: $\{a_i;\ a'_i\}$.

Llamaremos *elemento de separación*, o mejor *frontera* del encaje de intervalos $\{a_i; a'_i\}$, a todo número que sea igual o mayor que cada uno de los números a_i, e igual o menor que cada uno de los a'_i. Existe a lo más *un* número racional α que sea frontera de $\{a_i; a'_i\}$, pues si existiesen dos α_1 y α_2 no podría hacerse $a'_i - a_i$ menor que $|\alpha_2 - \alpha_1|$, en contra de la 3ª condición de contigüidad. Pero también puede suceder que *no exista punto frontera racional* de un determinado encaje de intervalos $\{a_i;\ a'_i\}$, como hemos visto en § 7-3. Esto nos lleva a la "creación" del número irracional, mediante la siguiente definición general por abstracción de número real:

La igualdad de dos números reales se introduce por el hecho de que la aproximación por defecto de cada uno de ellos no supere a la aproximación por exceso del otro; es decir:

Un par de sucesiones monótonas contiguas [7-15] *de números racionales definen un número real*, $\alpha = \{a_i; a'_i\}$, *con la condición de que:*

[7-16] $\{a_i; a'_i\} = \{b_i; b'_i\}$, *si* $a_i \leqq b'_j,\quad b_i \leqq a'_j$
para cualquier par de subíndices $i,\ j$.

Más precisamente, esto equivale a introducir la siguiente relación de equivalencia (§ 1-5) entre pares de sucesiones monótonas contiguas de números racionales: $\{a_i,\ a'_i\}\,E\,\{b_i,\ b'_i\}$, si y sólo si $a_i \leqslant b'_j$, $b_i \leqslant a'_j$, y definir los números reales por las correspondientes clases de equivalencia.

Este ente abstracto adquirirá categoría de "número" una vez definidas las operaciones de suma y producto para las cuales se demuestre se conservan las leyes formales conocidas (§ 2-6).

Si llamamos a los términos a_i de la sucesión creciente *aproximaciones racionales por defecto* del número real α, y a los a'_i de la sucesión decreciente *aproximaciones racionales por exceso* de α, la relación de equivalencia [7-16] que establece la igualdad $\alpha = \beta$ entre dos números reales significa que cual-

quier aproximación por defecto de α ó β no supera a ninguna aproximación por exceso de β ó α, respectivamente.

A esta definición corresponde el siguiente *postulado geométrico de* CANTOR: *Dada una sucesión de intervalos encajados,* $J_i = [a_i, a'_i]$, *existe siempre un punto* α *perteneciente a todos ellos.*

Este postulado, también llamado de *continuidad de la recta,* nos permite dar mediante el punto α (fig. 21), la *representación geométrica* del número real $\{a_i; a'_i\}$, y entonces la relación de equivalencia [7-16] cobra un significado geométrico intuitivo inmediato. También vemos que los números reales con elemento de separación racional tienen a éste como representación geométrica: más adelante (§ 7-5, *f*) estableceremos

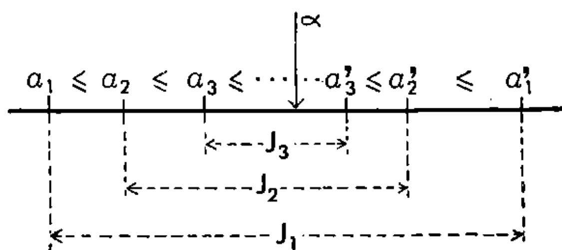


Fig. 21.

el isomorfismo que nos permitirá identificar ambos conceptos.

Dado un número racional h, podemos elegir sucesiones monótonas contiguas muy sencillas, que lo tienen como frontera: por ejemplo:

$$\{h, h, h, \ldots; \; h + \tfrac{1}{2}, h + \tfrac{1}{3}, h + \tfrac{1}{4}, \ldots\} = h,$$
$$\{h - 0{,}1; \; h - 0{,}01; \ldots; \; h + 0{,}1; \; h + 0{,}01; \ldots\} = h.$$

Llamaremos *cero* al número real cuyas aproximaciones por defecto nunca son positivas y las aproximaciones por exceso nunca son negativas; se ve, inmediatamente, que su representación geométrica es el punto cero u origen de coordenadas.

5. **Operaciones fundamentales y desigualdad entre números reales.** — Las operaciones fundamentales de adición y de multiplicación y la relación de desigualdad las definiremos en la siguiente forma:

a) *Adición.* Dados dos números reales, $\alpha = \{a_i, a'_i\}$ y $\beta = \{b_i; b'_i\}$, definidos por medio de sucesiones monótonas contiguas, se llama *suma* de α y β, y se representa por $\alpha + \beta$ al número

$$\gamma = \{a_i + b_i; \; a'_i + b'_i\}$$

definido por las dos sucesiones:

$$a_1 + b_1 \leqq a_2 + b_2 \leqq a_3 + b_3 \leqq \ldots \leqq a_i + b_i \leqq \ldots$$
$$a'_1 + b'_1 \geqq a'_2 + b'_2 \geqq a'_3 + b'_3 \geqq \ldots \geqq a'_i + b'_i \geqq \ldots$$

que son monótonas por serlo las dadas; y además contiguas, pues siendo $a_i \leqslant a'_i$, $b_i \leqslant b'_i$, es $a_i + b_i \leqslant a'_i + b'_i$, y

$$(a'_i + b'_i) - (a_i + b_i) = (a'_i - a_i) + (b'_i - b_i)$$

y como $a'_i - a_i$ y $b'_i - b_i$ pueden hacerse tan pequeños como se quiera, también $(a'_i + b'_i) - (a_i + b_i)$ puede hacerse menor que ε, con sólo elegir i de modo que sea: $a'_i - a_i < \frac{\varepsilon}{2}$ y $b'_i - b_i < \frac{\varepsilon}{2}$.

Además, esta definición es la de una operación entre clases de encajes de intervalos que dan los sumandos reales, y no una operación entre los encajes mismos, porque su resultado es independiente del encaje de intervalos que representa cada sumando, es decir, se cumple la ley uniforme. En efecto, si suponemos definidos los mismos números α y β por otras sucesiones:

$$\alpha = \{e_i;\ e'_i\}\quad,\quad \beta = \{f_i;\ f'_i\}\quad,$$

y formamos la suma $\{e_i + f_i;\ e'_i + f'_i\}$, entonces:
por ser $\{a_i;\ a'_i\} = \{e_i;\ e'_i\}$ y $\{b_i;\ b'_i\} = \{f_i;\ f'_i\}$ se tiene en virtud de [7-16]

$$\left.\begin{matrix} a_i \leqq e'_l & b_i \leqq f'_l \\ e_h \leqq a'_k & f_h \leqq b'_k \end{matrix}\right\} \text{ de donde: } \left\{\begin{matrix} a_i + b_i \leqq e'_l + f'_l \\ e_h + f_h \leqq a'_k + b'_k \end{matrix}\right. ,$$

luego: $\{a_i + b_i;\ a'_i + b'_i\} = \{e_i + f_i;\ e'_i + f'_i\}$.

Es muy fácil demostrar (hágase) que se conservan las *leyes formales de la adición* (§ 6-2, *b*), es decir, las leyes asociativa, modular, conmutativa y cancelativa.

b) La *sustracción* se define como operación inversa de la adición, pero para la práctica de la operación es mejor aplicar la regla general de sustracción (§ 3-6, *a*), por la que se suma al minuendo el opuesto del sustraendo. Llamaremos $\alpha' = \{c_i, c'_i\}$ *opuesto* al número $\alpha = \{a_i, a'_i\}$ si cumple la condición $\alpha + \alpha' = 0$, por lo que debe verificarse:

$$a_i + c_i \leqq 0,\quad a'_i + c'_i \geqq 0,\ \text{es decir:}\quad c'_i \geqq -a'_i, c_i \leqq -a_i,$$

debiendo suprimirse el signo = en una de estas condiciones, si se verifica en la otra. No hay, por lo tanto, más que un solo opuesto, que puede expresarse así: $\alpha' = \{-a'_i,\ -a_i\}$, y cualquier otro es igual a él, por el criterio de igualdad. El opuesto a α se designará por $-\alpha$. Obsérvese que las aproximaciones por *defecto* de $-\alpha$ son las opuestas de las aproximaciones por *exceso* de α, y análogamente para las del otro lado, lo que se aclara en la representación geométrica.

Dados los números reales α y β, existe un número único δ que, sumado con α, da el número β; este número se llama *diferencia* o *resta* entre β y α. En efecto, la condición $\delta + \alpha = \beta$ equivale a ésta: $\delta + \alpha + (-\alpha) = \beta + (-\alpha)$, o sea $\delta = \beta + (-\alpha)$.

Por consiguiente, si es $\alpha = \{a_i;\ a'_i\}$, $\beta = \{b_i;\ b'_i\}$, **la diferencia** $\beta - \alpha$ es el número

$$\delta = \{b_i;\ b'_i\} + \{-a'_i;\ -a_i\} = \{b_i - a'_i;\ \ b'_i - a_i\}.$$

Así, las aproximaciones por *defecto* de la diferencia se obtienen restando de las *homónimas* del minuendo las aproximaciones por *exceso* del sustraendo, y análogamente por el otro lado.

EJEMPLO 1. (Cfr. § 8-8, c_1):

$$\begin{aligned} \pi - e = & \{\ 3,\ \ 3{,}1,\ \ 3{,}14,\ \ 3{,}141, \ldots;\ \ 4,\ \ 3{,}2,\ \ 3{,}15,\ \ 3{,}142, \ldots\} + \\ + & \{-3,\ -2{,}8,\ -2{,}72,\ -2{,}719, \ldots;\ -2,\ -2{,}7,\ -2{,}71,\ -2{,}718, \ldots\} = \\ = & \{\ 0,\ \ 0{,}3,\ \ 0{,}42,\ \ 0{,}422, \ldots;\ \ 2,\ \ 0{,}5,\ \ 0{,}44,\ \ 0{,}424, \ldots\}. \end{aligned}$$

c) *Desigualdad.* Un número real, $\alpha = \{a_i;\ a'_i\}$, se llama *positivo*, $(\alpha > 0)$, si tiene positiva alguna aproximación por *defecto*, es decir, $a_n > 0$ para algún n. Se llama *negativo* $(\alpha < 0)$ si tiene negativa alguna aproximación por *exceso*, es decir, $a'_n < 0$ para algún n. Si no se da ninguno de estos dos casos, habrá de ser el número real cero (§ 7-4). La desigualdad $\alpha > \beta$ se define mediante $\alpha - \beta > 0$.

d) *Multiplicación.* Dados dos números reales positivos, $\alpha = \{a_i;\ a'_i\} > 0$ y $\beta = \{b_i;\ b'_i\} > 0$, se llama *producto*, $\alpha . \beta$, al número $\alpha . \beta = \{a_i\, b_i;\ a'_i\, b'_i\}$, si se toma $a_i > 0$, $b_i > 0$ para todo i.

Las dos sucesiones monótonas:

$$\left.\begin{aligned} a_1 . b_1 \leqq a_2 . b_2 \leqq \ldots \leqq a_i . b_i \leqq \ldots \\ a'_1 . b'_1 \geqq a'_2 . b'_2 \geqq \ldots \geqq a'_i . b'_i \geqq \ldots \end{aligned}\right\}$$

son contiguas, pues por ser $0 < a_i \leqslant a'_i$ y $0 < b_i \leqslant b'_i$ se deduce $a_i\, b_i \leqslant a'_i\, b'_i$; además, siendo

$$a'_i\, b'_i - a_i\, b_i = a'_i\,(b'_i - b_i) + b_i\,(a'_i - a_i),$$

y como a_i y b_i son números que no exceden de cierta cota, mientras que $b'_i - b_i$ y $a'_i - a_i$ pueden hacerse tan pequeños como se quiera, también $a'_i\, b'_i - a_i\, b_i$ puede hacerse menor que cualquier número dado. Las dos sucesiones son, pues, contiguas, y al número real $\{a_i\, b_i;\ a'_i\, b'_i\}$ así definido, lo llamamos *producto* de α por β.

En general: llamamos *producto* de dos números reales cualesquiera, positivos o negativos, al producto de sus valores absolutos, con signo + ó —, según sean ambos del mismo o distinto signo. El producto por cero es cero.

EJEMPLO 2:

$$\begin{aligned} \alpha = & \{\ 1,\ \ 1{,}4,\ \ 1{,}41,\ \ 1{,}414, \ldots;\ \ 2,\ \ 1{,}5,\ \ 1{,}42,\ \ 1{,}415, \ldots\} \\ \beta = & \{-4,\ -3,\ \ -2{,}84,\ -2{,}830, \ldots;\ -2,\ -2{,}8,\ -2{,}82,\ -2{,}828, \ldots\} \end{aligned}$$

Como β es negativo, tomaremos su valor absoluto; es decir, su número opuesto, que es:

$$\{2,\ 2{,}8,\ 2{,}82,\ 2{,}828,\ \ldots;\ 4,\ 3,\ 2{,}84,\ 2{,}830,\ \ldots\},$$

y multiplicando por α, obtenemos:

$$\alpha\beta = -\{2,\ 3{,}92,\ 3{,}9762,\ 3{,}998792,\ \ldots;\ 8,\ 4{,}5,\ 4{,}0328,\ 4{,}00445,\ \ldots\}$$

La definición de multiplicación dada mediante dos particulares representaciones (encajes) de los factores reales tiene sentido, por cumplirse la ley uniforme.

En efecto, supongamos α y β definidos por otras sucesiones distintas: $\alpha = \{e_i; e'_i\}$, $\beta = \{f_i; f'_i\}$; el número $\{e_i f_i; e'_i f'_i\}$ es el mismo $\{a_i b_i; a'_i b'_i\}$. La demostración es como en la suma, si α y β son positivos. La conclusión subsiste, aunque no sean positivos, pues además de la igualdad de valores absolutos ya demostrada, tienen el mismo signo.

Se demuestra muy fácilmente la conservación de las *leyes formales de la multiplicación* (§ 6-2, b), es decir, de las leyes asociativa, modular, conmutativa, cancelativa y distributiva. Así también, un producto no puede ser nulo sin serlo alguno de los factores (§ 6-3).

También se demuestran (hágase) las *leyes formales de la desigualdad* (§ 6-5, a), es decir, las leyes de tricotomía, transitiva y de monotonía de la adición y multiplicación.

e) La *división* se funda en la existencia de los números *recíprocos*. Dado un número positivo, $\beta = \{b_i; b'_i\} > 0$, existe un número, $\left\{\frac{1}{b'_i}; \frac{1}{b_i}\right\}$, cuyo producto por β es 1.

En primer lugar, por ser $b_i \leqslant b'_i$, es $\frac{1}{b'_i} \leqslant \frac{1}{b_i}$. Como los números positivos b_i van creciendo, se conservan mayores que un cierto número *positivo* δ, es decir, $b_i > \delta$, y con mayor razón $b'_i > \delta$; luego se verifica:

$$\frac{1}{b_i} - \frac{1}{b'_i} = \frac{b'_i - b_i}{b'_i \cdot b_i} < \frac{b'_i - b_i}{\delta^2};$$

pero $b'_i - b_i$ puede hacerse tan pequeño como se quiera; luego, también $\frac{b'_i - b_i}{\delta^2}$; en efecto, para que sea menor que ε, basta hacer $b'_i - b_i < < \varepsilon \cdot \delta^2$.

Las sucesiones definen, pues, un número positivo, $\beta' = \left\{\frac{1}{b'_i}; \frac{1}{b_i}\right\}$ que se llama *recíproco* de β, y cuyo producto por β es

$$\beta' \cdot \beta = \left\{\frac{1}{b'_i}; \frac{1}{b_i}\right\}\{b_i; b'_i\} = \left\{\frac{b_i}{b'_i}; \frac{b'_i}{b_i}\right\}$$

Todos los números $\frac{b_i}{b'_i}$ son menores que 1, y todos los $\frac{b'_i}{b'_i}$ son mayores que 1; luego, 1 es el valor de este producto. Que el número β' es el único que cumple esta condición, resulta de la ley de monotonía; porque cualquier otro número, mayor o menor que él, multiplicado por β, da un producto mayor o menor que el anterior.

Obsérvese que las aproximaciones por *defecto* de β' son recíprocas de las aproximaciones por *exceso* de β, y análogamente para el otro lado.

Dados dos números positivos, $\alpha = \{a_i; a'_i\}$, $\beta = \{b_i; b'_i\}$, *existe un número único* γ, *cuyo producto por* β *es* α.

En efecto, si es $\beta\gamma = \alpha$, multiplicando por el recíproco de β, resulta $\beta\beta'\gamma = \alpha\beta'$, es decir: $\gamma = \alpha\beta'$; y recíprocamente, este número γ así determinado, cumple la condición impuesta, pues multiplicando por β resulta $\beta\gamma = \alpha\beta'\beta = \alpha$. Este número γ

se llama *cociente* de α por β, y se designa por $\frac{\alpha}{\beta}$ o $\alpha : \beta$. Por consiguiente:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \beta' = \{a_i ; a'_i\} \left\{\frac{1}{b'_i} ; \frac{1}{b_i}\right\} = \left\{\frac{a_i}{b'_i} ; \frac{a'_i}{b_i}\right\}$$

Si los números α y β no son positivos (ni nulos), su cociente es el cociente de los valores absolutos, con signo + o —, según que ambos tengan el mismo o contrario signo. En efecto, al multiplicar por el divisor el número así formado, el producto coincide en valor absoluto con el dividendo, y además en signo. Si es $\alpha = 0$, pero $\beta \neq 0$, es $\alpha : \beta = 0$.

Resumiendo: en el sistema real son posibles siempre las cuatro operaciones racionales: adición, sustracción, multiplicación y división, *excepto la división por cero.* (¿Por qué?). También son aplicables las reglas operativas de los números racionales, que son consecuencias de las propiedades fundamentales arriba expuestas.

f) Además, en el caso de que los datos de las operaciones sean números reales con frontera racional, el correspondiente resultado tiene como frontera el número racional resultado de la operación en el campo racional, es decir, puede establecerse un *isomorfismo* (§ 3-5) entre los números racionales y los números reales con frontera racional, lo que justifica su identificación en la teoría general del número. En esta forma, los números *racionales* se consideran un caso particular de los números *reales.* Los números reales que no son racionales se llaman *irracionales.*

6. **Clases contiguas y cortaduras de Dedekind.** — *a*) Se llaman, en general, *clases contiguas* a dos conjuntos *no vacíos,* A y A′, de números que cumplan las condiciones:

1ª) *Ordenación*: Todo número $a \in$ A es menor que todo número $a' \in$ A′.

2ª) *Contigüidad*: Para cada $\varepsilon > 0$ existe un par de números, $a \in$ A y $a' \in$ A′, tales que $a' - a < \varepsilon$.

Es ejemplo de clases contiguas en el campo racional un par de sucesiones monótonas contiguas (§ 7-4).

Si dado un par de clases contiguas en el campo racional, ampliamos dichas clases, haciendo que además de las dos condiciones anteriores se cumplan:

3ª) todo número menor que un número de la clase A o clase *inferior*, pertenece a esta clase;

4ª) todo número mayor que un número de la clase A′ o clase *superior*, pertenece a esta clase;

entonces se obtiene lo que se llama una *cortadura* en el campo racional.

Una sucesión de intervalos encajados determina siempre una cortadura, mediante la aplicación de estas dos condiciones. Recíprocamente, dada una cortadura {A; A′}, podemos siempre determinar de infinitas maneras pares de sucesiones monótonas contiguas tales que sus aproximaciones por defecto pertenezcan a la clase inferior A, y sus aproximaciones por exceso a la clase superior A′.

La condición de contigüidad muestra que en toda cortadura, a lo más existe un número racional α no clasificado. Porque si hubiesen dos

$\alpha_1 < \alpha_2$, se tendría $a < \alpha_1 < \alpha_2 < a'$, es decir, $a' - a > \alpha_2 - \alpha_1$ para cualesquiera a y a', y tomando $\varepsilon < \alpha_2 - \alpha_1$, dicha condicion de contigüidad no podria cumplirse.

Los cuatro casos siguientes pueden presentarse en una cortadura $\{A;\ A'\}$, de clases *no vacías*:

1º) *Existe un número racional no clasificado* α. Entonces, los números de la clase inferior son los números menores que α, y los números de la clase superior, los mayores que α. El número α determina la cortadura, y recíprocamente, la cortadura define α.

2º) *Existe en la clase inferior un número* α *no superado por los demás.* Entonces, los números de la clase inferior son los números que no superan a α, los números de la clase superior son los mayores que α. El número α, *máximo* de la clase inferior (§ 23-14), determina la cortadura; la cortadura define α.

3º) *Existe en la clase superior un número* α *que es superado por los demás.* Correlativo del anterior, siendo ahora α *mínimo* de la clase superior (§ 23-14).

4º) *Todos los números racionales quedan clasificados, sin que la clase inferior tenga máximo ni la clase superior mínimo.* Entonces, la cortadura define un *número irracional* α, que resulta mayor que todos los números de la clase inferior y menor que todos los números de la clase superior.

Este último caso se da efectivamente, como hemos visto (§ 7-3), clasificando en la clase inferior todos los números racionales negativos y los positivos de cuadrado menor que 2, y en la clase superior todos los números racionales positivos de cuadrado mayor que 2.

Si una cortadura clasifica a *todos* los números racionales (como hacía DEDEKIND), entonces basta que se cumpla para clases *no vacías* la primera condición (ordenación), para que las demás, y en particular la de contigüidad, se deduzcan como consecuencia.

b) DEDEKIND definió en 1872 el número real mediante cortaduras, mientras que las clases contiguas fueron introducidas por CAPELLI en 1897. En el § 20-6 nos ocuparemos de las sucesiones regulares, o de CAUCHY, mediante las cuales se obtiene otro método de gran importancia teórica para introducir el número real; fué desarrollado en 1872 por CH. MÉRAY y G. CANTOR. Este método de CANTOR-MÉRAY fué evolucionando a través de las exposiciones de R. LIPSCHITZ (1877), C. ARZELÀ (1883) y P. BACHMANN (1892), hasta llegar a ser el de las dos sucesiones monótonas contiguas aquí expuesto. Existen otros métodos para *completar* la recta racional mediante los irracionales; históricamente, es importante el utilizado en sus lecciones de Berlín por C. WEIERSTRASS, y publicado en 1872 por E. KOSSAK, al considerar los números reales como representantes de conjuntos de infinitos elementos, tales las sumas infinitas acotadas de términos racionales positivos; modernamente se emplea el método de postular la existencia y unicidad del extremo superior (§ 23-14) de todo conjunto lineal acotado superiormente.

c) La *desigualdad* entre números reales dados mediante cortaduras, se define diciendo que $\alpha < \beta$ si hay un número racional c que cumpla las condiciones $c > \alpha$ y $c < \beta$, es decir, cuando hay un número de la clase superior de α que figura en la clase inferior de β.

Dados dos números reales α y β, mediante cortaduras, $\alpha = \{A;\ A'\}$ y $\beta = \{B;\ B'\}$, al sumar cada número a de A con cada b de B, y cada a' de A' con cada b' de B', se forman dos clases: $A + B$, $A' + B'$, que definen la *suma* $\alpha + \beta$, pues cumplen la condición de contigüidad, ya que la diferencia, $(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b)$, es positiva y puede hacerse arbitrariamente pequeña.

Con procedimiento análogo al de la suma se forma el *producto* de dos números reales: se empieza por el caso de que ambos sean *positivos*, con la advertencia de poner en la clase inferior del producto los números

negativos y los productos de los elementos *positivos* de las clases inferiores de los factores; el producto de dos números reales de signo cualquiera se define mediante el de sus valores absolutos y la aplicación de la regla de los signos.

d) A partir de estas definiciones, también pueden demostrarse (véase bibliografía en nota IV) todas las leyes formales. Además, resulta que el sistema de números reales dados mediante cortaduras (y también por clases contiguas o cualquiera de los otros métodos señalados anteriormente) es isomorfo al sistema que nosotros hemos adoptado mediante sucesiones de intervalos encajados; es decir: todos esos sistemas corresponden a un concepto de número real esencialmente único (§ 1-6). Aun más: en la nota I puede verse que, en general, el sistema de números reales cumple los importantes teoremas de *plenitud* y *unicidad*.

Aquí, en particular veremos sólo que dos clases contiguas (y en particular una cortadura o dos sucesiones monótonas contiguas), dadas no ya en el campo racional, sino en el campo real (es decir, sus elementos son números racionales o irracionales), tienen siempre un elemento real y uno solo de separación. En efecto, consideremos dos clases contiguas, $\{\alpha; \alpha'\}$, en el campo de los números *reales*, y definamos una cortadura en el campo racional, poniendo en la primera clase los números *racionales* que no superan a ningún α', es decir, $a \leqslant \alpha'$; y en la segunda clase, los números racionales no superados por ningún α, es decir, $a' \geqslant \alpha$.

Puede haber un número racional excepcional mayor que todo α y menor que todo α', pero no puede haber dos; pues si su diferencia fuera $d > 0$, sería $\alpha' - \alpha > d$, contra la supuesta contigüidad de las clases.

Prescindiendo de ese caso en que existe frontera racional, la clasificación efectuada en el campo racional es una cortadura que define un número irracional ξ. No puede ser $\xi < \alpha$, pues entonces habría un número racional intermedio $a > \xi$; tampoco puede ser $\xi > \alpha'$, pues habría un número racional intermedio $a' < \xi$. Por consiguiente, es $\alpha \leqslant \xi < \alpha'$, o bien $\alpha < \xi \leqslant \alpha'$.

Esta demostración es aplicable al caso en que se considere ya sea una cortadura, ya sea una sucesión de intervalos encajados, dadas en el campo real y no meramente en el racional, porque una y otra son casos particulares de clases contiguas.

Mientras que las sucesiones de números racionales constituyen el método de cálculo de la aritmética (raíces, logaritmos, número *e*, etc.), estas cortaduras y sucesiones entre números reales, y más en general las clases contiguas, son los instrumentos usados en aritmética y en geometría para definir longitudes, áreas, volúmenes, etc. Así, por ejemplo, el número π se define como número frontera entre dos sucesiones de números reales, perímetros de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos; o bien entre las dos clases contiguas de *todos* los polígonos inscriptos y circunscriptos. Así también aparece la integral, definida como frontera de dos clases contiguas de sumas por defecto y por exceso.

e) El postulado de continuidad de la recta en la forma de CANTOR (§ 7-4) es el que corresponde al concepto de número real dado por sucesiones de intervalos encajados. Si se emplean cortaduras, el postulado correspondiente es el de DEDEKIND:

Si los puntos de la recta se clasifican en dos conjuntos, de modo que todo punto del primero quede a la izquierda de todo punto del segundo, hay un punto único que separa ambos conjuntos.

Intuitivamente, este axioma (demostrable como *teorema* a partir del de CANTOR, y recíprocamente) dice: Si imaginamos coloreados todos los puntos de una recta, los unos de rojo (clase A), los otros de negro (clase A'), de tal manera que existan realmente las dos clases y cada punto rojo esté a la izquierda de cada uno de los negros, entonces los dos colores, rojo y negro, estarán en contacto en un cierto lugar, a la izquierda del cual todos los puntos serán rojos y a la derecha todos negros. El

contenido esencial del postulado es que en aquel lugar hay realmente un punto único, cuya coordenada es el elemento frontera de la cortadura correspondiente.

En el § 7-1, *a* se ha visto que los puntos racionales, a pesar de formar un conjunto denso sobre la recta, no llenan a ésta. Para llenarla necesitamos los puntos irracionales, y como puede verse en la nota I, la recta en este caso no presenta ya "poros", debiéndose considerar a los puntos racionales como "sumamente escasos" respecto de los puntos irracionales (nota II).

7. Conjuntos lineales: intervalos. — Los conjuntos de números reales se llaman lineales por la correspondencia biunívoca, sin excepción, que puede establecerse entre los puntos de una línea recta y los números reales, una vez fijado un *sistema de abscisas* (§ 6-6), es decir, un punto *origen* O (punto 0) y un punto *unidad* U (punto 1), que determinan la unidad de medida y el sentido positivo sobre la recta. En efecto, cada número racional positivo o negativo *a* está representado por un punto A o por el segmento OA. (§ 6-6).

Dado un número irracional por dos sucesiones, $\{a_n, a'_n\}$, los segmentos $A_n A'_n$ que representan los pares de números racionales tienden a 0, y cada uno está contenido en el anterior. El *postulado de continuidad de la recta* expresa que existe un punto común a todos ellos, y ese punto se adopta como representante del número irracional.

Recíprocamente, dado un segmento cualquiera, OP, existe un *número natural* n tal, que n. OU > OP (Postulado de ARQUÍMEDES), y subdividiendo la unidad (Postulado de división del segmento) se van obteniendo medidas por defecto y por exceso; si se llega en una de tales divisiones al punto P, resulta abscisa racional; en caso contrario se obtienen dos sucesiones contiguas de números racionales, que definen un número irracional, el cual adoptamos como abscisa del punto P.

Llegamos así al principio fundamental de la geometría analítica: *Cada punto de la recta tiene una abscisa real, y a cada abscisa real corresponde un punto.*

En lo sucesivo, las palabras *punto* y *número* son sinónimas, y las relaciones aritméticas pueden expresarse en lenguaje geométrico. Así, por ejemplo, tenemos estas equivalencias:

A la *derecha* de a	*mayor* que a
A la *izquierda* de a	*menor* que a
Distancia entre a y b	$\mid a - b \mid$
Intervalo abierto (a, b)	*conjunto* $a < x < b$
Intervalo cerrado o *segmento* $[a, b]$	*conjunto* $a \leqq x \leqq b$.

Análogamente, los intervalos $(a, b]$, $[a, b)$ designan, respectivamente, los conjuntos $a < x \leqq b$; $a \leqq x < b$. VALLÉE POUSSIN y otros autores usan esta notación de DIRICHLET para los cuatro tipos arriba definidos $(a + 0, b - 0)$, (a, b), $(a + 0, b)$. $(a, b - 0)$. Algunos autores usan paréntesis angulosos, en vez de cuadrados.

Extremos del intervalo son los números a y b, y los números intermedios se llaman *interiores*. Éstos comprenden, de ahora en adelante, todos los números reales situados entre a y b, y no sólo los racionales, como en el § 6-6, y que hemos utilizado para la introducción del número real mediante sucesiones de "intervalos racionales" encajados (§ 7-4). *Amplitud* del intervalo es el número $b - a$.

Llamaremos *intervalos infinitos* a los conjuntos siguientes:

$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, +\infty)$;
$a < x$, $a \leqq x$, $x < a$, $x \leqq a$, todo x real.

La representación geométrica resulta muy útil para com-

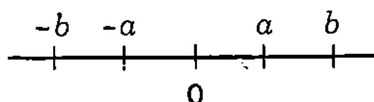


Fig. 22.

prender rápidamente las desigualdades y relaciones abstractas que se establezcan entre diversos números. Así, recordemos que de $a < b$ se deduce $-b < -a$ (fig. 22), y para $a > 0$ es también $1/b < 1/a$. Se verifica $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; $|1/a| = 1/|a|$; $|a/b| = |a|/|b|$ con $b \neq 0$. Se cumplen (fig. 23):

$$|a + b| \leqq |a| + |b|$$
$$|a + b| \geqq ||a| - |b||.$$

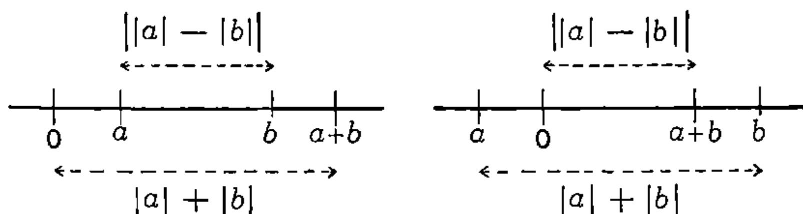


Fig. 23.

Son equivalentes las relaciones $|x| < r$ y $-r < x < r$, (fig. 24),

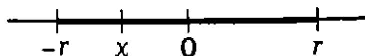


Fig. 24.

así como las $|x - a| < r$ y $a - r < x < a + r$, (fig. 25).

El conjunto de números x que cumple esta última desigualdad recibe el nombre de *entorno simétrico* del punto a, y tiene

amplitud $2r$. En general, *entorno* de un punto c es todo intervalo (a, b) tal que $a < c < b$. *Entorno a la izquierda* de c es

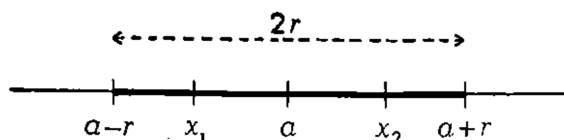


Fig. 25.

todo intervalo (a, c). *Entorno a la derecha* de c es todo intervalo (c, b).

En el § 23-14 y Cap. VI, notas II y III, completaremos el estudio de los conjuntos lineales.

Ejercicios

1. Demostrar que cada uno de los siguientes números es irracional. *a*) $3\sqrt{2}$; *b*) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$; *c*) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$; *d*) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$, y hallar pares de sucesiones monótonas contiguas que los determinen. Mediante ellas, calcular la diferencia del 1º y 3º, y el cociente del 2º y 4º.

2. Hallar un valor de n_0 tal que para $n > n_0$ sea $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0{,}0001$. Generalizar, tomando el segundo miembro tan pequeño como se quiera.

3. Demostrar que forman par de sucesiones monótonas contiguas $\{a_n;\ a'_n\}$ las obtenidas tomando.

$$a_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}; \qquad a'_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3};$$

y hallar el número real que determinan. Aplicar la relación de equivalencia [7-16] entre $\{a_n;\ a'_n\}$ y $\{b_n;\ b'_n\}$,

$$\text{con } b_n = \frac{n-1}{3n}; \quad b'_n = \frac{n+1}{3n}.$$

4. Sea $0 < x_1 < y_1$, y pongamos para $n \geqslant 1$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ (media aritmética); $x_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ (media armónica). Hallar el número real que determina el par de sucesiones monótonas contiguas $\{x_n;\ y_n\}$ y aplicarlo a $\sqrt{2}$.

5. Estudiar el par de sucesiones:

$$(*) \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + r_n); \quad r_{n+1} = \sqrt{r_n a_{n+1}}$$

con $a_0 = 0$ y $r_0 = \frac{1}{2}$, probando que son monótonas contiguas. Probar que el elemento de separación es $1/\pi = 0{,}318\,309\,886\ldots$ considerando los a y r como apotemas y radios de polígonos regulares isoperimétricos cuyo número de lados se va duplicando, siendo el primero el cuadrado de perímetro 2.

6. Estudiar el par de sucesiones (*) para el caso general $0 < a_0 \leqslant r_0$, cuya frontera se llama *media aritmético-geométrica* de a_0 y r_0.

7. Si los números reales forman cuerpo de racionalidad, probar que los números de la forma $a + b\sqrt{2}$ (a. b racionales) forman un subcuerpo de racionalidad, designado por $R(\sqrt{2})$ (o también $C(1, \sqrt{2})$, cfr § 17-1, *a*). Hallar los subcuerpos de racionalidad contenidos en $R(\sqrt{2})$.

8. *a*) Demostrar que la correspondencia $a + b\sqrt{7} \leftrightarrow a + b\sqrt{11}$ (a, b racionales) *no* es un isomorfismo. *b*) Más aún: probar que no puede existir ningún isomorfismo entre los cuerpos $R(\sqrt{7})$ y $R(\sqrt{11})$.

9. ¿Continúa siendo válido el postulado geométrico de CANTOR (§ 7-4) sobre encaje de intervalos, si éstos son semicerrados o abiertos?

10. Demuéstrese que son *lógicamente equivalentes* los tres principios: 1º) De CANTOR (§ 7-4); 2º) De DEDEKIND (§ 7-6, *e*); 3º) De la existencia y unicidad del extremo superior (§ 23-14) de todo conjunto lineal acotado superiormente (§ 7-6, *b*).

§ 8. POTENCIAS Y LOGARITMOS DE LOS NÚMEROS REALES

1. **Raíz aritmética.** — Siguiendo el método de aproximaciones racionales por defecto y por exceso (§ 7-4), dado un número *real positivo* cualquiera, β, se pueden hallar dos números racionales que defieran en $1/n$, y cuyas potencias m-simas comprendan al número β. En efecto, la condición:

$\left(\frac{a}{n}\right)^m \leqq \beta < \left(\frac{a+1}{n}\right)^m$ equivale a ésta: $a^m \leqq \beta \,.\, n^m < (a+1)^m$, y si E es la parte entera de $\beta \,.\, n^m$, para que esta condición se cumpla basta que sea

$$a^m \leqq E < (a+1)^m;$$

luego, *el numerador a de la fracción buscada es la raíz, en menos de una unidad, de la parte entera ae* βn^m.

EJEMPLOS: 1. Hallar la raíz cúbica de $\frac{4}{75}$ en menos de 0,01. Formaremos el producto $\frac{4 . 100^3}{75} = \frac{160000}{3}$, cuya parte entera es 53333; la raíz cúbica de este número, en menos de una unidad, es 37; luego 0,37 y 0,38 son las raíces por defecto y por exceso de $\frac{4}{75}$ en menos de 0,01.

2. Raíz cuadrada de π en menos de 0,001. La parte entera de $\pi\ 1000^2$ es 3141592, cuya raíz cuadrada entera es 1772; luego, 1,772 y 1,773 son las raíces de π, por defecto y por exceso, en menos de 0,001.

Así, pues, dado un número real *positivo* β (racional o irracional), podemos hallar sus raíces m-simas $a_1 = \frac{a}{n}$, $a'_1 = \frac{a+1}{n}$, por defecto y por exceso, en menos de $1/n$. Podemos subdividir la unidad y hallar las raíces en menos de $1/n^2$; pero como la potencia m-sima de $an/n^2 = a/n$ está contenida en β, la nueva raíz por defecto será igual o mayor que ésta; y como la potencia m-sima de $\frac{(a+1)n}{n^2} = \frac{a+1}{n}$ es mayor que β, la nueva raíz por exceso será igual o menor que

ésta. Siguiendo así, si calculamos las raíces por defecto y por exceso en menos de $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}; \dots,$ obtenemos las sucesiones monótonas (escritas como en la fig. 21):

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \dots \leqq a'_3 \leqq a'_2 \leqq a'_1,$$

que son contiguas, puesto que cumplen las condiciones siguientes:

[8-1] $\quad a_i < a'_i, \quad$ por ser $\quad a_i^m \leqq \beta < a'^m_i,$

y además, $a'_i - a_i = 1/n^i < \varepsilon$, tomando i suficientemente grande.

Hemos definido así un número real:

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots; a'_1, a'_2, a'_3, \dots\}$$

cuya potencia m-sima es:

$$\alpha^m = \{a_1^m, a_2^m, a_3^m, \dots; a'^m_1, a'^m_2, a'^m_3, \dots\},$$

y como, según [8-1], es β el elemento de separación de estas dos sucesiones, resulta $\alpha^m = \beta$. Cualquier otro número $\alpha' \gtrless \alpha$ no puede satisfacer a esta misma condición, puesto que según § 7-5, *d*, resulta $\alpha'^m \gtrless \alpha^m$. Por consiguiente:

Existe un número positivo único α, *que cumple la condición* $\alpha^m = \beta$.

Este número α se llama *raíz m-sima exacta de* β, y se representa así: $\sqrt[m]{\beta}$.

También, a dicho número positivo α, suele llamárselo *raíz aritmética, valor aritmético o determinación aritmética* del radical, para distinguirlo de otros valores que más tarde asignaremos a esta misma expresión.

Si el índice m es par, el valor $-\sqrt[m]{\beta}$ cumple la misma condición que el $\sqrt[m]{\beta}$, y se llama *raíz m-sima negativa* de β.

Si el número $\beta = -\beta'$ es negativo, tiene o no raíz m-sima, según que m sea impar o par; pues en el primer caso el número $\alpha = -\sqrt[m]{\beta'}$ cumple la condición $\alpha^m = -\beta'$; y en el segundo no hay ningún número positivo ni negativo que la cumpla, pues las potencias de exponente par son siempre *positivas.*

2. **Cálculo de radicales.** — *a*) *La raíz m-sima de un producto* $\alpha.\beta.\gamma \dots \lambda$ *es el producto de las raíces m-simas de los factores.* Es decir:

$$\sqrt[m]{\alpha\beta\gamma \dots \lambda} = \sqrt[m]{\alpha}\sqrt[m]{\beta}\sqrt[m]{\gamma} \dots \sqrt[m]{\lambda}.$$

Suponiendo, por ejemplo, tres factores, basta observar que

$$\left(\sqrt[m]{\alpha}\sqrt[m]{\beta}\sqrt[m]{\gamma}\right)^m = \left(\sqrt[m]{\alpha}\sqrt[m]{\beta}\sqrt[m]{\gamma}\right)\left(\sqrt[m]{\alpha}\sqrt[m]{\beta}\sqrt[m]{\gamma}\right) \overset{m}{\dots} \left(\sqrt[m]{\alpha}\sqrt[m]{\beta}\sqrt[m]{\gamma}\right) =$$

$$= \left(\sqrt[m]{\alpha}\right)^m . \left(\sqrt[m]{\beta}\right)^m . \left(\sqrt[m]{\gamma}\right)^m = \alpha.\beta.\gamma.$$

Análogamente: *la raíz m-sima de un cociente es el cociente de las raíces m-simas del dividendo y del divisor.*

EJEMPLO 1:

$$\sqrt[3]{2^3 \,.\, 13^3} = 2 \,.\, 13; \qquad \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$

b) La potencia n-sima de una raíz m-sima se obtiene extrayendo la raíz m-sima de la potencia n-sima del número subradical, pues:

$$\left(\sqrt[m]{\alpha}\right)^n = \sqrt[m]{\alpha}\sqrt[m]{\alpha}\ldots\sqrt[m]{\alpha} = \sqrt[m]{\overset{n}{\alpha\,\alpha\ldots\alpha}} = \sqrt[m]{\alpha^n}.$$

EJEMPLO 2:

$$(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{4}.$$

c) La raíz n-sima de la raíz m-sima de un número es la raíz m n-sima de este número. Es decir:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[m\,n]{\alpha}.$$

Basta observar que:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}}\right)^{m\,n} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}}\right)^n\right)^m = \left(\sqrt[m]{\alpha}\right)^m = \alpha.$$

Resulta de aquí que *el orden en la extracción de raíces es indiferente.*

d) Una raíz no varía si se multiplican (dividen) por un mismo factor el índice y el exponente del número subradical. Es decir:

$$\sqrt[m\,n]{\alpha^{hn}} = \sqrt[m]{\alpha^h}\ .$$

En efecto:

$$\sqrt[m\,n]{\alpha^{hn}} = \left(\sqrt[m\,n]{\alpha^h}\right)^n = \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha^h}}\right)^n = \sqrt[m]{\alpha^h}\ .$$

e) Resulta de aquí: *Se pueden reducir varios radicales a un índice común* μ, *mínimo común múltiplo de todos los índices, multiplicando cada índice m por el cociente* $\frac{\mu}{m}$, *y elevando el número subradical a este exponente.*

EJEMPLO 3:

$$\sqrt[6]{3}\,.\sqrt{2}\,.\sqrt[4]{2^2\,.\,3^3} = \sqrt[12]{3^4}\sqrt[12]{2^6}\,.\sqrt[12]{2^6\,.\,3^9} = \sqrt[12]{2^{12}\,.\,3^{13}}\,. = \sqrt[12]{(2\,.\,3)^{12}\,.\,3} =$$
$$= \sqrt[12]{6^{12}}\,.\sqrt[12]{3} = 6\sqrt[12]{3}\ .$$

3. **Racionalización de denominadores.** — En muchas cuestiones en que se presentan fracciones cuyo denominador es una expresion irracio-

nal, conviene transformarlas en otras equivalentes, de denominador racional. Esta racionalización puede lograrse *siempre*, como se demuestra en Álgebra superior, multiplicando numerador y denominador por una expresión irracional conveniente. Sin embargo, es tan complicada la fracción obtenida, que sólo en casos muy sencillos puede tener utilidad práctica. Solamente de estos casos más elementales, nos ocuparemos aquí.

a) Para racionalizar el denominador de una fracción $\frac{A}{\sqrt[m]{a}}$, siendo a un número racional, basta multiplicar por $\sqrt[m]{a^{m-1}}$ y resulta:

$$\frac{A}{\sqrt[m]{a}} = \frac{A \cdot \sqrt[m]{a^{m-1}}}{a}.$$

b) Se racionaliza el denominador de toda expresión del tipo

$$\frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}, \text{ o bien: } \frac{A}{\sqrt{a} \pm c}$$

multiplicando los dos términos por la expresión conjugada:

$$\sqrt{a} \mp \sqrt{b} \quad \text{o bien:} \quad \sqrt{a} \mp c,$$

respectivamente. En efecto, resulta:

$$\frac{A(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}, \text{ o bien: } \frac{A(\sqrt{a} \mp c)}{a - c^2}.$$

c) Si el denominador es $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ (incluyendo en este caso el denominador del tipo $\sqrt[n]{a} - c$), basta multiplicar por

$$R = \sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}}\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{a^{n-3}}\sqrt[n]{b^2} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}},$$

y resulta:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} = \frac{A \cdot R}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n - \left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{A \cdot R}{a - b}$$

Análogamente se procede si el denominador es suma de dos raíces de igual índice; pues, según § 4-10, multiplicando por

$$R = \sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}}\sqrt[n]{b} + \ldots \pm \sqrt[n]{b^{n-1}}$$

la expresión se transforma así:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}} = \frac{A \cdot R}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \pm \left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{A \cdot R}{a \pm b}$$

según que n sea impar o par. Si $a = b$ y n par, es $R = 0$, pero la racionalización es inmediata, según el caso *a*).

4. **Potencias de exponente racional.** — Obsérvese que mientras hemos generalizado las definiciones de todas las operaciones, para hacerlas aplicables a los números reales, hasta ahora no hemos definido la potenciación sino para exponentes enteros.

¿Qué significado hemos de atribuir al símbolo $a^{\frac{m}{n}}$, siendo $\frac{m}{n}$ un número racional positivo? En virtud del principio de

permanencia de las leyes formales, definiremos esta operación de modo que coincida con la ya conocida, en el caso $n = 1$; y que satisfaga a las mismas reglas de cálculo demostradas para las potencias ordinarias.

1º Sabemos que si h y k son números naturales, es $(\alpha^h)^k = \alpha^{hk}$; luego, daremos a $\alpha^{\frac{m}{n}}$ tal significado, que sea $\left(\alpha^{\frac{m}{n}}\right)^n = \alpha^m$, es decir: *convendremos en definir* $\alpha^{\frac{m}{n}}$ *por la igualdad:*

$$\alpha^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^m} = \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^m,$$

la que tendrá sentido en el campo real para $\alpha < 0$, sólo si n es impar (§ 8-1).

Puede admitirse esta definición, pues satisface a la ley uniforme, es decir, si $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ es $\alpha^{m/n} = \alpha^{m'/n'}$. En efecto (§ 8-2, *d*):

$$\sqrt[n]{\alpha^m} = \sqrt[nn']{\alpha^{mn'}} = \sqrt[n']{\alpha^{m'}} = \sqrt[n'n]{\alpha^{m'n}}.$$

y por ser $m\,n' = n\,m'$, ambas raíces son iguales.

2º Supuesto $\alpha \neq 0$, para que subsista la ley de multiplicación de potencias de la misma base, sumando los exponentes, habremos de atribuir a α^0 el valor 1, como ya hicimos (§ 6-7) para que sea $\alpha^{m+0} = \alpha^m \cdot \alpha^0 = \alpha^m$.

3º Por la misma razón, con $\alpha \neq 0$, el valor que atribuyamos a $\alpha^{-m/n}$ ha de ser tal que multiplicado por $\alpha^{m/n}$ resulte $\alpha^0 = 1$; luego convendremos en definirla así:

$$\alpha^{-m/n} = \frac{1}{\alpha^{m/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha^m}}.$$

Con los tres convenios anteriores podemos evitar el cálculo con radicales *, *con la ventaja de que el cálculo con las potencias así generalizadas sigue las mismas leyes que cuando los exponentes son números naturales.*

Para verlo, demuéstrese como ejercicio, utilizando los teoremas (§ 8-2) y las definiciones anteriores, que con exponentes racionales también se cumple:

TEOR. 1: *Para multiplicar (dividir) dos potencias de la misma base, se suman (restan) los exponentes.*

TEOR. 2: *La potencia de una potencia se obtiene tomando la misma base, y por exponente el producto de los dos exponentes.*

---

* Siendo precisamente éste el objeto de la introducción de los exponentes fraccionarios, sería pueril introducir, además, radicales de índice fraccionario o negativo.

5. Variación y representación gráfica de las potencias de exponente racional. — *a*) Supongamos primero que *varía la base*, supuesta siempre *positiva*, por ejemplo creciendo $0 < \alpha < \beta$. Entonces, *si* α *y* β *son números reales positivos y* $\alpha < \beta$, *es* $\alpha^{n/m} < \beta^{n/m}$, *siendo* $\dfrac{n}{m}$ *un exponente racional* positivo *cualquiera*.

Porque si fuese

$$\alpha^{\frac{n}{m}} \geqq \beta^{\frac{n}{m}}, \quad \text{o sea:} \quad \sqrt[m]{\alpha^n} \geqq \sqrt[m]{\beta^n},$$

elevando a la potencia m resultaría $\alpha^n \geqq \beta^n$, lo que es falso (§ 7-5, *d*).

En cambio, si el exponente es negativo $-n/m$, resulta $\alpha^{-n/m} > \beta^{-n/m}$.

En particular, si es $\beta = 1$, resulta: *según que sea* $\alpha \gtrless 1$ *es, respectivamente*, $\alpha^{n/m} \gtrless 1$, *y* $\alpha^{-n/m} \lessgtr 1$.

Las conclusiones anteriores se recuerdan mucho mejor mediante la representación gráfica de dicha variación. Si representamos por r el exponente racional fijo n/m, y llamamos x a la base *positiva* variable, tomada sobre el eje de las abscisas en un sistema cartesiano visto en Geometría analítica, designemos la potencia respectiva por $y = x^r$, que llevaremos sobre el eje de las ordenadas, dando así el punto representativo de la correspondencia (x, y).

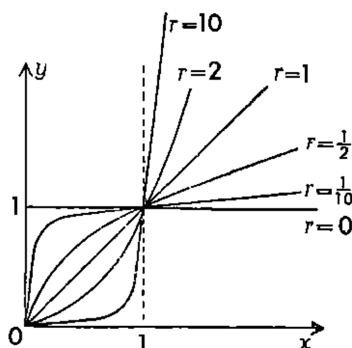


Fig. 26.

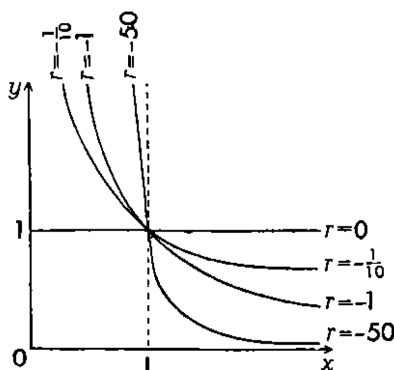


Fig. 27.

Entonces, la figura 26 da las gráficas de la variación x^r para distintos valores fijos del exponente $r > 0$ (y crece con x), mientras que la figura 27 las da para valores fijos del exponente $r < 0$ (y decrece cuando x crece). Obsérvese, además, que para $r > 0$, *las potencias* x^r *llegan a ser mayores que cualquier número positivo por grande que sea, tomando la base* x *suficientemente grande*, pues para que sea $x^r > A > 0$, basta tomar $x > A^{1/r}$.

También, *para $r > 0$, las potencias x^r llegan a diferir de cero tan poco como se quiera, tomando la base positiva x suficientemente pequeña,* pues para que sea $0 < x^r < \delta$, basta tomar $x < \delta^{1/r}$.

Si $r = -p < 0$, se deducen las conclusiones correlativas para *exponente negativo* (hágase), poniendo $x^r = x^{-p} = 1/x^p$ (fig. 27).

b) Supongamos ahora que *varía el exponente,* con base fija $\alpha > 0$. Si es $r > r'$, calculemos

$$\alpha^r - \alpha^{r'} = \alpha^{r'}(\alpha^{r-r'} - 1),$$

y como $r - r' > 0$, según sea $\alpha \gtrless 1$, será el paréntesis positivo o negativo, y por lo tanto, $\alpha^r \gtrless \alpha^{r'}$, respectivamente. Obsérvese que la demostración subsiste si los exponentes son números racionales negativos, pues lo que interviene en ella es la diferencia $r - r'$.

Resumiendo: *Las potencias de exponente racional de los números positivos mayores (menores) que 1, son mayores (menores) que 1 si el exponente es positivo, y son menores (mayores) que 1 si es negativo. En ambos casos crecen (decrecen) al crecer el exponente.*

Estas conclusiones se recuerdan, como antes, mucho mejor mediante la representación gráfica de dicha variación. Sea α la base *real positiva* fija; llamemos x al exponente variable, ahora *positivo o negativo, pero racional,* tomado sobre el eje de las abscisas en un sistema cartesiano, y designemos con $y = \alpha^x$ la potencia respectiva, llevada sobre el eje de las ordenadas para dar el punto representativo de la correspondencia (x, y).

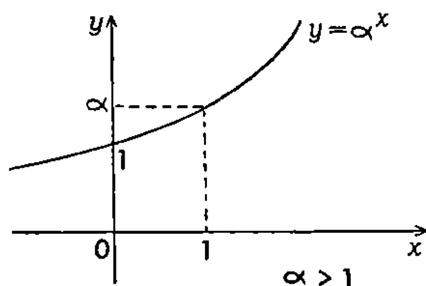


Fig. 28.

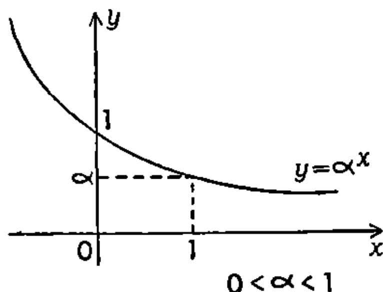


Fig. 29.

Entonces, la figura 28 da la gráfica de la variación de α^x para $\alpha > 1$, mientras que la figura 29 la da para $0 < \alpha < 1$, fácilmente deducible de la anterior si se pone $\alpha = 1/\alpha_1$ con $\alpha_1 > 1$, resultando $\alpha^x = 1/\alpha_1{}^x$.

No sólo aumentan las potencias de los números mayores que 1, sino que *llegan a ser mayores que cualquier número positivo, por grande que sea, tomando suficientemente grande el exponente.*

En efecto, sea el número $1+\delta$, siendo $\delta > 0$. Tomando un exponente natural n, es $(1+\delta)^n \geqq 1+n\delta$, según demostramos por inducción (§ 2-2, ejemplo). Entonces, dado un número A, por grande que sea llega a ser $1+n\delta > A$ con sólo tomar $n > (A-1)/\delta$; luego, para este valor de n y para todos los valores racionales $r > n$, se verifica $(1+\delta)^r > A$.

De aquí se deduce que *las potencias de los números mayores que* 1 *pueden hacerse tan pequeñas como se quiera, tomando el exponente negativo y en valor absoluto suficientemente grande*, pues es $\alpha^{-n} = 1/\alpha^n$.

Hemos demostrado también que si la base es $\alpha > 1$, al disminuir el exponente disminuye la potencia, conservándose siempre mayor que 1; vamos a demostrar que *tomando el exponente suficientemente pequeño, dicha potencia llega a diferir de* 1 *tan poco como se quiera.* Es decir, dado un número ε, por pequeño que sea, existe un exponente $\dfrac{1}{m}$ tal que

$$\alpha^{1/m} - 1 < \varepsilon, \quad \text{o sea: } \alpha^{1/m} < 1+\varepsilon.$$

En efecto, basta que sea $\alpha < (1+\varepsilon)^m$, y ya hemos demostrado que esto se verifica desde un valor de m en adelante. Hallado este exponente $\dfrac{1}{m}$, cualquier otro exponente racional positivo $r < \dfrac{1}{m}$ cumple la condición $0 < \alpha^r - 1 < \varepsilon$.

Si $r = -p < 0$, por ser $\alpha^r = 1/\alpha^p$, también para r negativo suficientemente próximo a cero, la potencia llega a diferir de uno en tan poco como se quiera.

Dedúzcanse las conclusiones correlativas para la base fija α, en que $0 < \alpha < 1$ (figura 29).

6. **Potencias de exponente real: su variación.** — Hemos generalizado el significado de la potencia para exponentes racionales; nos falta todavía definir la potencia cuya base α sea un número real *positivo*, y el exponente λ un número real cualquiera, positivo, negativo o nulo.

a) Consideremos primero el caso $\alpha > 1$. El encaje de intervalos que define λ viene dado por (§ 7-4) dos sucesiones monótonas contiguas de números racionales:

[8-2] $$l_1 \leqq l_2 \leqq l_3 \leqq \ldots \leqq \lambda \leqq \ldots \leqq l'_3 \leqq l'_2 \leqq l'_1$$

y formando las potencias

$$\alpha^{l_1}, \alpha^{l_2}, \alpha^{l_3}, \ldots \quad \text{y} \quad \alpha^{l'_1}, \alpha^{l'_2}, \alpha^{l'_3}, \ldots,$$

por ser $\alpha > 1$, se tiene (§ 8-5, *b*):

[8-3] $$\alpha^{l_1} \leqq \alpha^{l_2} \leqq \alpha^{l_3} \leqq \ldots \leqq \alpha^{l'_3} \leqq \alpha^{l'_2} \leqq \alpha^{l'_1}$$

Ahora bien:

$$\alpha^{l'_i} - \alpha^{l_i} = \alpha^{l_i}(\alpha^{l'_i - l_i} - 1).$$

y como la diferencia $l'_i - l_i$ puede hacerse tan pequeña como se quiera, tomando i bastante grande, el número encerrado en-

tre paréntesis llega a ser tan pequeño como se quiera; y también el producto por α^{l_i}, ya que este factor se conserva acotado. Las sucesiones [8-3] de números *reales* (§ 7-6, *d*) definen, pues, un número único, β, al cual llamamos *potencia de base* α *y exponente* λ.

Análogamente, si es $\alpha < 1$, las sucesiones de potencias de α

$$\alpha^{l'_1} \leqq \alpha^{l'_2} \leqq \alpha^{l'_3} \leqq \dots \leqq \alpha^{l_3} \leqq \alpha^{l_2} \leqq \alpha^{l_1},$$

definen un número real, que llamamos potencia de base α y exponente λ.

Dadas otras dos sucesiones convergentes que definan el mismo número λ que las [8-2], a saber:

$$m_1 \leqq m_2 \leqq \dots \leqslant \lambda \leqslant \dots \leqq m'_2 \leqq m'_1,$$

el número γ, definido por las nuevas sucesiones:

[8-4] $$\alpha^{m_1} \leqq \alpha^{m_2} \leqq \dots \leqq \gamma \leqq \dots \leqq \alpha^{m'_2} \leqq \alpha^{m'_1}$$

coincide con el β; pues [8-3] y [8-4] cumplen las condiciones del § 7-4, en virtud del § 8-5, *b*, esto es,

$$\alpha^{m_i} \leqq \alpha^{l'_i}, \quad \alpha^{l_i} \leqq \alpha^{m'_i}.$$

De otro modo: la potenciación de base positiva y exponente real cualquiera es *uniforme*, y por esto tiene sentido la definición [8-3] de α^λ. (§ 2-4, *a*).

Obsérvese que es esencial la condición de ser la base *positiva*, pues si fuese negativa, al tomar números racionales que se aproximen cada vez más a λ, resultarían sin sentido en el campo real las potencias cuyos exponentes tengan par el denominador. Además, dejaría de cumplirse la ley uniforme, pues tomando base -1 y exponente $+1$, si éste se da por la sucesión de intervalos encajados $+1 = \left\{ \frac{2n}{2n+1} ; 1 \right\}$, las aproximaciones $(-1)^{2n/(2n+1)} = +1$ no son contiguas a las aproximaciones $(-1)^1 = -1$. (Cfr. § 45-3, *d*).

La definición que acabamos de dar cumple las condiciones exigibles a toda generalización, pues si el exponente es un número racional *l*, y elegimos dos sucesiones convergentes cualesquiera que lo definan, siendo (§ 8-5, *b*) $\alpha^{l_i} \leqslant \alpha^l \leqslant \alpha^{l'_i}$, obtenemos como elemento de separación de las sucesiones [8-3], la potencia α^l.

b) El producto de dos o más potencias de la misma base es otra potencia de esta base, cuyo exponente es la suma de los exponentes. Porque de las sucesiones:

$$\alpha^{l_1} \leqq \alpha^{l_2} \leqq \dots \leqq \alpha^\lambda \leqq \dots \leqq \alpha^{l'_2} \leqq \alpha^{l'_1},$$
$$\alpha^{m_1} \leqq \alpha^{m_2} \leqq \dots \leqq \alpha^\mu \leqq \dots \leqq \alpha^{m'_2} \leqq \alpha^{m'_1},$$

se deduce, por multiplicación miembro a miembro:

[8-5]
$$\alpha^{l_1+m_1} \leqq \alpha^{l_2+m_2} \leqq \dots \leqq \alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu \leqq \dots \leqq \alpha^{l'_2+m'_2} \leqq \alpha^{l'_1+m'_1},$$

y como, por otra parte, la potencia $\alpha^{\lambda+\mu}$ está definida por las sucesiones convergentes:

[8-6]
$$\alpha^{l_1+m_1} \leqq \alpha^{l_2+m_2} \leqq \dots \leqq \alpha^{\lambda+\mu} \leqq \dots \leqq \alpha^{l'_2+m'_2} \leqq \alpha^{l'_1+m'_1}.$$

cuyos términos son los números anteriores, el elemento de separación debe ser el mismo en [8-5] y [8-6], es decir: $\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu = \alpha^{\lambda+\mu}$.

c) Para elevar α^λ a la potencia μ, formaremos las sucesiones:

[8-7] $(\alpha^\lambda)^{m_1} \leqq (\alpha^\lambda)^{m_2} \leqq \dots \leqq (\alpha^\lambda)^\mu \leqq \dots \leqq (\alpha^\lambda)^{m'_2} \leqq (\alpha^\lambda)^{m'_1}$,

y para hallar $\alpha^{\lambda\mu}$, formaremos:

[8-8] $\alpha^{l_1 m_1} \leqq \alpha^{l_2 m_2} \leqq \dots \leqslant \alpha^{\lambda\mu} \leqslant \dots \leqq \alpha^{l'_2 m'_2} \leqq \alpha^{l'_1 m'_1}$,

pero siendo:

$$\alpha^{l_1 m_1} = (\alpha^{l_1})^{m_1} \leqslant (\alpha^\lambda)^{m_1} \leqslant (\alpha^\lambda)^{m'_1}$$
$$\alpha^{l'_1 m'_1} = (\alpha^{l'_1})^{m'_1} \geqslant (\alpha^\lambda)^{m'_1} \geqslant (\alpha^\lambda)^{m_1}$$

las sucesiones [8-7] y [8-8] definen el mismo elemento de separación, es decir: $(\alpha^\lambda)^\mu = \alpha^{\lambda\mu}$.

d) La potencia de exponente λ de un producto o cociente de números reales positivos es el producto o cociente de las potencias de exponente λ de estos números.

Sean, por ejemplo, las potencias α^λ, β^λ, γ^λ, definidas por las sucesiones:

$$\alpha^{l_1} \leqq \alpha^{l_2} \leqq \dots \leqq \alpha^\lambda \leqq \dots \leqq \alpha^{l'_2} \leqq \alpha^{l'_1}$$
$$\beta^{l_1} \leqq \beta^{l_2} \leqq \dots \leqq \beta^\lambda \leqq \dots \leqq \beta^{l'_2} \leqq \beta^{l'_1}$$
$$\gamma^{l_1} \leqq \gamma^{l_2} \leqq \dots \leqq \gamma^\lambda \leqq \dots \leqq \gamma^{l'_2} \leqq \gamma^{l'_1}$$

Por ser positivos todos estos números, resulta, por multiplicación:

$$(\alpha\beta\gamma)^{l_1} \leqq (\alpha\beta\gamma)^{l_2} \leqq \dots \leqslant \alpha^\lambda \cdot \beta^\lambda \cdot \gamma^\lambda \leqslant \dots$$
$$\dots \leqq (\alpha\beta\gamma)^{l'_2} \leqq (\alpha\beta\gamma)^{l'_1};$$

como, por otra parte $(\alpha\beta\gamma)^\lambda$ está definido por estas mismas dos sucesiones, resulta $(\alpha\beta\gamma)^\lambda = \alpha^\lambda \cdot \beta^\lambda \cdot \gamma^\lambda$.

Análogamente para el cociente.

e) Ley de monotonía. *Si es* $\alpha \gtrless 1$, *y* λ *exponente real positivo es, respectivamente,* $\alpha^\lambda \gtrless 1$.

Siendo $\lambda > 0$, para definirlo pueden tomarse las sucesiones [8-2] formadas por números positivos. Mas, siendo $\alpha > 1$, los números [8-3] son todos mayores que 1; luego, también es $\alpha^\lambda > 1$.

Análogamente, si es $\alpha < 1$, los números de las sucesiones [8-3] son todos menores que 1, luego $\alpha^\lambda < 1$.

Si el exponente λ es negativo, los resultados son inversos.

Si α *y* β *son números reales positivos, siendo* $\alpha < \beta$, y λ *es cualquier exponente real positivo, es* $\alpha^\lambda < \beta^\lambda$.

Porque, siendo $\dfrac{\beta}{\alpha} > 1$, es $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\lambda = \dfrac{\beta^\lambda}{\alpha^\lambda} > 1$; luego, $\alpha^\lambda < \beta^\lambda$. En cambio, si λ es negativo, resulta $\alpha^\lambda > \beta^\lambda$.

Los teoremas anteriores nos permiten estudiar la variación de la potencia α^λ, tanto cuando varía la base *positiva* α y se conserva fijo el exponente λ, como cuando varía el exponente *positivo o negativo, racional o irracional* λ, y se conserva fija la base $\alpha > 0$. Llegaríamos a las mismas conclusiones que en el apartado anterior (§ 8-5) con las mismas gráficas (figs. 26, 27, 28 y 29), pero ahora en las familias de gráficas correspondientes a base variable, cabe suponer el exponente fijo irra-

cional, mientras que en las gráficas correspondientes a exponente variable, no existirán ya los "poros" (invisibles) que se daban cuando dicho exponente era irracional.

7. Logaritmos de los números reales positivos: su variación. — *a*) Como la potenciación no es conmutativa: $\alpha^\lambda \neq \lambda^\alpha$, tiene dos operaciones inversas: una de ellas es la radicación; la otra es la *logaritmación*, que consiste en calcular el exponente λ conociendo el *número* α^λ y la *base* α. Ahora vamos a demostrar que esta operación es siempre posible en el sistema real, cuando la base y el número son positivos, y aquélla es distinta de 1.

Si α y β son dos números reales POSITIVOS, *siendo α distinto de* 1, *existe un número único λ tal que*

[8-9] $$\alpha^\lambda = \beta.$$

Este número λ se llama *logaritmo del número β respecto de la base α*, y se representa así:

$$\lambda = \log_\alpha \beta.$$

Supongamos a $\alpha > 1$; por ejemplo, $\alpha = 2$. A lo más puede haber un número λ que verifique [8-9], pues hemos visto (§ 8-6, *e*) que la base α elevada a distintos exponentes no puede dar una misma potencia β; por ejemplo, $\beta = 5$. Para demostrar que siempre existe en este caso un λ, en el ejemplo $2^\lambda = 5$ obtengámoslo constructivamente, mediante una sucesión decimal de intervalos encajados (§ 7-4). Por ser $\alpha > 1$, antes se ha visto (§ 8-5, *b*) que α^{-n} puede hacerse tan pequeño como se quiera, tomando n suficientemente grande, por lo cual existen dos números naturales, p y q, tales que $\alpha^{-p} < \beta$; $\alpha^{-q} < 1/\beta$, esto es: $\alpha^q > \beta$. Por la variación monótona de las potencias, entre los números enteros existentes entre $-p$ y q hay un número entero c, y sólo uno, llamado *característica* del logaritmo, para el que es

$$\alpha^c \leqq \beta \quad ; \quad \alpha^{c+1} > \beta \quad ;$$

para $\alpha = 2$, $\beta = 5$, es $c = 2$.

Ahora, basta dividir en diez partes el intervalo $J_1 = (c; c+1)$, con la condición:

$$\alpha^{c + \frac{m_1}{10}} \leqq \beta \quad ; \quad \alpha^{c + \frac{m_1 + 1}{10}} > \beta$$

en nuestro ejemplo:

$$2^{2,3} < 5 < 2^{2,4}$$

y luego, sucesivamente, hacer lo mismo con

$$J_2 = \left(c + \frac{m_1}{10} \quad ; \quad c + \frac{m_1 + 1}{10} \right) \quad , \quad \ldots .$$

en nuestro ejemplo (2,3; 2,4), (2,32; 2,33), ..., para obtener en forma análoga a la vista (§ 7-3), las cifras decimales del logaritmo, que constituyen su llamada *mantisa*. En nuestro ejemplo:

$$2^2 < 2^{2,3} < 2^{2,32} < 2^{2,321} < \ldots < 5 < \ldots 2^{2,322} < 2^{2,33} < 2^{2,4} < 2^3.$$

Así queda determinado el logaritmo buscado, λ, por la sucesión decimal de intervalos encajados:

$$\lambda = \{c_n;\ c'_n\} \text{ con } \begin{cases} c_n = c + \dfrac{m_1}{10} + \ldots + \dfrac{m_{n-1}}{10^{n-1}} + \dfrac{m_n}{10^n}, \\ c'_n = c + \dfrac{m_1}{10} + \ldots + \dfrac{m_{n-1}}{10^{n-1}} + \dfrac{m_n + 1}{10^n}. \end{cases}$$

En nuestro ejemplo: $c = 2$; $m_1 = 3$; $m_2 = 2$; $m_3 = 1$; ...

Si es $\alpha < 1$, basta cambiar el sentido de las desigualdades o considerar la base recíproca α_1, poniendo $\alpha = 1/\alpha_1$.

¿Por qué no puede ser $\alpha = 1$?

b) Para α fijo, la variación de los números λ y β ligados por [8-9] está ya estudiada en § 8-6, *e*, y puede considerarse que las figuras 28 y 29 dan su representación gráfica, con $x = \lambda$ e $y = \beta$. Sin embargo, es más cómodo y usual examinar la variación de $\lambda = \log_\alpha \beta$, tomando β sobre el eje de las abscisas y λ sobre el eje de las ordenadas, para lo cual basta considerar la gráfica simétrica de cada una de las anteriores respecto de

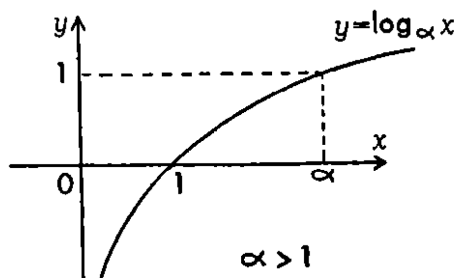


Fig. 30.

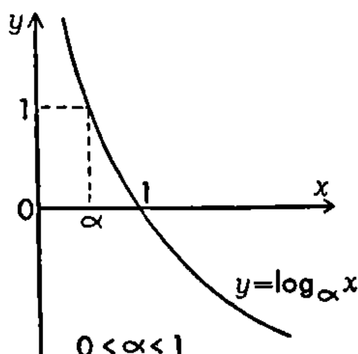


Fig. 31.

la primera bisectriz de los ejes coordenados. (¿P o r q u é? § 23-12). Así se obtienen las gráficas de las figuras 30 y 31,

de $y = \log_\alpha x$ para $\begin{cases} \alpha > 1, \\ 0 < \alpha < 1. \end{cases}$

Ellas resumen las propiedades más importantes de la variación del logaritmo, detalladas a continuación para el caso $\alpha > 1$:

b_1) *Solamente tienen logaritmo los números positivos.*

b_2) *El logaritmo de la base* α *es* 1, *y el logaritmo de* 1 *es* 0.

b_3) *Los logaritmos de los números mayores que* 1 *son positivos y crecen indefinidamente al crecer indefinidamente el número* β.

b_4) *Los logaritmos de los números menores que* 1 *son ne-*

gativos y crecen indefinidamente en valor absoluto al decrecer β.

Enúnciense los correspondientes al caso $\alpha < 1$.

8. **Cálculo logarítmico.** — *a*) *El logaritmo de un producto (cociente) es la suma (diferencia) de los logaritmos de ambos términos.*

Sea:

$$x' = \log_\alpha x, \qquad y' = \log_\alpha y,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\alpha^{x'} = x \qquad \alpha^{y'} = y;$$

de aquí resulta:

$$\alpha^{x'+y'} = xy, \qquad \text{o sea:} \qquad \log_\alpha (xy) = x' + y'$$

$$\alpha^{x'-y'} = x : y, \qquad \text{o sea:} \qquad \log_\alpha (x : y) = x' - y'$$

b) *El logaritmo de una potencia* x^y *es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.*

Sea:

$$x' = \log_\alpha x, \qquad \text{es decir:} \qquad \alpha^{x'} = x,$$

y elevando a la potencia y,

$$\alpha^{x'y} = x^y;$$

luego:

$$\log_\alpha x^y = x' \,.\, y = y \,.\, \log_\alpha x.$$

c) *Los logaritmos de los mismos números en dos sistemas de bases* α *y* α_1 *son proporcionales.*

Sea $x' = \log_\alpha x$, o lo que es lo mismo: $\alpha^{x'} = x$;

tomando logaritmos en el sistema de base α_1, resulta:

$$x' \log_{\alpha_1} \alpha = \log_{\alpha_1} x, \qquad \text{es decir:} \qquad \frac{\log_\alpha x}{\log_{\alpha_1} x} = \frac{1}{\log_{\alpha_1} \alpha} = \text{constante.}$$

Resulta de aquí: *Conocidos los logaritmos en un sistema de base* α_1, *se obtienen los logaritmos en un nuevo sistema de base* α, *multiplicándolos por un factor constante, que es el recíproco del logaritmo de la nueva base en el sistema antiguo.*

c_1) En el Cálculo integral (§ 54-1, nota 3) se verá cómo aparece naturalmente un sistema de logaritmos cuya base es el número

$$e = 2{,}718\,281\,83\,\ldots,$$

uno de los más importantes de la Matemática. Aun cuando en el § 21-5 nos ocuparemos más detenidamente de él, diremos ya que dicho número está definido por la sucesión de intervalos encajados:

$$[8\text{-}10] \qquad e = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$$

La definición anterior es correcta, porque para probar la monotonía de las aproximaciones por defecto y por exceso, basta recordar (§ 6-9, b_6) que un poducto de factores positivos de suma constante es máximo cuando todos son iguales, y por lo tanto:

$$1 . \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

pues en cada miembro figuran $n+1$ factores de suma $n+2$, y en el segundo son iguales. Por otra parte,

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

porque considerando los recíprocos, esta desigualdad es equivalente a la

$$1 . \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1};$$

en que figuran $n+1$ factores en cada miembro de suma n, siendo iguales los del segundo miembro. Además, ambas sucesiones son contiguas, porque

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n} . \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n} . \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = \frac{4}{n},$$

con el último miembro tan pequeño como se quiera para n suficientemente grande.

c_2) Los logaritmos más usados en el Análisis matemático son:

Los naturales, o de NEPER, de base e, con notación $\log_e x = \ln x$;

Los decimales, o de BRIGGS, de base 10, con notación $\log_{10} x = \lg x$.

Calculados los logaritmos neperianos de los números, se calculan los logaritmos de base α, multiplicándolos por la constante

$$M = \frac{1}{\log_e \alpha} = \log_\alpha e$$

llamada *módulo* del sistema de base α. En particular, las tablas de logaritmos decimales se han construído calculando primero los logaritmos neperianos, y multiplicándolos por el módulo

[8-11] $$M = 0{,}43429448 \ldots,$$

esto es:

[8-12] $$\lg x = M . \ln x.$$

Para hallar $\ln x$ con una tabla de logaritmos decimales (Cap. IX, nota I, e), tendremos:

[8-13] $$\ln x = \frac{1}{M} \lg x = 2{,}302\,585\,09 \ldots \lg x.$$

Para recordar fácilmente cuál de los dos coeficientes corresponde en cada caso, basta observar que dado un número mayor que 1, por ejemplo 100, de sus dos logaritmos *el natural es el mayor*, pues como $e < 10$, e debe elevarse a un exponente mayor para obtener el mismo 100.

De [8-12] resulta que una misma gráfica puede representar $y = \lg x$ e $y = \ln x$, tomando distintas escalas en el eje y. De la misma [8-12] resulta por ser $M < 1$ que:

$$|\lg x| < |\ln x|, \quad \text{si} \quad x \neq 1.$$

Para facilitar la aplicación de las fórmulas [8-12] y [8-13], muchas tablas de logaritmos (Cap. IX, nota I, e) traen tablas de múltiplos de

M y de 1/M. Por ejemplo, para calcular $\ln 6$ siendo $\lg 6 = 0{,}778\,151$, con una tabla de múltiplos de 1/M entre 1 y 100, tendremos:

$$\ln 6 = \frac{1}{M} \cdot 0{,}778\,151 = \frac{1}{M} \cdot (0{,}77 + 0{,}0081 + 0{,}000\,051) =$$
$$= 1{,}772\,990\,5 + 0{,}018\,651\,\underline{0} + 0{,}000\,117\,4 =$$
$$= 1{,}791\,758\,\overline{9}.$$

El cálculo logarítmico se estudia en Cap. IX, nota I.

Ejercicios

1. Racionalizar la ecuación $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} = 2$ y probar que no admite raíces fraccionarias.

2. ¿Cuál de las siguientes igualdades es cierta?

1º) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$; 3º) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$;
2º) $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$; 4º) $\sqrt{x-y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Verificar con ejemplos numéricos.

3. Reducir a un mismo índice $\sqrt[4]{5a^4}$; $\sqrt[3]{2ab}$; $\sqrt[6]{4a^3b}$.

4. Racionalizar los denominadores de:

$a)$ $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{5\sqrt{6} - 3\sqrt{5}}$; $b)$ $\dfrac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$; $c)$ $\dfrac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}$;

$d)$ $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}$

5. Calcular todos los valores de: $a)$ $\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})}$;

$b)$ $\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$,

$c_1)$ $[(160 + 9).4]^{1/2}$; $c_2)$ $(160 + 9.4)^{1/2}$; $c_3)$ $(160 + 9).4^{1/2}$:
$c_4)$ $160 + (9.4)^{1/2}$; $c_5)$ $160 + 9.4^{1/2}$.

6. Calcular las siguientes expresiones:

$a)$ $-2^3[(9^{-1/2} + 27^{-1/3} + 81^{-1/4} - 3)^5.(2.3^2 - 3.2^3 + 64^{1/3})^{-1}]^{-1/2}$;

$b)$ $[(243^{0,2} - 17.9^{-3/2})^{-1/3} - (125^{1/3} + 1024^{-0,4})^{-0,25} -$
$- (0{,}5^{-3} - 169^{0,5}.128^{-5/7})^{-0,2}]^{-1}.[9^{1/3}(1 + 512^{-1/3})^{2/3} -$
$- (1 - 65.27^{-4/3})^{-0,25} + (729^{-5/6}.211 - 1)^{0,2} - 1]$.

7. Simplificar:

1º) $a\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}$; 2º) $b\sqrt[3]{b^{-2}\sqrt[3]{b^{-2}}}$;

3º $c\sqrt[4]{c^{-3}\sqrt[4]{c^{-3}}}$; 4º) $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$;

5º) $\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}}$.

8. Calcular:

1º) $\log\left(\dfrac{a}{b}\sqrt[5]{\dfrac{c\,x^3}{d^2}}\right)$; 2º) $\log\dfrac{1}{a\sqrt[7]{c - x}}$

3º) $(0{,}0009)^{0,0009}$; 4º) $(9/13)^{0,08}$; 5º) $(51/43)^{-0.03}$.

§ 9. Concepto de número complejo

1. Origen aritmético de los números complejos. — En el § 7 hemos introducido los números irracionales para hacer posible la radicación y la logaritmación, pero esto no lo hemos logrado completamente. Queda todavía sin solución la extracción de raíces de índice par de los números negativos, pues no existe ningún número real, positivo ni negativo, cuyas potencias de exponente par sean negativas.

Tampoco hemos logrado definir en el campo real las potencias de exponente irracional de los números negativos, pues al tomar valores racionales que se aproximen al exponente, para aquellos que tienen como denominador un número par no es posible la potenciación, y para los de denominador impar no se cumple la ley uniforme. Por esta razón se ha tomado siempre positiva la base de los sistemas de logaritmos.

Asimismo, carecen de logaritmo en el sistema real los números negativos; porque, siendo positiva la base, sus potencias de exponente real cualquiera, positivo o negativo, son siempre positivas, y por lo tanto, no pueden coincidir con el número dado si éste es negativo.

Vemos, pues, que todavía carecen de sentido expresiones del tipo de las siguientes:

$$\sqrt{-3}, \quad (-5)^{3/4}, \quad (-2)^{\pi}, \quad \log\left(-\frac{2}{7}\right), \quad \ldots$$

Muchos otros problemas quedan también sin solución en el sistema real, como es, por ejemplo, la resolución de ecuaciones que carecen de raíces reales.

La forma "ingenua" con que inicialmente se manejaba el número complejo consistía en considerar $-a = (-1) . a$, $(a > 0)$, aplicar formalmente la regla operatoria de la radicación de un producto (§ 8-2, a), e introducir el símbolo i para designar $\sqrt{-1}$, con lo cual:

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a} = \pm\, i\, a_2,$$

donde a_2 puede ser un número real cualquiera.

Se operaba con el símbolo i algebraicamente, sin darle ningún significado propiamente numérico, y entonces la operación de sumar $\pm\, i\, a_2$ a un número real, a_1, daba la expresión general de un número "complejo": $= a_1 \pm i\, a_2$. Su producto por otro número complejo se efectuaba aplicando las leyes formales (§ 4-8) y poniendo $i^2 = -1$.

Todo este proceso estaba lleno de misteriosas lagunas, y sobre todo surgía la paradoja conceptual de que algo no existente "realmente" y tan "imaginario" como $\sqrt{-1}$ diese lugar a un ente que se comportaba como si fuese efectivamente un "número". Por esto es preciso desarrollar en forma lógica el

concepto de número complejo, para poner orden y claridad en las ideas. Adoptaremos el método de definición por abstracción que hemos empleado en las sucesivas ampliaciones del concepto de número.

2. **Definición de número complejo. Operaciones fundamentales.** — El ente abstracto que vamos a definir vendrá dado por pares ordenados (a_1, a_2) de números reales, respecto de los cuales se ha de establecer una relación de equivalencia y definir las operaciones fundamentales de adición y de multiplicación, en forma tal que se cumpla el principio de permanencia de las leyes formales (§ 2-6). Además, los números reales deben ser isomorfos (§ 3-5) a un conjunto parcial de los números complejos, por lo que entonces podremos considerarlos como un caso particular de éstos. En definitiva, adoptaremos esta definición: *El número complejo* α *es el ente abstracto definido por el par ordenado* (a_1, a_2) *de números reales para los que se establece la*

Relación de igualdad: $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ *equivale a* $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Esta definición es posible, pues la igualdad anterior es una relación de equivalencia (§ 1-5), por serlo la igualdad entre números reales (§ 7-4). Este ente abstracto adquiere la categoría de "número" complejo, al introducir las operaciones:

1ª) *La adición de dos complejos se define por*:

[9-1] $$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2);$$

2ª) *La multiplicación de dos complejos se define por*:

[9-2] $$(a_1, a_2) \,.\, (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1);$$

definiciones correctas porque cumplen la ley uniforme (§ 2-4,a).

Para ambas operaciones se *demuestran* las leyes asociativa, conmutativa, distributiva y cancelativa mediante método análogo (§ 6-2, b) al visto en las anteriores ampliaciones del concepto de número (hágase). El único módulo de la adición es (0,0), y de la multiplicación, (1,0).

La primera componente a_1 del número complejo $\alpha = (a_1, a_2)$ se llama *parte real* de α, y también se escribe $a_1 = \mathrm{R}\ (\alpha)$. La segunda componente a_2 se llama *parte imaginaria* de α, y también se escribe $a_2 = \mathrm{I}\ (\alpha)$.

Para operar con números complejos cuya segunda componente es nula, basta efectuar las correspondientes operaciones con los números reales que figuran como primeras componentes, ya que por [9-1] y [9-2] es:

$$(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0); \quad (a_1, 0) \,.\, (b_1, 0) = (a_1 b_1, \theta).$$

Por esto resulta adecuado identificar:

[9-3] $$(a_1, 0) = a_1$$

para obtener el *número real* como caso particular del número complejo.

En otras palabras, en la correspondencia biunívoca $(a_1, 0) \leftrightarrow a_1$, $(b_1, 0) \leftrightarrow b_1$, los resultados de las operaciones con datos correspondientes serán también correspondientes:

$$(a_1, 0) + (b_1, 0) \leftrightarrow a_1 + b_1 \quad ; \quad (a_1, 0) . (b_1, 0) \leftrightarrow a_1 . b_1$$

es decir (§ 3-5): *el conjunto de números complejos con segunda componente nula, es isomorfo al conjunto de los números reales*, lo que justifica (§ 1-6, nota 2) la identificación [9-3].

Si un número complejo no es real, se llama *imaginario*; si sólo su primera componente es nula, se llama *imaginario puro*.

De [9-3] se deduce:

$$(1,0) = 1, \qquad (0,0) = 0.$$

Se llama *unidad imaginaria* al número (0,1), y se lo designa por i. De la definición [9-2] se deduce:

[9-4] $\qquad (0,1) . (0,1) = -1$, esto es: $i^2 = -1$,

y también $(a_2, 0) . (0,1) = (0, a_2)$, es decir, puede representarse el número imaginario puro mediante

[9-5] $\qquad (0, a_2) = i\, a_2 = a_2\, i.$

De [9-1] se deduce:

$$(a_1, 0) + (0, a_2) = (a_1, a_2),$$

y aplicando [9-3] y [9-5] se obtiene la *forma binómica* del número complejo:

[9-6] $\qquad (a_1, a_2) = a_1 + i\, a_2,$

usada preferentemente en la teoría.

La forma binómica permite aplicar las mismas reglas operatorias que en el campo real para obtener la suma [9-1] y el producto [9-2], operando con i como si fuese real, pero teniendo en cuenta [9-4] cuando aparezca i^2. Así queda:

[9-1′] $\qquad (a_1 + a_2 i) + (b_1 + b_2 i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) i;$

[9-2′] $\quad (a_1 + a_2 i) . (b_1 + b_2 i) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$

Para las potencias sucesivas de i se aplica [9-4] y la ley asociativa del producto, quedando:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2 . i = -i,\ i^4 = i^2 . i^2 = +1,$$

y a partir de éstos se repiten periódicamente los cuatro números i, -1, $-i$, $+1$.

EULER (1777) introdujo el símbolo i; GAUSS (1832), la denominación de número complejo, y HAMILTON (1853), la teoría analítica rigurosa, que hemos seguido, mediante pares ordenados de números reales.

3. **Representación geométrica.** — Toda la teoría de los números complejos puede ser desarrollada aritméticamente, sin utilizar representación geométrica alguna; pero es útil mos-

trar que la creación de estos nuevos números ha sido en parte motivada por la necesidad de poder representar numéricamente los puntos de un plano, de igual modo que los números reales surgieron en la mente de los matemáticos para poder representar todos los puntos de una recta.

Cada punto A del plano puede determinarse por sus dos coordenadas en cualquier sistema; eligiendo el más sencillo posible, que es el cartesiano rectangular, estas coordenadas son las abscisas de sus proyecciones sobre dos ejes ortogonales, enunciados en orden prefijado. Cada una de estas dos proyecciones queda determinada por una coordenada, tomando como origen en cada eje su intersección O, y como puntos unidades, sendos puntos U_1, U_2, que suelen darse (aunque no es necesario, ni a veces conveniente) a la misma distancia del origen O (fig. 32). Se toman como positivos, sobre los ejes Ox y Oy, los *sentidos* determinados por OU_1, OU_2, respectivamente. Dichos sentidos determinan como sentido positivo de *giro* en el plano, el que mediante un ángulo de 90° lleva el semieje positivo Ox sobre el correspondiente Oy.

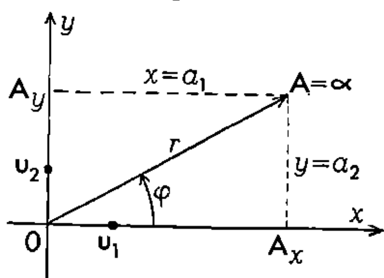


Fig. 32.

Queda así determinado, numéricamente, cada punto del plano A por el número complejo, $\alpha = (a_1, a_2)$, que componen sus dos coordenadas. Recíprocamente, todo número complejo α determina un punto A, llamado *afijo* del número complejo; si el segundo componente es nulo, es decir, si el número es real, obtenemos un punto sobre el eje de las x, que por esto suele llamarse *eje real*. Si el primer componente es nulo, es decir, si el número es *imaginario puro*, obtendremos entonces como representante un punto del eje de las y; éste suele llamarse *eje imaginario*.

Esta representación fué introducida por ARGAND (1806).

Cada punto A del plano determina un vector fijo de *origen* O y *extremo* A, el cual queda también determinado dando sus dos proyecciones sobre los ejes; estos segmentos se llaman *componentes* del vector, y tienen como medidas los dos números a_1 y a_2, componentes del número complejo (a_1, a_2).

Como a cada vector OA de origen O corresponde un número complejo, y a cada número complejo corresponde un vector, cada uno puede tomarse como representante del otro.

Cada número complejo o vector fijo de origen O será representante de una clase de vectores libres del plano (§ 1-6, Ej. 2), y también de una traslación de un conjunto rígido de puntos del plano, determinada por un vector libre, pues los segmentos que ligan las posiciones inicial y final de cada punto en una misma traslación son equipolentes entre sí. De ahí la

denominación de vector ("trasladar", lat. *vehere*), dada por HAMILTON (1843).

4. **Módulo y argumento de un número complejo.** — *a*) La longitud del segmento OA (fig. 32), esto es, el número real y positivo

$$r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

que da el *módulo* o *valor absoluto* del vector OA, también se llama *módulo* o *valor absoluto* del número complejo $\alpha = (a_1, a_2)$, y se representa así: $r = |\alpha|$.

El cuadrado del módulo $|\alpha|^2 = a_1^2 + a_2^2$ se llama *norma* del número α.

Si se trata de un número real ($a_2 = 0$), $+\sqrt{a_1^2}$ es el valor absoluto del número positivo o negativo a_1, y así concuerdan las definiciones dadas en el campo real (§ 3-6) y en el complejo.

La condición necesaria y suficiente para que un número complejo sea nulo, es que lo sea su módulo, pues en este caso, y sólo en él, se anula la suma de los dos cuadrados de números reales (regla de los signos, § 7-5, *d*), que da la norma $|\alpha|^2$ del complejo α.

b) Adoptado como sentido positivo de giro el determinado por los semiejes $+x$ y $+y$, como origen y extremo respectivamente, del ángulo menor que un llano, se llama *argumento* del vector OA, o del número complejo $\alpha = (a_1, a_2)$, al número φ, medida del ángulo que el semieje $+x$ forma con la semirrecta OA.

El argumento es, pues, un número comprendido entre 0 y 360°, si se adopta la medida sexagesimal, y entre 0 y 2π. si se mide en radianes (§ 28-1). El número complejo de módulo r y argumento φ se designa así: r_φ.

A veces conviene considerar como argumento, no el valor φ del menor ángulo que el vector forma con el semieje $+x$, sino uno cualquiera de los números: $\varphi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), que miden los infinitos ángulos determinados por el origen $+x$ con el extremo OA.

Cuando el argumento está comprendido entre π y 2π, es decir, cuando el vector OA está en el tercero o cuarto cuadrante, suele adoptarse entre los infinitos valores del argumento el valor $\varphi - 2\pi$, porque, aunque es negativo, su valor absoluto es inferior a π. De este modo, el argumento de todo número complejo no supera a π, siendo positivo o negativo según que el vector esté en el semiplano superior o en el inferior.

Llamaremos *valor principal* del argumento, y lo designaremos por $\bar{\varphi} = \text{Arg}\ \alpha$, al que cumpla *:

---

* Algunos autores toman como valor principal

[9-7'] $$0 \leqq \bar{\varphi} < 2\pi$$

[9-7] $$-\pi < \bar{\varphi} \leqq \pi,$$
viniendo dados los demás argumentos del mismo número complejo α, designados por $\varphi = \arg \alpha$, mediante

[9-8] $$\varphi = \bar{\varphi} + 2\,k\,\pi, \quad (\arg \alpha = \operatorname{Arg} \alpha + 2\,k\,\pi),$$
en que k es un número entero cualquiera.

c) Cualquiera sea el sistema adoptado para la medida del argumento, puesto que a_1 es en magnitud y signo la proyección de r sobre el eje x, y a_2 es la proyeccion sobre el eje y, resultan las siguientes relaciones métricas:

[9-9] $$a_1 = r \,.\, \cos \varphi, \quad a_2 = r \,.\, \operatorname{sen} \varphi$$

Recíprocamente, conocidos a_1 y a_2, se calculan r y φ por las relaciones:

[9-10] $$r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_2}{a_1}, \text{ signo } \bar{\varphi} = \text{signo } a_2,$$

pues el signo de a_2 determina el de $\bar{\varphi}$ entre los dos ángulos entre $-\pi$ y π que tienen la misma tangente.

Los valores de r y φ dan la representación de A en *coordenadas polares.*

Si sustituímos a_1 y a_2 por sus valores [9-9], la forma binómica [9-6] adopta la expresión siguiente:

[9-11] $$\alpha = r \,.\, \cos \varphi + i \,.\, r \,.\, \operatorname{sen} \varphi = r\,(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi),$$
donde aparece el número como producto de su módulo r por un número complejo de módulo 1; esta expresión se llama *polar* o *trigonométrica.*

Aunque la teoría del número complejo en su forma polar se apoya en conceptos geométricos (*argumento* y *funciones circulares*), éstos son susceptibles de definición aritmética pura, como veremos en § 45-3.

EJEMPLOS: Calcular el módulo y el argumento principal de cada uno de los números $(-\sqrt{3}, 1)$ y $(1, -1)$.

El módulo de $(-\sqrt{3}, 1)$ es $\sqrt{3+1} = 2$. Su argumento está dado por $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, que determina dos arcos, $-30°$ y $150°$; como el vector está en el segundo cuadrante, ha de ser

$$\bar{\varphi} = 150° = \frac{5}{6}\,\pi$$

El módulo de $(1, -1)$, es $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; el argumento viene dado por $\operatorname{tg} \varphi = -1$, y entre los dos arcos que determina es:

$$\bar{\varphi} = -45° = -\frac{\pi}{4}$$

el valor buscado.

d) Resulta de las definiciones anteriores que pueden ser iguales dos números r_φ y r_ψ, es decir, pueden coincidir los dos vectores que representan, sin ser $\varphi = \psi$; bastando que estos ángulos difieran en un número exacto de circunferencias. Por consiguiente:

d_1) La condición necesaria y suficiente para que sean iguales dos números complejos r_φ y ρ_ψ, es que sean iguales sus módulos, y sus argumentos difieran en un número exacto de circunferencias; es decir:

$$r = \rho, \quad \varphi = \psi + 2\,k\,\pi.$$

Dos números complejos que tienen la misma primera componente, y opuestas las segundas, se llaman *conjugados*.

El conjugado de $\alpha = a_1 + a_2 i$ se designa por $\bar{\alpha} = a_1 - a_2 i$. La relación es recíproca, pues el conjugado de $\bar{\alpha}$ es α.

d_2) Dos números conjugados sólo pueden ser iguales cuando son reales, y, recíprocamente, el conjugado de un número real es él mismo.

Adoptando para medir los argumentos el sistema de argumentos principales, resulta (salvo para números reales negativos):

d_3) La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos sean conjugados, es que tengan igual módulo y argumentos principales opuestos.

La suma de dos números conjugados, $a_1 + i\,a_2$, $a_1 - i\,a_2$, es el duplo de su parte real; su producto es igual a su norma.

Como antes (§ 3-6, *a*), se llaman *opuestos* dos números, $\alpha = a_1 + i\,a_2$ y $-\alpha = -a_1 - i\,a_2$, cuya suma es nula.

d_4) La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos sean opuestos, es que sus módulos sean iguales y sus argumentos difieran en π o en un múltiplo impar de π.

EJERCICIO: Probar que si $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$ son reales, α y β son conjugados, si no son ambos reales.

NOTA: En el § 45-3 se justificará la expresión:

[9-12] $$\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi = e^{i\varphi}$$

y que ahora podemos tomar como "definición convencional" de potencia de base e (§, 8-3, c_1) y exponente imaginario puro.

De [9-11] y [9-12] se deduce la expresión *exponencial* del número complejo:

[9-13] $$\alpha = r \,.\, e^{i\varphi},$$

muy adecuada para formalizar y recordar fácilmente las reglas de multiplicación, radicación y logaritmación en el campo complejo, como veremos en seguida.

5. Las operaciones racionales en el campo complejo. — *a*) Definida la *adición* (§ 9-2). $\alpha + \beta = \gamma$, su operación inversa es la *sustracción*: $\beta = \gamma - \alpha$. De la ley cancelativa [6-15], sigue que el resultado β es único y se llama *diferencia* o *resta*.

Para la representación geométrica de la adición y sustracción, dados varios vectores, tomemos segmentos orientados que los representen, colocados uno a continuación de otro, como en el § 2-4, ejemplo, y definamos su *suma* mediante el segmento orientado que va del origen del primero al extremo del último.

Como la proyección sobre un eje cualquiera de la resultante OL de una línea quebrada OAB ... KL, es la suma de las proyecciones de sus lados, resulta: Las componentes de una suma de vectores son las sumas de las componentes de sus diversos sumandos.

En particular (fig. 33), si sumamos los vectores OA y OB, que representan los números complejos (a_1, a_2) y (b_1, b_2), llevando a partir de A un segmento orientado AR = OB, como las proyecciones de éste son también (b_1, b_2), las proyecciones del vector resultante OR son $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$; luego, este vector es el representante de la suma $(a_1, a_2) + (b_1, b_2)$.

El vector que representa una suma de números complejos es la suma de los vectores que representan los sumandos.

Si la suma es algebraica, es decir, si en ella figuran *sumandos* y *sustraendos*, basta *sustituir* los vectores que éstos representan por sus *opuestos* (fig. 34).

La diferencia de dos números conjugados es el número ima-

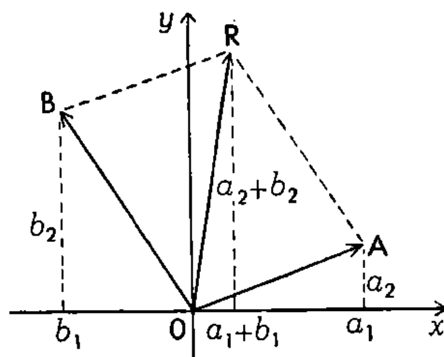


Fig. 33.

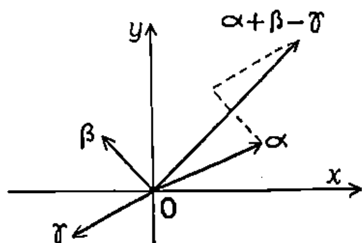


Fig. 34.

ginario puro, cuya parte imaginaria es doble de la del minuendo.

EJERCICIO: Probar analíticamente que el módulo de la suma y diferencia cumplen la *desigualdad triangular* (§ 7-7):

$$|\,|\alpha| - |\beta|\,| \leqq |\alpha \pm \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|.$$

Interprétese geométricamente.

b) Si aplicamos la definición de producto dada por [9-2′], escribiendo los factores en su forma polar, obtenemos:

[9-14] $$r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)\,.\ r'(\cos\varphi' + i \operatorname{sen}\varphi') =$$
$$= rr'.(\cos\varphi\cos\varphi' - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi') + i.rr'(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi') =$$
$$= rr'.\,[\cos(\varphi + \varphi') + i\operatorname{sen}(\varphi + \varphi')].$$

De donde resulta: *El módulo de un producto es el producto de los módulos, y el argumento es la suma de los argumentos.*

NOTA: Puestos los factores en forma exponencial [9-13], el resultado

anterior, *demostrado trigonométricamente* (§ 45), se recuerda fácilmente como conservación de la ley formal de producto de potencias de una misma base (§4-5), dando

[9-15] $$\alpha \,.\, \alpha' = r \,.\, r' \,.\, e^{i(\varphi + \varphi')}\ ;$$

La condición para que el producto [9-14] sea nulo, es $rr'=0$, y para esto es preciso y basta que sea nulo r o r'; luego:

Para que un producto de números complejos sea nulo, es necesario y suficiente que sea nulo por lo menos uno de los factores.

La fórmula $|\alpha| \,.\, |\beta| = |\alpha \,.\, \beta|$ puede establecerse también mediante la igualdad:

[9-16] $$(a_1^2 + a_2^2) \,.\, (b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2,$$

fácilmente verificable; el segundo miembro es nulo cuando, y sólo cuando, lo es el primero. Éste se anula por el teorema correspondiente visto en el campo real (§ 7-5, *d*), cuando, y sólo cuando, se anula algún factor, es decir, la norma de alguno de los complejos dados.

La definición de producto adoptada en [9-2] quedaba condicionada por el principio de permanencia de las leyes formales, y así quedaba aclarado en [9-2']. Si hubiésemos querido establecerla operando con i algebraicamente, sin darle aún significado numérico, sería:

[9-17] $$\alpha \,.\, \beta = (a_1 + ia_2) \,.\, (b_1 + ib_2) = a_1 b_1 + a_1 (ib_2) + (ia_2) \,.\, b_1 + \\ + (ia_2) \,.\, (ib_2) = a_1 b_1 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) + a_2 b_2 \,.\, i \,.\, i.$$

La teoría de la multiplicación de dos números complejos cualesquiera quedaría, pues, completamente establecida al definir el producto de i por i. Podríamos adoptar como valor de i^2 cualquier número complejo, y desarrollar toda la teoría apoyada en esta definición. Desde luego, si adoptamos como definición $i^2 = \mu + \nu i$, siendo μ y ν dos números reales cualesquiera, la multiplicación así definida tiene las propiedades uniforme, asociativa, conmutativa y distributiva. Pero si exigimos además que el producto no pueda ser nulo sin serlo alguno de los factores, debemos elegir μ y ν de modo que sea $\nu^2 + 4\mu < 0$; pues de lo contrario la ecuación $x^2 - \nu x - \mu = 0$ tendría dos raíces *reales* x_1 y x_2 (distintas o iguales), y siendo nulo el trinomio *

$$i^2 - \nu i - \mu \equiv (i - x_1)\ (i - x_2),$$

sin serlo alguno de los dos factores, no se cumpliría aquella ley formal.

Así hemos probado que la condición $\nu^2 + 4\mu < 0$ es *necesaria* para que el producto no pueda ser nulo sin serlo alguno de los factores.

El modo *más sencillo* de satisfacer la condición $\nu^2 + 4\mu < 0$, es elegir $\nu = 0$, $\mu = -1$; pero no se crea que ésta sea la única teoría posible, pues igualmente podría elegirse otro par de valores para la definición i^2. Sin embargo, cualquier teoría fundada en otros valores de μ y ν pueden reducirse a la desarrollada, mediante el siguiente *cambio de unidad*:

$$i' = \frac{\nu - 2i}{\sqrt{-\nu^2 - 4\mu}}, \quad \text{pues resulta:} \quad i'^2 = \frac{\nu^2 - 4\nu i + 4(\mu + \nu i)}{-\nu^2 - 4\mu} = -1.$$

Como en el sistema de los complejos ordinarios la anulación de su producto exige la de algún factor, lo mismo sucede en estos sistemas equivalentes, deducidos por sustitución lineal. Luego, la condición $\nu^2 + 4\mu < 0$ es también *suficiente* para aquella propiedad.

c) Definida la *división* como operación inversa de la multiplicación, resulta inmediatamente, de [9-14], que dados los

* Dicha ecuación y el teorema de identidad aplicado serán tratados en el capítulo IV (§ 19-1 y § 16-1).

números complejos R_Φ y r_φ, siendo $r \neq 0$, existe un número único, que multiplicado por r_φ da como producto R_Φ; tal número $r'_{\varphi'}$, llamado *cociente* de R_Φ por r_φ, tiene como módulo el cociente de los módulos, y como argumento la diferencia de los argumentos.

En particular, la forma binómica del número recíproco de $\alpha = a_1 + i\,a_2$, se obtiene fácilmente, mediante el conjugado:

[9-18] $$\frac{1}{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha . \bar{\alpha}} = \frac{\bar{\alpha}}{r^2} = \frac{a_1 - i\,a_2}{a_1^2 + a_2^2}.$$

Por lo tanto, el cociente de dos números complejos en forma binómica se obtiene así:

[9-19] $$\beta : \alpha = \beta . \frac{1}{\alpha} = (b_1 + i\,b_2) . \frac{a_1 - i\,a_2}{a_1^2 + a_2^2} =$$
$$= \frac{b_1 a_1 + b_2 a_2}{a_1^2 + a_2^2} + i \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}.$$

NOTA: Empleando la forma exponencial, resulta:

[9-20] $$\frac{R . e^{i\Phi}}{r . e^{i\varphi}} = \frac{R}{r} . e^{i(\Phi - \varphi)} ; \qquad \frac{1}{r . e^{i\varphi}} = r^{-1} . e^{i(-\varphi)}$$

EJEMPLOS:

1. $$\frac{2 - 3i}{-1 + 2i} = \frac{(2 - 3i)(-1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}\,i$$

2. $$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{2} = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i.$$

Obténgase el último resultado por aplicación de [9-20].

d) Para la *representación geométrica del producto y del cociente*, observemos que el vector OC, que representa el producto $R_\Phi = r.r'_{\varphi + \varphi'}$ de dos números complejos, forma con el vector OB, que representa el multiplicando, el mismo ángulo que el vector multiplicador OA forma con el vector unidad OU_1. Además, siendo $R = r\,r'$, resulta (fig. 35):

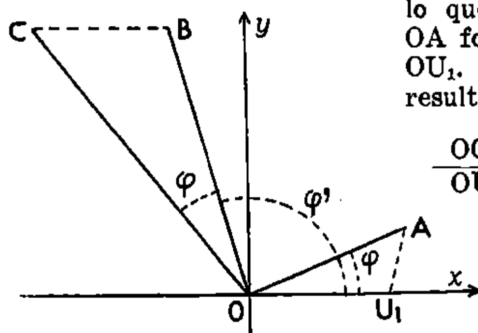


Fig. 35.

$$\frac{OC}{OU_1} = \frac{OA}{OU_1} . \frac{OB}{OU_1}.$$

o bien:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OU_1};$$

luego, los triángulos OU_1A y OBC son semejantes *directamente*, es decir, en el mismo sentido.

Este vector OC, que forma con el OB un triángulo directamente semejante al que OA forma con el vector unidad, se llama producto del OB por el OA, o del OA por el OB.

Recíprocamente, dados los vectores OC y OA, construyendo sobre OC un triángulo COB, directamente semejante al AOU_1, obtenemos el vector OB, que multiplicado por OA da el OC, es decir, construímos geométricamente el cociente de los vectores OC y OA.

e) Vemos, resumiendo este § 9, que en el sistema de los números complejos, como en el campo real, son siempre posibles las cuatro operaciones racionales, *excepto la división por cero.*

Demostradas las propiedades fundamentales en que se apoyan las demás, quedan desde luego generalizadas todas las reglas de cálculo que se reducen a una combinación de estas operaciones racionales.

Sin embargo, debe advertirse que *en el campo complejo no tienen sentido las relaciones "mayor que" y "menor que"* si deben establecerse cumpliendo todas las leyes formales correspondientes.

En nomenclatura algebraica todo ello se resume diciendo que el conjunto de números complejos forma un cuerpo conmutativo (§ 5-12, d_2), que no es un cuerpo ordenado (§ 6-5, *a*). (Véase nota I y Ejercicio 10).

EJERCICIOS

1. Calcular las componentes de los complejos: $6_{30°}$; $8_{135°}$; $10_{22°}$; $12_{336°}$. Forma polar y gráficas correspondientes de $-2+i$; $1-3i$; $2/3-\frac{1}{2}i$; $-8-15i$.

2. Calcular: 1º)

$$\frac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}; \quad 2º)\ \frac{1+i}{1-i}-\frac{1-2i}{1+i};$$

$$3º)\ \frac{(-2+i)^3}{1-3i}; \quad 4º)\ \frac{-1-i\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-i)^4};$$

efectuando las dos últimas operaciones mediante la forma polar. Gráficas correspondientes.

3. Mediante la razón simple $(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)$, estudiar cuándo están tres puntos z_1, z_2, z_3 en línea recta. Mediante la razón doble $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3)/(z_1, z_2, z_4)$, estudiar cuándo están cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 en una circunferencia.

4. Demostrar que el triángulo de vértices α, β, γ es equilátero cuando, y sólo cuando, es $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

5. ¿Qué punto z divide al segmento $z_1 z_2$ en la razón λ_1/λ_2 es decir, verifica $(z_1, z_2, z_3) = -\lambda_1/\lambda_2$, $(\lambda_1+\lambda_2 \neq 0)$?

6. Un triángulo tiene vértices z_1, z_2, z_3; *a*) ¿Dónde está su centro de gravedad, si los vértices tienen masas λ_1, λ_2, λ_3?; *b*) Demostrar, en forma puramente aritmética, que para $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, el centro de gravedad está en el interior del triángulo.

7. Hallar el lugar y trazar las gráficas correspondientes de los puntos z tales que: 1º) $|z| = 3$; 2º) $|z-i| = 5$; 3º) $4 < |z-1|$;

4º) $2 < |z| < 4$; 5º) $|z - i| + |z + i| = 3$; 6º $||z - 5| - |z + 5|| = 8$.

8. Hallar el lugar y trazar las gráficas correspondientes de los puntos z tales que: 1º) $\left|\frac{z - i}{z + i}\right| = 2$; 2º) $\left|\frac{z - \alpha}{z - \beta}\right| = k$.

9. Un avión volando a su máxima velocidad v (respecto al aire), va de (0; 0) a (6; 0) (unidad = 1 km) en 1 minuto; de allí a (0; 6) en 3 minutos, y de allí al punto de partida, en 2 minutos. Hallar v, y mediante un complejo, caracterizar la velocidad W del viento, supuesto uniforme y constante.

10. Analizar cuáles son las leyes formales que se conservan y cuáles se pierden en la siguiente ordenación de THIEME de los números complejos: La condición $\alpha > \beta$ equivale a $R(\alpha) \geqq R(\beta)$, siendo $I(\alpha) > I(\beta)$ si $R(\alpha) = R(\beta)$.

§ 10. POTENCIAS Y RAÍCES EN EL CAMPO COMPLEJO

1. **Potencias de exponente entero.** — Si en la fórmula:

$$[r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)][r_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2)]\ldots[r_n(\cos\varphi_n + i \operatorname{sen}\varphi_n)] = \\ = r_1 r_2 \ldots r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n)],$$

suponemos

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n \quad \text{y} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n,$$

resulta:

$$[10\text{-}1] \qquad [r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi),$$

fórmula que permite calcular trigonométricamente las potencias de exponente natural de los números complejos, y que suele llamarse fórmula de MOIVRE.

NOTA: Empleando la forma exponencial [9-13], la [10-1] se recuerda muy fácilmente, mediante

$$[10\text{-}2] \qquad \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$$

cuya demostración no está en aplicar la ley formal de las potencias, sino, por ahora, en expresar en forma simbólica exponencial cada uno de los miembros de [10-1].

Esta igualdad subsiste, aunque sea negativo o nulo el exponente $n = -n'$ ($n' \geqq 0$; $r > 0$); pues, por definición, se tiene (§ 6-7):

$$[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = \frac{1}{[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^{n'}} = \frac{1}{r^{n'}(\cos n'\varphi + i \operatorname{sen} n'\varphi)}$$

$$= \frac{1}{r^{n'}}(\cos n'\varphi - i \operatorname{sen} n'\varphi) = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$$

ya que es

$$\cos n\varphi = \cos n'\varphi, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n\varphi = -\operatorname{sen} n'\varphi.$$

Dado el número complejo en forma binómica, basta aplicar las leyes del producto de polinomios (§ 4-9) o la potencia de un binomio, que luego veremos (§ 12-1).

EJEMPLOS:

$(2 - 3i)^4 = 2^4 - 4.2^3.3i + 6.2^2.3^2.i^2 - 4.2.3^3.i^3 + 3^4.i^4 = -119 + 120i$

Para calcular potencias de exponente elevado, convendrá pasar a la expresión polar. Por ejemplo, para calcular $(2 - 3\,i)^{10}$, procederemos así, efectuando el cálculo con tablas de líneas trigonométricas naturales:

$$r = \sqrt{13};\ \operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{2};\ \varphi = -56^\circ\,18'\,30''$$
$$\mathrm{R} = 13^5;\quad \Phi = 156^\circ\,55'.$$

2. Raíces de los números complejos: representación gráfica. — Dado un número complejo $r\ (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, veamos si existe algún número complejo $\rho\ (\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi)$ cuya potencia n-sima (n es un número natural), coincida con aquél; es decir, que cumpla la condición:

[10-3] $$\rho^n\ (\cos n\,\psi + i \operatorname{sen} n\,\psi) = r\ (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi).$$

La condición necesaria y suficiente (§ 9-4, d_1) para que esta igualdad se verifique, es que sean iguales los módulos, y los argumentos difieran en un número exacto de circunferencias; es decir:

$$\rho^n = r, \qquad n\,\psi = \varphi + 2\,k\,\pi,$$

de donde:

[10-4] $$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n}.$$

NOTA: Esta fórmula se recuerda fácilmente, aplicando la radicación en forma de exponente racional (§ 8-4) a la expresión exponencial [9-13] del número complejo:

[10-5] $$\rho\,.\,e^{i\psi} = r^{1/n}\,.\,e^{i(\varphi + 2\,k\,\pi)/n}.$$

El módulo ρ de la raíz buscada está, pues, perfectamente determinado, y es la raíz n-sima aritmética de r. En cuanto al argumento, en su expresión figura un número indeterminado k, que puede recibir todos los valores enteros, y a primera vista parece que resultan infinitos valores para la raíz.

Dando a k los n valores más sencillos: $0, 1, 2, \ldots, n - 1$, obtenemos los argumentos siguientes:

[10-6] $$\frac{\varphi}{n},\ \frac{\varphi}{n} + \frac{2\,\pi}{n},\ \frac{\varphi}{n} + 2\,\frac{2\,\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\varphi}{n} + (n - 1)\,\frac{2\,\pi}{n};$$

cuya diferencia entre dos cualesquiera es:

$$\left(\frac{\varphi}{n} + h\,\frac{2\,\pi}{n}\right) - \left(\frac{\varphi}{n} + h'\,\frac{2\,\pi}{n}\right) = (h - h')\,\frac{2\,\pi}{n},$$

y siendo $h - h' < n$, este arco es menor que una circunferencia. Pero si en [10-4] damos a k los valores $n, n + 1, n + 2, \ldots, 2\,n - 1$, resultan los mismos arcos [10-6], aumentados en $2\,\pi$, es decir, las raíces obtenidas son las mismas anteriores, y lo mismo acontece para los demás valores de k.

TEOR.: *Todo número complejo no nulo* r_φ, *tiene* n *raíces* n*-simas distintas, que tienen como módulo la raíz* n*-sima aritmética del módulo* r, *y cuyos argumentos mínimos son:*

$$\frac{\varphi}{n},\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n},\ \ldots;\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

Para la representación gráfica de las raíces, tracemos una circunferencia de centro O y radio $\sqrt[n]{r}$; en ella han de estar los puntos representantes de las raíces n-simas buscadas. Fijemos en dicha circunferencia el punto A_0, cuyo argumento φ/n se halla dividiendo en n partes iguales el argumento dado. Este punto A_0 representa una raíz n-sima de r_φ, y dividiendo la circunferencia en n partes iguales a partir de él, obtenemos los puntos A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1} que representan las n raíces n-simas de r_φ.

EJEMPLOS: 1. Calcular las raíces sextas de $4\sqrt{3}+4i$.

$$r = 8;\qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};\qquad \varphi = 30^\circ.$$

El módulo de las raíces es $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ y sus argumentos son:

$$5^\circ,\ 65^\circ,\ 125^\circ\ 185^\circ\ 245^\circ,\ 305^\circ.$$

Constrúyase gráficamente la representación de estas raíces, aplicando la regla anterior.

3. **Raíz cuadrada en forma binómica.** — Es interesante hallar una fórmula que permita calcular *aritméticamente* la raíz cuadrada $x+yi$ de un número complejo $a+bi$ dado en forma binómica. Dicha raíz ha de cumplir la condición:

$$(x+yi)^2 = a+bi\ ,$$

es decir:

[10-7] $$x^2 - y^2 = a\ ,\quad 2xy = b.$$

Elevando al cuadrado ambas igualdades y sumando, resulta:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2+b^2 = r^2 \qquad (r>0)\ ;$$

luego, $x^2+y^2=r$; y como conocemos también la diferencia $x^2-y^2=a$, obtenemos:

$$x^2 = \frac{r+a}{2},\quad y^2 = \frac{r-a}{2}\ ;$$

de donde resulta en definitiva:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\ ;$$

pero entendiendo que deben tomarse para x e y solamente los signos que satisfagan a la condición [10-7], es decir: si b es positivo, tomaremos las dos raíces con signo $+$, o las dos con signo $-$; si b es negativo, tomaremos dichas raíces con signos opuestos. Los otros valores son soluciones extrañas, introduci-

das por la elevación al cuadrado. Si $b = 0$ es $r = |a|$, y según sea $a > 0$ ó $a < 0$ se anula la 2ª ó 1ª raíz y queda:

$$\pm \sqrt{a} \quad \text{ó} \quad \pm i \sqrt{-a} = \pm i \sqrt{|a|}.$$

4. **Raíces de los números reales.** — *a*) Puesto que un número real positivo a tiene su argumento 0, sus n raíces n-ésimas tienen como argumentos:

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad 2\,\frac{2\pi}{n}, \ \ldots, \ (n-1)\,\frac{2\pi}{n}.$$

Si es par el índice $n = 2n'$, obtenemos dos raíces reales de argumentos

$$0 \quad \text{y} \quad n'\,\frac{2\pi}{n} = \pi,$$

es decir, una raíz positiva y una negativa:

$$\sqrt[n]{a}\,(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = \sqrt[n]{a}; \quad \sqrt[n]{a}\,(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -\sqrt[n]{a},$$

que son los valores ya conocidos. Si n es impar, sólo obtenemos una raíz real positiva.

Análogamente, al extraer la raíz n-sima de un número real negativo. $-a$, es decir, de argumento π, los argumentos de las raíces son:

$$\frac{\pi}{n}, \ \frac{3\pi}{n}, \ \frac{5\pi}{n}, \ \ldots, \ \frac{(2k-1)\pi}{n}, \ \ldots, \ \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

Si n es impar: $n = 2n' - 1$, al dar a k el valor n', resulta el argumento π, es decir, una raíz real negativa; pero si n es par, no existe ninguna raíz real.

El problema de la radicación, lleno de excepciones y paradojas en el campo real, obtiene, pues, en el campo complejo, una solución general y sencilla. Para distinguir la raíz real o aritmética definida en el § 8-1, de la raíz general ahora definida, designaremos ésta encerrando el número entre dobles paréntesis *, así:

$$[10\text{-}8] \qquad \sqrt[n]{((a))} = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right).$$

b) Si en [10-8] hacemos $a = 1$, resulta:

[10-9]

$$\sqrt[n]{((1))} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\,(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

fórmula que da las n raíces n-sïmas de 1. Si es n par, obte-

* Ésta es la notación de CAUCHY; en su *Formulario* usa PEANO un asterisco a la izquierda del radicando. (Véase Bibliografía, en nota IV).

nemos las dos raíces reales ± 1; si n es impar, resulta la única raíz real $+1$.

Los afijos de las n raíces n-simas de 1 son los vértices de un polígono regular de n lados y radio 1.

Por esto, la teoría de las raíces n-simas de la unidad tiene gran importancia para el estudio de la división de la circunferencia en partes iguales.

c) Los productos, cocientes y potencias (exponente natural) de las raíces n-simas de 1 son también raíces n-simas de 1.

Porque si es $\alpha^n = 1$, $\beta^n = 1$; es también:

$$\alpha^n . \beta^n = (\alpha\,\beta)^n = 1, \quad \frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = 1, \quad (\alpha^p)^n = (\alpha^n)^p = 1;$$

luego, $\alpha\,\beta$, α/β y α^p son raíces n-simas de 1.

NOTA: La fórmula [10-8], teniendo en cuenta [10-9], puede escribirse de este modo:

$$\sqrt[n]{((a))} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{((1))}.$$

Más general: calculada una raíz n-sima de un número complejo, se obtienen todas multiplicándola por las n raíces n-simas de 1; por tanto, el cálculo de las raíces n-simas de cualquier número se reduce al de las raíces n-simas de la unidad.

Por esta razón, tiene escaso interés el cálculo de los radicales llamados *algebraicos*, es decir, radicales considerados con todos sus valores.

5. **Raíces primitivas de la unidad.** — Las raíces n-simas de 1 que no son raíces de 1 de orden inferior a n, se llaman *raíces primitivas* de orden n. Las demás son raíces de la unidad, de orden menor que n, y por lo tanto, es cada una primitiva de cierto orden $n' < n$.

EJEMPLO 1: Las raíces de cuarto orden de la unidad son:

$$+1, \quad -1, \quad +i, \quad -i.$$

Las raíces $+i$ y $-i$ son primitivas de cuarto orden; pero $+1$ y -1 no lo son; de estas dos es -1 primitiva de segundo orden, y $+1$ lo es de primero.

TEOR. 1: *Se obtienen todas las raíces primitivas de orden n dando a k en la fórmula*

$$[10\text{-}10] \qquad \delta = \cos\frac{2\,k\,\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\,k\,\pi}{n}$$

todos los valores primos con n y menores que n.

Puesto que:

$$\delta^h = \cos\frac{2\,k\,h\,\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\,k\,h\,\pi}{n}$$

la condicion necesaria y suficiente para que δ sea raíz de or-

den h, es decir, $\delta^h = 1$, es que el argumento sea múltiplo de 2π, es decir: $kh = \dot{n}$.

Si k es primo con n, debe ser $h = \dot{n}$; luego, el menor valor posible de h es n, y por lo tanto, δ es raíz primitiva de orden n.

Si k no es primo con n, y llamamos k' y n' a los cocientes de k y n por su m. c. d., se tiene, simplificando [10-10]:

$$\delta = \cos\frac{2k'\pi}{n'} + i \operatorname{sen}\frac{2k'\pi}{n'}$$

y siendo k' primo con n' es δ raíz primitiva de orden $n' < n$.

COROLARIO 1: *El número de raíces primitivas de orden n es el indicador de n, esto es $\varphi(n)$.* (Véase Cap. I, nota III, c).

COROLARIO 2: *Toda raíz primitiva de orden n es raíz de cualquier orden $\dot{n}$, y sólo de éstos*, porque debiendo ser k primo con n, resulta $h = \dot{n}$.

EJEMPLO 2: Las raíces primitivas de octavo orden se obtienen haciendo $k = 1, 3, 5, 7$ en la fórmula [10-10], y son:

$\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°$ $\qquad$ $\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°$,
$\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°$ $\qquad$ $\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°$,

es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}};$$

Las otras raíces, no primitivas, resultan dando a k los valores 0, 2, 4, 6, y son:

$$1,\ i,\ -1,\ -i.$$

Para el *cálculo de las raíces de la unidad*, en particular de las primitivas, aplicaremos:

TEOR. 2: *Se obtienen todas las raíces de orden n calculando las potencias $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots \varepsilon^n$ de una raíz primitiva cualquiera de orden n.*

Desde luego (§ 10-4, c), todos estos números son raíces de orden n; además, son todos distintos, pues si fuese

$$\varepsilon^a = \varepsilon^b \quad , \quad \text{o sea} \quad \varepsilon^b(\varepsilon^{a-b} - 1) = 0 \quad ,$$

resultaría $\varepsilon^{a-b} = 1$ (siendo $0 < a - b < n$), contra la hipótesis de que ε sea raíz primitiva de orden n. Tenemos, pues, todas las raíces de orden n.

TEOR. 3: *Si es $n = \mu\nu$, siendo μ y ν primos entre sí, el producto de cualquier raíz primitiva α de orden μ, por cualquier raíz β primitiva de orden ν, es una raíz primitiva de orden n, y así se obtienen todas, sin repetir ninguna.*

Desde luego, en virtud de lo demostrado en el § 10-4, c:

$$(\alpha\beta)^n = (\alpha\beta)^{\mu\nu} = \alpha^{\mu\nu}\beta^{\mu\nu} = (\alpha^\mu)^\nu \cdot (\beta^\nu)^\mu = 1,$$

luego, $\alpha\beta$ es raíz de orden n.

Busquemos el menor exponente m que cumpla la condición $(\alpha\beta)^m=1$; elevando a ν resulta:

$$(\alpha\beta)^{m\nu} = 1, \quad \text{o sea:} \quad \alpha^{m\nu} . \beta^{m\nu} = \alpha^{m\nu} = 1;$$

pero siendo α raíz primitiva de orden μ, debe ser $m\nu = \dot{\mu}$ (Cor. 2), y como μ es primo con ν, resulta la condición $m = \dot{\mu}$.

Análogamente obtenemos la condición $m = \dot{\nu}$; luego, debe ser $m = \dot{\overline{\mu\nu}}$, y el menor valor posible de m es $\mu\nu = n$; luego, $\alpha\beta$ es raíz primitiva de orden n.

Veamos ahora que todos los productos obtenidos multiplicando cada raíz primitiva de orden μ por cada raíz primitiva de orden ν son distintos.

Sean α y α' dos raíces primitivas de orden μ; β y β' dos raíces primitivas de orden ν; sean $\frac{2a\pi}{\mu}$ y $\frac{2a'\pi}{\mu}$ los argumentos de α y α', siendo a y a' menores que μ y primos con μ. Si el producto $\alpha\beta$ es igual al $\alpha'\beta'$, también se verifica:

$$(\alpha\beta)^{\nu} = (\alpha'\beta')^{\nu}, \quad \text{o sea:} \quad \alpha^{\nu} = \alpha'^{\nu};$$

luego, la diferencia de argumentos debe ser $\frac{2a\nu\pi}{\mu} - \frac{2a'\nu\pi}{\mu} = 2\pi q$, es decir: $(a - a')\nu = q\mu$, y siendo μ primo con ν, ha de dividir al número $a - a' < \mu$, lo cual sólo es posible siendo $a = a'$, es decir: $\alpha = \alpha'$, y por lo tanto, $\beta = \beta'$.

El número de productos obtenidos es $\varphi(\mu) . \varphi(\nu)$ que según la teoría del indicador (véase Cap. I, nota III, *c*), es $\varphi(n)$; luego así se obtienen *todas* las raíces primitivas de orden n.

Nota: En virtud del teorema 2, para obtener todas las raíces de orden n basta calcular una raíz primitiva. Este problema se simplifica descomponiendo n en producto de dos o más factores primos entre sí y aplicando el teorema 3.

Ejemplo 3: Sea $n = 12 = 3.4$. Las raíces primitivas de tercer orden son $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, y las raíces primitivas de cuarto orden son $\pm i$; multiplicando unas por otras, obtenemos las cuatro raíces primitivas de orden 12:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Ejercicios

1. Aplicar la fórmula de Moivre para expresar sen 4φ, cos 4φ, tg 4φ en función de sen φ, cos φ, tg φ.

2. Calcular los valores de: *a*) $\sqrt[3]{i}$; *b*) $\sqrt[4]{-i}$; *c*) $\sqrt[4]{1+2i}$; *d*) $\sqrt[5]{1 - i\sqrt{3}}$. Gráficas correspondientes.

3. Calcular mediante la forma binómica: *a*) $\sqrt{-5-12i}$; *b*) $\sqrt{7-24i}$.

4. Siendo 1, ε, ε^2 las raíces cúbicas de la unidad, probar que: *a*) $(1+\varepsilon^2)^4 = \varepsilon$; *b*) $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^4)(1-\varepsilon^5) = 9$.

5. Demostrar, empleando la forma polar, que el módulo de la suma de dos complejos es menor o igual que la suma de sus módulos y mayor o igual que su diferencia.

6. Probar que es nula la suma de las n raíces n-ésimas de la unidad y ± 1 su producto $(n > 1)$. Calcular:

$$1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}, \quad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

7. Verificar la identidad:

$$(x+y+z)(x+ry+r^4z)(x+r^2y+r^3z)(x+r^3y+r^2z)(x+r^4y+rz) =$$
$$= x^5+y^5+z^5-5x^3yz-5xy^2z^2,$$

siendo $r = \cos 72° + i \operatorname{sen} 72°$.

8. Resolver la ecuación: $x^6 - 2x^3 + 2 = 0$.

9. Descomponer en factores de primero y segundo grado de coeficientes reales: 1º) $x^4 + a^4$; 2º) $x^5 - 1$.

Notas al Capítulo II

I. Plenitud y unicidad del sistema de los números reales. — En el § 7-1, a comprobamos que el sistema de números racionales (§ 6-1) no bastaba para "llenar" la recta, lo que nos llevó a la introducción del número real (§ 7-4). Podríamos pensar si es posible una nueva ampliación del sistema así obtenido, sin "salir" de la recta, es decir, de manera que el sistema ampliado continúe siendo un *cuerpo ordenado* (§ 6-5, a). La contestación negativa a esta cuestión constituye el *teorema de plenitud de los números reales*, y nos hará comprender por qué no se ha definido un orden en el sistema de los números complejos (§ 9-5, e), aun cuando éste forme un cuerpo o campo de racionalidad. Como otro ejemplo, en el § 5-12, d se ha visto que el sistema de enteros (mód. p) con p primo forma cuerpo, pero éste no puede considerarse como cuerpo ordenado, pues, por ejemplo, no cumple la ley de monotonía de la suma.

Recordemos que el cumplimiento de las leyes [6-11] a [6-16], de § 6-2, b, asegura que el sistema de números reales (como el de los racionales y el de los enteros) forma un dominio de integridad (§ 5-12, c). También el sistema de números reales (como el de los racionales) forma cuerpo conmutativo al ser un dominio de integridad, en el que es siempre posible, con resultado unívoco, la división de divisor no nulo. Además, se trata de un cuerpo ordenado (§ 6-5, a), porque en él se establece la relación de desigualdad que cumplen las leyes de tricotomía, transitiva y de monotonía de la adición y multiplicación (§ 7-5, d).

Si se introduce axiomáticamente el concepto de cuerpo conmutativo ordenado como sistema de elementos abstractos que cumplan las condiciones anteriores, entonces se verifica:

TEOR. 1: *Todo cuerpo conmutativo ordenado C contiene un subcuerpo C', isomorfo con el cuerpo $C_{(1)}$ de los números racionales.*

En efecto, por la ley modular [6-12] existe en C un elemento "cero" θ que es único, a menos de la relación de igualdad o equivalencia establecida en C, y que no modifica el valor de otro cualquiera cuando se aplica a ambos la operación de adición definida en C; del mismo modo, existe un único elemento "unidad" ε, módulo de la multiplicación en C (§ 3-7). Por repetidas adiciones y sustracciones de ese elemento unidad ε, se engendra un dominio de integridad *ordenado* D(<)C, que se demuestra fácilmente es isomorfo (§ 1-6) al dominio de los enteros, con correspondencia biunívoca, que conserva tanto la adición y la multiplicación como el

orden. A partir de los "enteros" de D, por divisiones cualesquiera de divisor no nulo, se obtiene en C un subcuerpo $C'(\leqq)C$, tal que C′ como *cuerpo ordenado*, resulta isomorfo al cuerpo $C_{(1)}$ de números racionales, isomorfismo que establece entre C′ y $C_{(1)}$ una correspondencia biunívoca, que conserva tanto la adición y multiplicación como el orden. Este teorema da una caracterización abstracta de los números racionales, como el *mínimo cuerpo conmutativo ordenado.*

COROLARIO: *Todo dominio de integridad ordenado con unidad* D *contiene un dominio de integridad* D′ *isomorfo con el dominio de integridad* E *de los enteros.* La demostración es la utilizada anteriormente.

El dominio E de los enteros queda estructuralmente caracterizado así:

TEOR. 2: *Todo dominio de integridad ordenado, con unidad* D, *y tal que el conjunto de los elementos "positivos" sea bien ordenado, es isomorfo al dominio* E *de los enteros.*

Un dominio de integridad se dice que está *bien ordenado* si se ha establecido en él un orden estricto (§ 2-7) que conserve la monotonía de la adición y de la multiplicación y tal que todo subconjunto ordenado subordinamente a D tenga primer elemento (§ 2-7). Antes se ha visto que existe D′ contenido en D, tal que D′ es isomorfo a E. Vamos ahora a demostrar que todo elemento de D pertenece a D′. Sea θ el "cero" de D. Si existiese n perteneciente a D y no a D′ con $n < \theta$, entonces $\theta - n = p$ pertenecería a D y no a D′, con $p > \theta$. Sea m el primer elemento (mínimo) de los elementos p de D que sean positivos, $p > \theta$, y no pertenezcan a D′. Si ε es la "unidad" de D, no existe ningún elemento c de D tal que $\theta < c < \varepsilon$, pues dichos c no podrían tener primer elemento en contra de la hipótesis de buena ordenación de D, al cumplirse $\theta < c^2 < c < \varepsilon$. Por tanto $m > \varepsilon$, lo que implica $\theta < m - \varepsilon < m$, y por la definición de m, sería $m - \varepsilon$ perteneciente a D′ y también $m = (m - \varepsilon) + \varepsilon$, contradictorio con lo supuesto. Así, pues, D y D′ coinciden como queríamos demostrar.

Completada la recta mediante clases contiguas (§ 7-6, *a*) ya vimos que todo par de éstas, establecido no ya en el campo racional, sino en el real, tenía siempre un elemento real y uno solo de separación (§ 7 6, *d*).

El cuerpo ordenado C′ isomorfo al $C_{(1)}$ no cumple el postulado de CANTOR (§ 7-4). Diremos que un cuerpo ordenado C es *completo* si cumple el llamado *postulado de plenitud*, según el cual todo par de sucesiones monótonas o sucesión de intervalos encajados de C′ (§ 7-4) tiene siempre por lo menos un elemento de separación en C, es decir, dados en C′ los elementos $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_i \leqq \ldots \leqq \alpha'_i \leqq \ldots \leqq \alpha'_2 \leqq \alpha'_1$, existe siempre en C algún elemento α tal que $\alpha_i \leqq \alpha \leqq \alpha'_i$ para todo i.

Llegamos así al *teorema de plenitud y unicidad del sistema de los números reales*:

TEOR. 3: *Todo cuerpo conmutativo ordenado completo arquimediano es isomorfo al sistema de los números reales.*

En efecto, sea C un cuerpo ordenado completo, que por el teorema 1 contiene un subcuerpo ordenado C′ isomorfo al cuerpo ordenado $C_{(1)}$ de los números racionales. Dado un número real cualquiera $a = \{a_i;\ a'_i\}$, sea $\{\alpha_i;\ \alpha'_i\}$ el par de sucesiones monótonas que corresponde en C′ al par de sucesiones monótonas contiguas de números racionales $\{a_i;\ a'_i\}$ de $C_{(1)}$. Según el postulado de plenitud, existe en C un elemento α tal que $\alpha_i \leqq \alpha \leqq \alpha'_i$ para todo i. Este elemento de separación α es único, pues si hubiese otro α' tal que también cumpliese $\alpha_i \leqq \alpha' \leqq \alpha'_i$ para todo i, sería $| \alpha - \alpha' | \leqq \alpha'_i - \alpha_i$. Entonces, si r es un número racional cualquiera y ρ su elemento correspondiente en C′, por la conservación del orden en el isomorfismo entre C′ y $C_{(1)}$, a la condición de contigüidad $a'_j - a_j < r$ desde un cierto j, corresponde $\alpha'_j - \alpha_j < \rho$, y así, para *todo* ρ C′ habría de ser $| \alpha - \alpha' | < \rho$.

Aquí cobra el teorema de ARQUÍMEDES-EUDOXO (§ 6-5, *b*), su pro-

fundo significado en la teoría del número real, pues por el mismo, si $\theta < |\alpha - \alpha'| < \rho$, existe en C un "elemento natural" ν tal que $\nu\, |\alpha - \alpha'| > \rho$, y no podría conservarse $|\alpha - \alpha'| < \frac{\rho}{\nu}$ para el elemento "racional" ρ/ν de C'.

Haciendo corresponder biunívocamente a cada número real a el elemento α de C así obtenido unívocamente, es fácilmente demostrable, siguiendo el desarrollo del § 7-5, que C contiene un subcuerpo *ordenado* S, isomorfo al cuerpo *ordenado* de los números reales. Ahora, sólo falta demostrar que S coincide con C, lo que constituye el *teorema de plenitud* de los números reales, pues nos hará ver que su sistema no es ampliable (a menos de un isomorfismo) como cuerpo ordenado.

Sea, en efecto, β un elemento cualquiera de C; eligiendo en el teorema de ARQUÍMEDES-EUDOXO (§ 6-5, b) para α el elemento "unidad" ε, existirá en C y también en S un "entero" ν tal que $\nu = \nu\,\varepsilon > \beta$ y del mismo modo otro "entero" $\nu' > -\beta$. De la acotación $-\nu' < \beta < \nu$ se pasa a la de dos "enteros" sucesivos que contengan β, es decir: $c \leqq \beta < c + 1$, y por el mismo método constructivo de subdivisiones sucesivas, ya aplicado anteriormente (cfr. § 8-7), se construye un par de sucesiones monótonas contiguas que determinan un elemento de S coincidente con β, por ser éste el único elemento de separación del par de sucesiones construídas según el mismo razonamiento antes visto. Por lo tanto, todo elemento de C pertenece a $S (\leqq) C$, es decir: $S = C$.

Este teorema 3 muestra que cualquiera sea el camino que se tome para construir un "sistema de números reales" como cuerpo ordenado completo, se llega a un concepto esencialmente único (§ 1-6), es decir, podemos afirmar que *existe un cuerpo conmutativo ordenado completo arquimediano y solamente uno* (a menos de un isomorfismo).

II. **El infinito matemático.** — En el § 2-9 se han introducido los conceptos de conjuntos finito e infinito, y en el § 2-11, el de conjunto numerable. En el estudio de los conjuntos numerables basta aplicar la inducción completa (§ 2-2), por la que sólo se hace intervenir *sucesivamente* los elementos de un conjunto infinito. Se llega así al concepto de *infinito potencial*, cuyo sencillo significado, en este caso, es el de que *a cada número natural sigue otro, sin que se repita ninguno.*

Pero en Matemática intervienen también razonamientos en los que se consideran todos los elementos de un conjunto infinito *simultáneamente*, y en este caso se dice tratamos del *infinito actual*: éste se manifiesta cuando en los enunciados aparecen los cuantificadores "todo" y "existe", referidos simultáneamente a los elementos de un conjunto infinito. Muchos matemáticos no aceptan que pueda ser objeto de estudio el infinito actual. Sin embargo, éste ya aparece en cuanto tratamos de la existencia de conjuntos no-numerables. Así, demostremos el teorema:

TEOR. 1: *El conjunto de números reales pertenecientes a un intervalo* (a, b) *no es numerable.*

En efecto, vamos a ver que suponer numerable dicho conjunto está en contradicción con el postulado de plenitud que caracteriza esencialmente dicho conjunto de números reales (cfr. nota I). Si los números reales del intervalo (a, b) se pueden poner en sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, entonces en el intervalo (a_1, a_2) habrá un número real de índice *mínimo*: i_3 (§ 2-7, teor.). En el intervalo (a_2, a_{i_3}), todos los números reales tendrán índice mayor que i_3, y entre ellos habrá también un número real de índice mínimo $i_4 > i_3$. Lo mismo ocurrirá en el intervalo (a_{i_3}, a_{i_4}) con índice mínimo $i_5 > i_4$, y siguiendo así sucesivamente obtendremos una sucesión de intervalos encajados, y a *todos* ellos habrá de pertenecer algún número real ξ, por el postulado de plenitud que cumple todo cuerpo ordenado

completo. Entonces, el índice del número real ξ, bien determinado en la sucesión supuesta de números reales, habría de superar todo i_ν, lo que es absurdo.

La misma demostración puede servir para obtener del conjunto *numerable* de números racionales (§ 2-11) un encaje de intervalos *sin* elemento de separación racional, y así vemos bien claro que si nos quisiéramos circunscribir a considerar conjuntos numerables, habríamos de renunciar a "completar" la recta.

Es muy fácil ver (hágase) que dos intervalos cualesquiera de números reales son coordinables (§ 2-8), y todos los conjuntos coordinables con el conjunto de números reales de un intervalo (a, b) se dice tienen la *potencia del continuo.* También se prueba fácilmente que el conjunto de todos los números reales tiene la potencia del continuo, y que la reunión de una familia finita o infinita numerable de conjuntos cualesquiera que tienen la potencia del continuo, es un conjunto que tiene la potencia del continuo.

Mediante la expresión de un número irracional en fracción continua indefinida (véase Cap. V, nota III), determinada biunívocamente por una sucesión de números naturales, se prueba también que el conjunto de *todas* las sucesiones de números naturales tiene la potencia del continuo. Por lo tanto, *puede establecerse una correspondencia biunívoca tal, que a cada número real* τ *corresponda una sucesión indefinida de números naturales* $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$, *y recíprocamente*, considerando iguales dos sucesiones cuando, y sólo cuando, tengan en el mismo lugar los mismos elementos.

Con este teorema, es muy fácil establecer una correspondencia biunívoca entre los números complejos (a_1, a_2) del § 9-2, y los números reales τ, pues si $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ es la sucesión de números naturales que corresponde a cada número real τ, descompongamos dicha sucesión en las dos

$$t_1, t_3, t_5, \ldots; \qquad t_2, t_4, t_6, \ldots;$$

entonces éstas definen dos números reales, a_1 y a_2, que podemos tomar como componentes del número complejo (a_1, a_2). Recíprocamente, de dos sucesiones tales como las anteriores que representen las componentes de un número complejo, por intercalación podemos pasar a la única sucesión de números naturales $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ que determina un número real τ. He aquí, pues, una correspondencia biunívoca sin excepción entre los números reales τ y los números complejos (a_1, a_2), es decir, *el conjunto de todos los números complejos tiene la potencia del continuo.*

Nótese que en las demostraciones anteriores sólo se ha utilizado la hipótesis de que los conjuntos de valores de a_1, de a_2 y de τ tengan la potencia del continuo, y por lo tanto, también son válidas si nos limitamos a los números reales pertenecientes a sendos segmentos, lo que demuestra el famoso teorema de G. CANTOR (1872):

TEOR. 2: *Los conjuntos de los puntos de cualquier rectángulo y de los puntos de cualquier segmento son coordinables.*

De manera análoga se demuestra que el conjunto de puntos de un cubo tiene también la potencia del continuo.

Estos resultados parecen contradecir la noción intuitiva de dimensión, pero no es así, porque la correspondencia biunívoca que podemos definir entre los puntos de un cuadrado y los de su lado nunca puede ser "continua"; es decir, los puntos correspondientes en el plano a los del segmento no forman una curva continua (§ 29-2), sino que se presentan caóticamente. Es muy importante observar que la dimensión de un conjunto de puntos no depende sólo de su número cardinal, sino también de la manera como están distribuídos en el espacio.

Aunque es fácil probar que existen conjuntos no numerables que no son coordinables con el continuo (por ejemplo, el de todas las funciones reales definidas en un intervalo, § 23-2), la relación del continuo con el número ordinal generalizado es uno de los problemas no resueltos de la

Matemática. En particular, la "hipótesis del continuo" conjetura que éste es *siempre* coordinable con un subconjunto contenido en *cualquier* conjunto no numerable. En cambio, y aunque basándose en principios discutidos, se ha demostrado que la serie numérica natural es siempre coordinable con una parte de cualquier conjunto infinito.

Por difícil que sea manejar el infinito, no es posible en Matemática prescindir de su utilización; la gran obra de BOLZANO y sus continuadores ha sido fundar el Análisis infinitesimal sobre el concepto de límite aritmético, en que sólo interviene el infinito potencial. Pero no sólo el paso al límite y su aplicación al fecundo Cálculo infinitesimal, en el que se tratan conceptos tan fundamentales como el de tangente (o derivada) y área (o integral), sino también la generalidad de las proposiciones matemáticas y las cuestiones sobre el infinito actual y el transfinito justifican la conocida frase de H. WEYL: "La Matemática es la ciencia del infinito".

III. Sistemas hipercomplejos. — *a*) *Vectores del plano y números complejos.* — Desde el punto de vista aritmético, no es necesaria una nueva ampliación del campo de los números, pues en el sistema complejo han quedado resueltos todos los problemas aritméticos elementales, y veremos (**§ 18-1**) que tampoco la resolución de ecuaciones algebraicas nos obliga a salir de él, es decir: *el campo complejo es algebraicamente cerrado.*

Pero la representación geométrica (§ 9-3) nos da la pauta para otras ampliaciones. Vimos, en efecto, que el sistema de los vectores libres del plano, que es un *grupo abeliano* (§ 5-12, *b*) respecto de la suma, puede transformarse, haciendo corresponder a cada vector un número complejo, en un sistema de doble composición, mediante la definición [9-2] de producto de complejos. Ahora bien: *este sistema de doble composición es un anillo* (§ 5-12, *b*), pues es cerrado respecto a la multiplicación, y ésta cumple las leyes asociativa y distributiva respecto de la adición.

b) *Espacios vectoriales.* — b_1) Todos los vectores del plano se pueden expresar en la forma

[II-1] $$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2,$$

como *combinación lineal de dos de ellos*, es decir, suma de los productos de ellos por ciertos coeficientes reales. Por esta razón, diremos que el grupo abeliano es un *espacio vectorial de dos dimensiones.* Como *base* ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$) del espacio vectorial puede tomarse cualquier par de vectores no paralelos, por ejemplo, los vectores unitarios sobre los ejes de coordenadas, que podemos indicar así: $\mathbf{i}_1 = (1; 0)$; $\mathbf{i}_2 = (0; 1)$.

b_2) Análogamente los vectores del espacio:

[II-2] $$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3$$

forman un *espacio vectorial de tres dimensiones,* con *base* ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$), pudiendo tomarse cualquier terna de vectores no coplanares, por ejemplo, los vectores unitarios sobre los ejes, que podemos indicar:

$$\mathbf{i}_1 = (1, 0, 0,); \quad \mathbf{i}_2 = (0, 1, 0); \quad \mathbf{i}_3 = (0, 0, 1).$$

b_3) Todo esto nos sugiere la oportunidad de llamar *vectores de n dimensiones* a los conjuntos ordenados de *n componentes* reales:

[II-3] $$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

entre los cuales: 1º) la *relación de igualdad* equivale a la igualdad de las respectivas componentes que ocupen el mismo lugar; 2º) se definen *dos operaciones fundamentales,* llamadas *suma vectorial* y *multiplicación de un vector por un número real k* en la siguiente forma:

[II-4] $$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_n + b_n),$$

[II-5] $$k\,\mathbf{a} = (k\,a_1,\ k\,a_2,\ \ldots,\ k\,a_n).$$

Demuéstrese que los entes así definidos cumplen las siguientes propiedades:

[II-6] *El sistema forma un grupo abeliano* (§ 5-12, *b*) *respecto de la suma vectorial;*

[II-7] *El producto de un vector por un número real cumple las leyes:*

1º) *Distributivas:* $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\,\mathbf{a} + k\,\mathbf{b}$;
$(k_1+k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$;

2º) *Asociativa:* $(k_1 k_2)\mathbf{a} = k_1(k_2\mathbf{a})$;

3º) *Modular:* $1 \, . \, \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Todo sistema de elementos que respecto a un cuerpo de coeficientes k (§ 5-12, *d*), en nuestro caso el campo real, se relacionen mediante dos operaciones fundamentales que cumplan las propiedades [II-6] y [II-7] tomadas como características, se llama *espacio vectorial* (y también, frecuentemente, *espacio lineal*).

Los vectores de n componentes tienen otra propiedad característica: es posible elegir n vectores (y no menos), que entonces se dice forman una *base*, tales que *todo* otro vector del sistema puede expresarse como combinación lineal de ellos.

Todas estas propiedades, tomadas como características, son las que definen en forma "descriptiva" o axiomática (§ 1-7) un *espacio vectorial de n dimensiones.*

Una base del espacio está dada por los n vectores que tienen nulas $n-1$ componentes, e igual a 1 la restante:

$$\mathbf{i}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{i}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{i}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1),$$

porque cualquier vector puede expresarse por medio de ellos del siguiente modo:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (a_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \ldots$$
[II-8] $$+ (0, 0, 0, \ldots, a_n) = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n.$$

Pero no son éstos los únicos vectores que gozan de tal propiedad; la condición necesaria y suficiente que deben cumplir n vectores arbitrarios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ para que cualquier otro $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pueda expresarse como combinación lineal de ellos con coeficientes reales unívocamente determinados, es decir:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n,$$

es que sea distinto de cero el determinante (§ 15-5) de las componentes de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, el cual aparece como determinante del sistema de ecuaciones lineales en que se descompone la igualdad anterior, sistema que determinará un solo conjunto de valores para las λ (§ 15-4).

c) *Anillos de hipercomplejos.* — Así como el grupo abeliano de los vectores de un plano se transformó en el anillo de los números complejos (*a*), cabe preguntarse si será posible transformar un espacio vectorial de n dimensiones (b_3) en un anillo mediante una oportuna definición de producto entre sus elementos [II-3].

Veremos que esto es posible de infinitas maneras para cada espacio vectorial. Como la multiplicación ha de ser (§ 5-12, *b*) distributiva respecto de la suma, será:

[II-9] $$\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b} = (\sum_r a_r \mathbf{i}_r)\,(\sum_s b_s \mathbf{i}_s) = \sum_{r,s}(a_r b_s)(\mathbf{i}_r \, . \, \mathbf{i}_s),$$

de modo que basta definir los productos entre los elementos de una base. Como el sistema ha de ser (§ 5-12, *b*) cerrado respecto de la multiplicación, cada producto $\mathbf{i}_r . \mathbf{i}_s$ debe poder expresarse como combinación lineal en la forma

[II-10] $$\mathbf{i}_r . \mathbf{i}_s = \sum_h \overset{(h)}{c}_{r,s}\, \mathbf{i}_h,$$

donde los $\overset{(h)}{c}_{r,s}$, que desempeñan un papel fundamental en la definición de la multiplicación, se llaman *coeficientes estructurales* del sistema de doble composición. Para que éste sea un anillo, es preciso que se cumpla la propiedad *asociativa* de la multiplicación, para lo cual basta a su vez su

validez para elementos de una base: $(\mathbf{i}_r . \mathbf{i}_s) . \mathbf{i}_t = \mathbf{i}_r . (\mathbf{i}_s . \mathbf{i}_t)$. Esta igualdad impone a los coeficientes estructurales $\overset{(h)}{c_{r,s}}$ relaciones de igualdad, fáciles de obtener identificando los desarrollos de ambos miembros, pero que no los determinan por completo.

Todo anillo así obtenido, a partir de un espacio vectorial, se llama *sistema hipercomplejo*. Sus elementos [II-3] no se llaman ya vectores, sino *números hipercomplejos*. Cada número hipercomplejo se representa por un vector, pero, a diferencia de los vectores, entre los hipercomplejos está definido el producto [II-9] mediante [II-10].

Las relaciones que deben satisfacer los $\overset{(h)}{c_{r,s}}$, a las que hay que agregar $\overset{(h)}{c_{r,s}} = \overset{(h)}{c_{s,r}}$ si se quiere que el anillo sea conmutativo, dejan todavía un amplio margen de indeterminación, y cabe preguntar si será posible elegir dichos coeficientes λ de la tabla de multiplicar, de modo que se conserven las otras propiedades, para que formen un cuerpo conmutativo, como acontece con los complejos ordinarios.

Planteado así el problema, la contestación es inmediata, pues si se supone como en éstos unidades imaginarias de cuadrado -1 [esto se logra siempre por cambio de base, análogamente a lo que vimos en § 9-5, *b*, para complejos binarios], se tiene:

$$(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_s) = \mathbf{e}^2_r - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_s \mathbf{e}_r - \mathbf{e}^2_s = 0,$$

luego, si queremos además que el anillo sea dominio de integridad, no tendrá divisores de cero (§ 5-12, *c*), y por lo tanto, debe ser $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_s$, o bien: $\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_s$. Por consiguiente hay una sola unidad imaginaria, reduciéndose el sistema de n componentes al de los complejos binarios.

Resulta así, en su forma más sencilla y restringida, el teorema final de la Aritmética, como fué demostrado por HANKEL, y con mayor generalidad por WEIERSTRASS:

No existe ningún sistema de números complejos de más de dos unidades que forme un cuerpo conmutativo.

Ya no es posible continuar la serie de ampliaciones del concepto de número. Con este teorema llega a su termino natural el desarrollo de la Aritmética.

d) *Cuaternios.* — d_1) Si se prescinde de la propiedad conmutativa de la multiplicación, no subsiste la limitación dada por el teorema de HANKEL y WEIERSTRASS. En efecto, si entre los números del tipo

[II-11] $$\mathbf{a} = a_0 1 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$$

se define la multiplicación estableciendo que 1 es un módulo (§ 3-7) de la misma, y que además:

[II-12] $$\begin{cases} \mathbf{i}^2 = -1 & \mathbf{i}.\mathbf{j} = -\mathbf{j}.\mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j}^2 = -1 & \mathbf{j}.\mathbf{k} = -\mathbf{k}.\mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k}^2 = -1 & \mathbf{k}.\mathbf{i} = -\mathbf{i}.\mathbf{k} = \mathbf{j} \end{cases}$$

se obtiene como veremos un cuerpo, que por estas mismas relaciones [II-12] vemos ya que es no conmutativo. Estos hipercomplejos [II-11] fueron introducidos por HAMILTON, que los llamó *cuaternios* o *cuaterniones*, y los aplicó a problemas de Geometría y de Mecánica.

Si dejando de lado la propiedad conmutativa se trata de conservar las demás leyes formales de la Aritmética, se tiene también una limitación sobre los posibles sistemas hipercomplejos, pues un célebre teorema de FROBENIUS (1878) establece que *los únicos sistemas hipercomplejos que forman cuerpo* (no necesariamente conmutativo) *son los complejos ordinarios y los cuaternios.*

d_2) Para probar que los cuaternios forman un cuerpo, definamos ante todo el *módulo* $|\mathbf{a}|$ y el *conjugado* $\bar{\mathbf{a}}$ del cuaternio [II-11] así:

[II-13] $$|\mathbf{a}| = +\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

[II-14] $$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}.$$

Tendremos entonces, por [II-12]:

$$\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a} = (a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k})(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) =$$
$$= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2.$$

El producto de dos cuaternios conjugados es el cuadrado del módulo de ambos.

En consecuencia, respecto del producto, si a no es el cuaternio nulo $0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, por ser $|\mathbf{a}| \neq 0$, existe el inverso (§ 5-12, *b*) a izquierda $\bar{\mathbf{a}}/|\mathbf{a}|^2$, que es también inverso a derecha, por ser asimismo $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = |\mathbf{a}|^2$. Por tener inverso respecto al producto todo cuaternio no nulo, el anillo es un cuerpo (§ 5-12, d_2).

El sistema de los cuaternios es un cuerpo no conmutativo.

d_4) Gran parte de la actual Álgebra vectorial de tres dimensiones estaba formulada, en la segunda mitad del siglo XIX, en el lenguaje de los cuaternios; de ahí las denominaciones, todavía en uso, de *parte escalar* E(a) y *parte vectorial* V(a) de un cuaternio a [II-11]:

$$\mathrm{E}(\mathbf{a}) = a_0 \qquad \mathrm{V}(\mathbf{a}) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

El producto de dos cuaternios con parte escalar nula, que de acuerdo con [II-12] es:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) +$$
$$+ (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

tiene como parte escalar el valor opuesto al *producto escalar* de los correspondientes vectores (cfr. § 13-6), y como parte vectorial, un vector que llamaremos (en el tomo II) *producto vectorial* de aquéllos.

IV. **Bibliografía.** — 1. En el § 7-6, *b* hemos dado una brevísima noticia histórica sobre el desarrollo de la teoría del número real. Para más detalles, así como para etapas anteriores a partir de los griegos, recomendamos la lectura de las notas finales de O. ZARISKI, a su traducción italiana de los famosos opúsculos de:

R. DEDEKIND: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Vieweg, Braunschweig, 1888; 8ª ed., 1960);

Stetigkeit und irrationale Zahlen (Vieweg, Braunschweig, 1872),

que publicó en la colección "Per la storia e la filosofia delle matematiche", dirigida por E. ENRIQUES bajo el título *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali.* (A. Stock, Roma, 1926).

2. El método de las cortaduras de DEDEKIND para introducir el número real, está expuesto con todo rigor y detalle en la obra de LANDAU citada anteriormente (Cap. I, nota IV-6).

Un esquema didáctico de la teoría de DEDEKIND contiene uno de los mejores libros sobre iniciación universitaria que sobre Análisis matemático de las funciones de una variable se hayan escrito:

G. H. HARDY: *A course of pure mathematics.* (10ª ed., Cambridge, Univ. Press, 1958).

3. Una teoría completa del número real, introducido primero mediante cortaduras y estudiado en sus propiedades mediante pares de sucesiones monótonas contiguas, se encuentra en el Análisis algebraico de J. REY PASTOR (citado en Cap. I, nota IV-1).

Como iniciación a la teoría de las series, de la que constituye uno de los principales tratados, con muy rica ejemplificación, contiene la teoría del número real introducido mediante sucesiones de intervalos encajados la obra de:

K. KNOPP: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (4ª ed., Springer, Berlín, 1947). Traducción inglesa de la segunda ed.: *Theory and application of infinite series.* (Blackie, Londres 1928).

4. El número real introducido mediante el postulado de existencia y unicidad del extremo superior (§ 23-14) de todo conjunto lineal acotado superiormente, conteniendo también el estudio de los campos de números y espacios vectoriales, está en la obra de G. BIRKHOFF y S. MAC LANE (citada en Cap. I, nota IV-5).

La definición del número real mediante el método de MERAY-CANTOR de las sucesiones regulares o de CAUCHY, y su relación con el extremo superior de los conjuntos lineales acotados, y estudio más completo de los sistemas hipercomplejos, está en la obra de B. L. VAN DER WAERDEN (citada en Cap. I, nota IV-7).

Un estudio didáctico de dicho método de las sucesiones regulares puede encontrarse en la estimable obra sobre álgebra moderna de:

C. C. MAC DUFFEE: *An introduction to abstract algebra.* (Wiley, Nueva York, Chapman y Hall, Londres, 1940).

Logra el doble propósito de dar un tratamiento detallado de las sucesivas ampliaciones del concepto de número, e iniciar al lector en los métodos del Álgebra abstracta, la obra cuya primera parte es informal y sirve de motivación para el tratamiento riguroso de la segunda:

H. A. THURSTON: *The number system* (Interscience, Nueva York, 1956).

5. Obra dedicada a un estudio sistemático de los aspectos elemental y superior de los números irracionales, que contiene además reseña histórica y comparativa de los diversos métodos que los introducen (cfr. § 7-6, *b*), sus representaciones en algoritmos infinitos y aproximaciones diofánticas es:

O. PERRON: *Irrationalzahlen.* (2ª ed., W. de Gruyter, Berlín, Chelsea, Nueva York, 1939).

Un tratamiento conciso y lúcido en un nivel relativamente elemental da:

I. NIVEN: *Irrational numbers* (Carus Math. Monographs, nº 11; Wiley, Nueva York, 1956).

Obra clásica sobre teoría de números, cuya 3ª edición difiere de la 2ª (1945) principalmente en agregados sobre progresos recientes y en la puesta al día de su valiosa colección de referencias y notas históricas, es:

G. H. HARDY y E. M. WRIGHT: *An introduction to the theory of numbers* (Clarendon Press, Oxford, 3ª ed., 1954); trad. alemana de H. RUOFF: *Enführumg in die Zahlentheorie* (Oldenburg, Münich, 1958).

6. Sobre el contenido de este capítulo recomendamos también la consulta de las obras ya citadas en la bibliografía del Cap. I, por ejemplo: COURANT-ROBBINS (Cap. I, nota IV-14), F. ENRIQUES (Cap. I, nota IV-13), TORANZOS (Cap. I, nota IV-11), M. O. GONZÁLEZ (Cap. I, nota IV-2), B. LEVI (Cap. I, nota IV-8), PEANO (Cap. I, nota IV-16) y RUSSELL (Cap. I, nota IV-17).

Con la misma orientación de la obra citada de ENRIQUES, dedicada a profesores de enseñanza secundaria, atenta a los aspectos elementales, con referencias históricas y a modernas investigaciones, está la colección escrita por 14 matemáticos italianos:

Repertorio di matematiche. A cura di MARIO VILLA. (Cedam, Padova, 1951).

CAPÍTULO III

COMBINATORIA. ÁLGEBRA LINEAL

§ 11. ANÁLISIS COMBINATORIO

1. **Variaciones.** — Dados m objetos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, llamaremos *variación n-aria* (o de orden n) de estos m elementos, a todo conjunto ordenado formado por n objetos cualesquiera, elegidos entre ellos, conviniendo en considerar como distintas dos variaciones, cuando difieren en algún elemento, y si constan de los mismos, cuando difieren en el orden de sucesión de éstos.

El número de variaciones de orden n formadas con m objetos cualesquiera, se designará así: $V_{m,n}$.

EJEMPLO 1: Las variaciones binarias de los objetos a, b y c son:

$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$

Cada uno de los m objetos, $a_1, a_2, \ldots, a_m$, constituye una variación unitaria o de primer orden; su número es $V_{m,1} = m$.

Si a la derecha de cada una de éstas colocamos sucesivamente los $m - 1$ objetos distintos al que constituye la variación unitaria considerada, obtenemos variaciones binarias o de orden 2 sin que falte ni se repita ninguna; su número es

$$V_{m,2} = V_{m,1} . (m - 1) = m . (m - 1).$$

Agregando a la derecha de cada variación binaria cada uno de los $m - 2$ objetos que no figuran en ella obtenemos todas las variaciones ternarias o de orden 3, sin repetir ninguna; su número es

$$V_{m,3} = V_{m,2} . (m - 2) = m(m - 1)(m - 2).$$

Siguiendo así se tiene para todo $n \leqslant m$:

$$[11\text{-}1] \qquad V_{m,n} = m\ (m - 1)\ (m - 2)\ \ldots\ [m - (n - 1)] = m\ (m - 1)\ (m - 2) \ldots (m - n + 1),$$

es decir: $V_{m,n}$ es un *producto de tantos factores decrecientes, a partir de m, como indica el número de objetos que entran en cada variación.*

Para completar la demostración de [11-1] por inducción (§ 2-2, a), supongamos formadas las variaciones de orden $n - 1$ con los mismos m

objetos. Si a la derecha de cada una de éstas colocamos sucesivamente cada uno de los objetos que no entran en ella, obtenemos sucesiones de n objetos. Como el número de elementos que no entran en una variación de orden $n - 1$ es $m - (n - 1) = m - n + 1$, de ella deduciremos $m - n + 1$ variaciones de orden n, las cuales son distintas, pues difieren en el último de ellos. También son distintas las deducidas de dos variaciones distintas por adición de un objeto cualquiera a cada una, pues difieren en la naturaleza o colocación de los $n - 1$ primeros.

Éstas son *todas* las de orden n, pues dada arbitrariamente una variación de n cualesquiera de los m objetos, separando el último queda una variación de orden $n - 1$, la cual, por hipótesis, se halla entre las que nos han servido de partida.

Siendo $V_{m,n-1}$ el número de variaciones que teníamos, obtenemos

$$V_{m,n} = V_{m,n-1} \times (m - n + 1) \qquad [11\text{-}2]$$

variaciones de orden n.

Supongamos que [11-1] (cierta para $n = 1$) lo es para las variaciones de orden $n - 1$, es decir:

$$V_{m,n-1} = m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n+2)$$

entonces en virtud de [11-2] resulta [11-1], lo que completa la inducción.

EJEMPLO 2: Formemos las variaciones unitarias, binarias, ternarias y cuaternarias con los cuatro objetos a_1, a_2, a_3, a_4.

Estando cada uno determinado por su índice numérico, bastará formar todas las variaciones posibles con estos índices: 1, 2, 3 y 4.

1	2	3	4			$V_{4,1}=4$
1,2	1,3	1,4				
2,1	2,3	2,4				$V_{4,2}=4.3=12$
3,1	3,2	3,4				
4,1	4,2	4,3				
1,2,3	1,2,4	1,3,2	1,3,4	1,4,2	1,4,3	
2,1,3	2,1,4	2,3,1	2,3,4	2,4,1	2,4,3	$V_{4,3}=4.3.2=24$
3,1,2	3,1,4	3,2,1	3,2,4	3,4,1	3,4,2	
4,1,2	4,1,3	4,2,1	4,2,3	4,3,1	4,3,2	
1,2,3,4	1,2,4,3	1,3,2,4	1,3,4,2	1,4,2,3	1,4,3,2	
2,1,3,4	2,1,4,3	2,3,1,4	2,3,4,1	2,4,1,3	2,4,3,1	$V_{4,4}=4.3.2.1=24$
3,1,2,4	3,1,4,2	3,2,1,4	3,2,4,1	3,4,1,2	3,4,2,1	
4,1,2,3	4,1,3,2	4,2,1,3	4,2,3,1	4,3,1,2	4,3,2,1	

NOTAS: 1. Obsérvese que la ley de formación antes aplicada da todas las variaciones, ordenadas de tal modo que, si consideramos cada una como un número, cuyas cifras sean los índices de objetos que la componen, los números que representan las diversas variaciones de cada cuadro, ordenados por filas conforme se han obtenido, forman una sucesión monótona *creciente*. Pruébese que esta ley es general.

2. Si suponemos que cada elemento puede figurar cualquier número de veces en una misma variación, entonces, además de las variaciones n-arias antes formadas, aparecen muchas otras, y al número total lo designaremos por $V'_{m,n}$, llamando a todas ellas *variaciones con repetición*.

Suponiendo ya formadas todas las variaciones $(n-1)$-arias con repetición, obtendremos todas las n-arias agregando a la derecha de cada una, cada uno de los m objetos. Que así obtenemos todas las n-arias, y sólo una vez cada una, resulta del mismo razonamiento aplicado a las variaciones sin repetición. Por lo tanto:

$$V'_{m,n} = V'_{m,n-1} \times m.$$

Pero siendo $V'_{m,1} = m$, resulta:

[11-3] $V'_{m,2} = m^2$, $V'_{m,3} = m^3$, y, en general: $V'_{m,n} = m^n$

2. **Permutaciones.** — *a*) Las variaciones de orden m formadas con m objetos, es decir, las diversas ordenaciones de todos estos m elementos, se llaman *permutaciones.* Dos cualesquiera contienen, pues, los mismos objetos, y difieren solamente en el orden de colocación de éstos.

El número P_m de permutaciones de m objetos es (§ 11-1):

$$P_m = V_{m,m} = m(m-1)\ (m-2)\dots(m-m+2)\ (m-m+1) = \\ = m\ (m-1)\ (m-2)\ \dots\ 2.1,$$

o sea (§ 4-3):

[11-4] $P_m = m!$

Así, por ejemplo, con cuatro objetos se pueden formar 24 permutaciones. Si estos objetos se designan por los números 1, 2, 3, 4, en el cuadro último del § 11-1, tenemos formadas dichas permutaciones.

Según la definición anterior, para llegar al cuadro de las $m!$ permutaciones de m objetos, formaremos primero las variaciones de órdenes 1, 2, 3, ..., $m-1$. Puede evitarse este largo proceso preliminar recordando el § 11-1, nota 1, que nos permite formar directa y ordenadamente todas las permutaciones.

b) *Inversiones de una permutación.* — Establecido un cierto orden de sucesión entre los m objetos dados (supondremos es el alfabético, si son letras distintas, o el de la serie natural, si son números o tienen índices numéricos), se llama *permutación principal* aquella en que los m objetos están en este mismo orden.

En otra permutación cualquiera, se dice que dos elementos forman *sucesión* cuando, prescindiendo de los restantes, están en el mismo orden que en la permutación principal; y que forman *inversión,* cuando están en orden contrario. Así, en la permutación $a_3\, a_1\, a_4\, a_2$ forma inversión a_3 con a_1 y con a_2, así como a_4 con a_2; esta permutación presenta, pues, tres inversiones. Para hallar las inversiones de una permutación, basta comparar cada elemento con todos los que le siguen.

Se dice que una permutación es de *clase par* (*impar*), según sea par (impar) el número de sus inversiones. La $a_3\ a_1\ a_4\ a_2$ es, pues, impar, pues tiene tres inversiones.

Si considerados dos elementos de una determinada permutación, cada uno de ellos se pone en lugar del otro, se dice que se *trasponen* dichos dos elementos, o que a la permutación se le aplica la *trasposición* de los dos elementos considerados.

*b*₁) *Una permutación cambia de clase si se trasponen dos elementos.* — Supongamos, primero, que dichos elementos $a_i\, a_j$ sean consecutivos en la permutación dada. Para abreviar, llamaremos A al conjunto de todos los elementos anteriores a ambos, y B al de los posteriores; la permutación será:

[11-5] $A\, a_i\, a_j\, B$

y después de la trasposición:

[11-6] $A\, a_j\, a_i\, B$

Todas las inversiones que forman los elementos de A, entre sí o con los siguientes, subsisten en [11-6]; también las inversiones que a_i y a_j forman con los elementos de B son las mismas en ambas permutaciones, y también las que forman entre sí los elementos de B. La única alteración se refiere al par $a_i\, a_j$; si forman inversión (sucesión) en [11-5], forman sucesión (inversión) en [11-6]; luego, al pasar de [11-5] a [11-6] se pierde (gana) una inversión; es decir, el número total disminuye o aumenta en una unidad, y por lo tanto, cambia de clase la permutación.

Si a_i y a_j no son consecutivos, sino que entre ellos hay h elementos, llamando C al conjunto de ellos, se puede representar así la permutación:

[11-7] $A\, a_i\, C\, a_j\, B$

Para trasponer a_i y a_j, hagamos avanzar h lugares a a_i (es decir, lo traspondremos sucesivamente con los h elementos de C), obteniendo así la permutación $A\, C\, a_i\, a_j\, B$; y ahora hagamos retroceder $h + 1$ lugares a a_j, logrando así la permutación

[11-8] $A\, a_j\, C\, a_i\, B.$

Hacer avanzar o retroceder un puesto a un elemento, es trasponerlo con el consecutivo, y esto altera la clase de la permutación; el número total de cambios de clase desde [11-7] a [11-8] es $h + h + 1 = 2\,h + 1$, que es un número impar; luego, ambas son de distinta clase.

b_2) Si en todas las permutaciones de m objetos trasponemos dos elementos a_1 y a_2, obtenemos $m!$ permutaciones entre los mismos m objetos. Dos cualesquiera de éstas son distintas, porque, si fuesen idénticas, también lo serían aquellas dos de donde se han deducido trasponiendo a_1 y a_2. Por consiguiente, estas $m!$ permutaciones así formadas son las mismas $m!$ permutaciones dadas. Pero, en virtud del teorema anterior, cada una par se transforma en una impar, y viceversa; luego, las permutaciones pares y las impares están en correspondencia biunívoca, y por lo tanto, son en igual número.

Entre las $m!$ permutaciones de m objetos, hay $m!/2$ pares y $m!/2$ impares.

c) *Permutaciones con repetición.* — Hemos considerado hasta ahora solamente permutaciones entre m objetos *distintos*: $a_1, a_2, \ldots, a_m$. En tal supuesto, si en una de las $m!$ permutaciones formada por éstos nos fijamos en los α elementos iniciales, y los permutamos de todos los modos posibles, sin alterar la colocación de los restantes elementos, $a_{\alpha+1}$, $a_{\alpha+2}$, ...,

a_m, obtenemos $\alpha!$ permutaciones, que son todas distintas, puesto que difieren en la colocación de dichos α elementos. Así, por ejemplo, si en la permutación *b c d a e* permutamos los elementos *a*, *c* y *e*, obtenemos seis permutaciones distintas:

b c d a e. *b c d e a*, *b a d c e*; *b a d e c*, *b e d a c*, *b e d c a*.

Análogamente, partiendo de otra permutación distinta de éstas obtenemos otras seis, etc. En general: las $m!$ permutaciones quedan así clasificadas en grupos, cada uno de $\alpha!$ permutaciones distintas.

Pero si los α objetos $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ son uno mismo, que se repite α veces en lugares distintos, las $\alpha!$ permutaciones de cada grupo son una misma, puesto que no difieren en la ordenación de sus elementos. Por lo tanto:

c_1) *El número de permutaciones distintas que se pueden formar con m objetos, entre los cuales hay* α *iguales, es* $m!/\alpha!$.

Si en estas permutaciones suponemos ahora que hay otros β elementos iguales entre sí, el número de permutaciones distintas quedará dividido por $\beta!$. Y siguiendo así, resulta, en general:

c_2) *El número de permutaciones distintas que se pueden formar con m objetos, entre los cuales hay* α *iguales entre sí, otros* β *iguales entre sí, . . . , y finalmente,* λ *iguales entre sí, es*:

$$[11\text{-}9] \qquad P_m^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda} = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$$

siendo: $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m.$

3. **Combinaciones.** — *a*) *Combinaciones* de orden n, de m objetos:

$$[11\text{-}10] \qquad a_1, a_2, \ldots, a_m,$$

(o combinaciones n-arias), son los grupos de n objetos que se pueden formar con ellos, de modo que dos cualesquiera difieran en algún objeto.

Así como las variaciones son *sucesiones* que se diferencian entre sí por la naturaleza de sus objetos, o por su colocación, aquí es ésta indiferente, y sólo aquélla importa. Por razón de comodidad, alinearemos los elementos de cada combinación, colocándolos en el orden natural de menor a mayor índice. Por ejemplo, entre las 24 variaciones ternarias de los números 1, 2, 3, 4 (§ **11-1**), sólo hay cuatro combinaciones distintas: 123, 124, 134, 234.

Dada una combinación n-aria, ordenando sus elementos de todos los modos posibles obtenemos variaciones distintas: así, la combinación 234 da origen a las seis variaciones siguientes: 234, 243, 324, 342, 423, 432. Como el número de permutaciones de n elementos es $P_n = n!$ (§ 11-2, *a*), cada combinación n-aria da origen a $n!$ variaciones distintas. Por consiguiente, llamando $C_{m,n}$ al número de combinaciones distintas, es:

$$V_{m,n} = C_{m,n} \times P_n, \text{ de donde } C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{V_{m,n}}{n!},$$

[11-11]
$$C_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} \quad (1 \leqq n \leqq m)$$

Multiplicando el dividendo y el divisor por $(m-n)!$ (si es $n < m$), resulta:

[11-12] $$C_{m,n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} \quad (1 \leqq n < m).$$

Esta fórmula es válida también para $n = m$ (en cuyo caso $C_{m,n} = 1$), *conviniendo en atribuir al símbolo* $0!$ *el valor* 1.

b) Formación de las combinaciones — Las combinaciones unitarias de los m objetos [11-10] son:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m.$$

Agregando a cada elemento cada uno de los *siguientes*, obtenemos estas combinaciones binarias distintas:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_1 a_4 & \ldots & a_1 a_m, \\ & a_2 a_3 & a_2 a_4 & \ldots & a_2 a_m, \\ & & a_3 a_4 & \ldots & a_3 a_m, \\ & & & \ldots\ldots\ldots & \\ & & & & a_{m-1} a_m. \end{array}$$

Supongamos ya formadas todas las combinaciones de orden $n-1$, de tal modo que en cada una aparezcan los índices ordenados de menor a mayor, y demostraremos, en general:

Agregando a cada combinación $(n-1)$-aria cada uno de los elementos posteriores al último de los que en ella figuran, se obtienen todas las combinaciones n-arias.

Desde luego, dos cualesquiera, deducidas de una misma por agregación de elementos diferentes, son distintas, pues difieren en este elemento. También lo son las deducidas de dos combinaciones distintas; sean, en efecto, a_h, a_k los últimos elementos de dichas combinaciones $(n-1)$ arias, siendo, por ejemplo, $h \leqq k$; la primera de ellas tiene algún elemento a_i (siendo $i \leqq h$), que no está en la segunda; y como el elemento que se agrega a esta segunda es posterior a a_k, luego posterior a a_h y a_i, y, como tal, distinto de a_i, la primera combinación formada tiene por lo menos el elemento a_i, que no figura en la segunda; luego, ambas son distintas.

4. **Números combinatorios.** — En toda teoría combinatoria y en muy variadas cuestiones de Aritmética y de Análisis desempeñan importante papel los números de la forma $\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$ llamados *números combinatorios* atendiendo a su origen [11-12], y que suelen representarse por la notación de EULER: $\binom{m}{n}$, que se lee: *m sobre n.* Al número m lo llamaremos *numerador* Por definición es:

y en virtud del convenio $0! = 1$, que hemos hecho en el § 11-3, *a*, resultan los siguientes valores extremos:

[11-14] $$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\,m!} = 1, \qquad \binom{m}{m} = \frac{m!}{m!\,0!} = 1.$$

a) En virtud de la definición [11-13], resulta:

[11-15] $$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \binom{m}{n};$$

luego:

Los números combinatorios de igual numerador y órdenes complementarios son iguales.

Directamente se ve también esto, observando que cada grupo de n objetos, elegidos entre m, deja un grupo restante formado por $m-n$ objetos, y viceversa; luego, las combinaciones de órdenes n y $m-n$ están en correspondencia biunívoca, y por lo tanto, hay el mismo número de unas que de otras.

b) Clasifiquemos todas las combinaciones n-arias de los m objetos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, según que contengan o no el elemento a_1. Cada combinación n-aria que contenga a_1 se obtiene agregando a a_1 un grupo cualquiera de $n-1$ objetos elegidos entre los $a_2, a_3, \ldots, a_m$; cada combinación que no contenga a_1 se obtiene eligiendo un grupo de n objetos entre los $a_2, a_3, \ldots, a_m$. Por lo tanto:

[11-16] $$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}.$$

Esta relación fundamental, cuya demostración aritmética es también sencillísima, permite el cálculo rápido de los números combinatorios de numerador m, conocidos los de $m-1$. Suelen escribirse en filas sucesivas, así:

$m = 1$	1 1
$m = 2$	1 2 1
$m = 3$	1 3 3 1
$m = 4$	1 4 6 4 1
$m = 5$	1 5 10 10 5 1
$m = 6$	1 6 15 20 15 6 1
.....	....

figura llamada *triángulo aritmético* (atribuído a TARTAGLIA, aunque su origen es mucho más antiguo), que ofrece multitud de relaciones interesantes o curiosas entre sus elementos.

Escritas dos oblicuas 1, 1, 1, 1, ..., se forma rápidamente aplicando [11-16], que expresa: *cada elemento es la suma de los dos que tiene encima.*

La relación [11-15] expresa la igualdad de los números colocados simétricamente respecto del eje vertical de simetría del triángulo.

Nota: Combinaciones con repetición. — **Def.**: *Los grupos de n objetos, distintos o repetidos, elegidos entre m dados, considerando como iguales los formados por los mismos objetos repetidos igual número de veces, se llaman combinaciones n-arias con repetición entre m objetos.*

Su número lo representaremos así: $C'_{m,n}$.

Mientras que con m objetos solamente se pueden formar combinaciones ordinarias de órdenes 1, 2, 3, ..., m; en cambio, se pueden formar combinaciones con repetición de cualquier orden, por grande que sea.

Suponiendo formadas las combinaciones $(n-1)$-arias con repetición, y alineados los elementos de cada una en orden numérico o alfabético, se forman todas las n-arias, agregando a cada una el último de los objetos que en ella figuran, y cada uno de los siguientes, hasta el último de los m objetos dados. La demostración es completamente análoga a la de las combinaciones ordinarias.

Ejemplo: Con los tres objetos a, b, c se pueden formar las siguientes combinaciones binarias con repetición:

$$aa \quad ab \quad ac \quad bb \quad bc \quad cc.$$

las siguientes ternarias:

$aaa \quad aab \quad aac \quad abb \quad abc \quad acc \quad bbb \quad bbc \quad bcc \quad ccc$

y estas cuaternarias:

$aaaa$	$aabb$	$aacc$	$abbb$	$abcc$	$accc$	$bbbb$	$bbcc$	$bccc$	$cccc$
$aaab$	$aabc$		$abbc$			$bbbc$			
$aaac$									

Como se observa en el ejemplo anterior que es muy variable el número de combinaciones n-arias deducidas de cada combinación $(n-1)$-aria, recurrimos a un artificio para hallar la expresión del número $C'_{m,n}$, reduciéndolo al caso de combinaciones sin repetición.

Para establecer una distinción entre las diversas posiciones de un mismo elemento repetido, teniendo en cuenta su puesto en la combinación, incrementaremos el índice de cada elemento en tantas unidades como elementos le preceden en la combinación; es decir: el índice del 1°, 2°, 3°, ..., n° elemento, se aumenta en 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$ unidades. Así, por ejemplo, la combinación $a_2 a_2 a_4 a_5 a_6 a_6 a_6$ la representaremos así: $c_2 c_3 c_6 c_8 c_{10} c_{11} c_{12}$.

Logramos de este modo que los índices resulten todos distintos y crecientes, pues dos elementos consecutivos reciben índices que, por lo menos, difieren en 1.

Cada combinación n-aria de los m elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, repetidos o no, queda así representada por un símbolo, que no es sino una combinación ordinaria de orden n, formada con las letras $c_1, c_2, \ldots, c_{m+n-1}$.

Recíprocamente: toda combinación de orden n formada con estas $m+n-1$ letras, una vez ordenadas por índices crecientes, determina una combinación de los m elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, sin más que rebajar los índices sucesivos en 0, 1, 2, ..., $n-1$ unidades.

Resulta así: el número de combinaciones n-arias con repetición, de m objetos, es igual al número de combinaciones n-arias sin repetición, formadas con $m+n-1$ elementos. Por lo tanto:

$$[11\text{-}17] \qquad C'_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = C_{m+n-1,n}.$$

Otro procedimiento de formar directamente las combinaciones con repetición de un determinado orden sin pasar por las de orden inferior, se explicará al considerar la potencia de un polinomio (§ 12-2).

Ejercicio: Averiguar el número de términos de un polinomio completo de grado n en m variables, $x_1, x_2, \ldots, x_m$, reduciéndolo a homogéneo por introducción de coordenadas homogéneas, x_i/x_0, $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

5. Sustituciones. — Cuando se reemplazan n elementos, $a_1, a_2, \ldots a_n$, por ellos mismos, en otro orden, se dice que se ha efectuado una *sustitución* entre ellos. Esta operación se representa escribiendo en fila aquellos elementos, y encima de cada uno el que deba sustituirlo, encerrando ambas permutaciones entre paréntesis. La permutación inferior, que es la de partida, suele llamarse *denominador*, y *numerador* la superior. Como cada objeto está determinado por su índice, para abreviar, en vez de poner

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_6 & a_1 & a_2 & a_4 \end{pmatrix} \text{ escribiremos } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diremos que dos sustituciones son *iguales*, si cada elemento aparece sustituído por uno mismo en ambas.

Llamando *pares componentes* de la sustitución a los formados por cada elemento con su sustituto, resulta: *se puede alterar de cualquier modo el orden de los pares componentes de una sustitución.*

Cuando un elemento está sustituído por él mismo, es decir, cuando la sustitución lo deja invariable, puede suprimirse este par. Así:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \ldots$$

Obtendremos todas las sustituciones posibles, dejando invariable el denominador y tomando como numeradores todas las permutaciones posibles entre los n elementos. Por lo tanto:

El número de sustituciones distintas entre n elementos es $n!$

Entre ellas figura la que deja invariables todos los elementos; ésta se llama *sustitución idéntica.*

EJEMPLO 1: He aquí todas las sustituciones posibles entre los elementos a, b y c:

$$\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,b\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\,c\,b \\ a\,b\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b\,a\,c \\ a\,b\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b\,c\,a \\ a\,b\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c\,a\,b \\ a\,b\,c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c\,b\,a \\ a\,b\,c \end{pmatrix}.$$

a) *Aplicar* una sustitución S a una permutación P, o *efectuar* en ésta dicha sustitución, es poner, en vez de cada elemento, su correspondiente en el numerador de S. Se obtiene así una nueva permutación P′, y escribiremos: $S(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$.

Si es, por ejemplo:

$$S = \begin{pmatrix} d\,a\,b\,c \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{P} = b\,d\,c\,a, \quad \text{resulta:} \quad S(\mathrm{P}) = a\,c\,b\,d.$$

La misma notación adoptamos si P es un polinomio a cuyas variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se aplica la sustitución S. Si es, por ejemplo,

$$S = \begin{pmatrix} 5\,3\,2\,1\,4 \\ 1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix} \text{ y } \quad \mathrm{P} = b\,d\,c\,a, \quad \text{resulta:} \quad S(\mathrm{P}) = a\,c\,b\,d.$$

b) Dada una sustitución S (multiplicando) y otra sustitución T (multiplicador), aplicada S a cualquier permutación P, produce otra permutación Q; y aplicando a ésta la sustitución T obtenemos una nueva permutación Q′; la sustitución que transforma directamente P en Q′ se llama *producto de S por T*, y se designa por $T\,.\,S$, o simplemente TS (*).

EJEMPLO 2: Siendo

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ resulta } \quad TS = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(*) Algunos autores proceden a la inversa, escribiendo ST, menos de acuerdo con el significado *funcional* u *operativo* de S y T, de igual modo que la raíz cúbica de la raíz cuadrada se escribe $\sqrt[3]{\sqrt{}}$.

Las propiedades de este producto son análogas a las del producto numérico, excepto la propiedad conmutativa. Así:

b_1) El producto tiene la *propiedad uniforme*, es decir: si $S = S'$ y $T = T'$, es $TS = T'S'$.

Por ser $S = S'$, todo elemento a_i está sustituído en ambas por uno mismo, a_j, y éste tiene el mismo sustituto a_h en T y en T'; luego, tanto en TS como en $T'S'$ queda sustituído a_i por a_h.

b_2) También tiene el producto la propiedad *cancelativa*, es decir: si es $TS = T'S$, es necesariamente $T = T'$.

Pues si a_i es un elemento cualquiera, y a_j el que lo sustituye en S, para que sea $TS = T'S$, es preciso que a_j tenga el mismo sustituto en T y en T'; esto vale para los n elementos; luego, $T = T'$.

Análogamente: si es $TS = TS'$, también es $S = S'$.

b_3) También tiene el producto la *propiedad asociativa*, esto es:

[11-18] $$WVU = (WV)U.$$

Pues si U sustituye a_i por a_j, V sustituye a_j por a_h, W sustituye a_h por a_k, entonces el producto W sustituye a_i por a_k; y como U sustituye a_i por a_j, y el producto WVU sustituye a_i por a_k, también el producto $(WV)U$ sustituye a_i por a_k.

Este razonamiento vale para la asociación de cualquier número de factores *consecutivos*.

b_4) El producto de cualquier sustitución S por la sustitución idéntica U, o de ésta por S, es la misma S. Puesto que esta sustitución *idéntica* U es la única que tiene tal propiedad, desempeña el mismo papel que el módulo de la multiplicación de números y se llama también *sustitución unidad*: se conviene en indicarla con 1, escribiendo simbólicamente: $U = \mathbf{1}$.

b_5) No tiene, en cambio, el producto de sustituciones la *propiedad conmutativa*. Así, en el ejemplo 2, son distintos los productos.

$$TS = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad ST = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Habrá de cuidarse, pues, de no alterar el orden de los factores de un producto, ni asociar factores no consecutivos.

Cuando el producto TS tiene la propiedad conmutativa, es decir, cuando es $TS = ST$, se llaman S y T *conmutables*. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vamos a considerar dos casos muy sencillos en que el orden de los factores no altera el producto:

b_6) Cuando los factores son sustituciones sin elementos comunes. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

En efecto, como cada elemento del multiplicando no figura en el multiplicador, éste no modifica las sustituciones indicadas por aquél, ni viceversa. Es decir:

Para multiplicar dos o más sustituciones que no tienen elementos comunes, basta yuxtaponer en cualquier orden los pares de elementos que componen todas ellas. El orden de los factores no altera, por lo tanto, el producto.

b_7) Otro caso notable de sustituciones conmutables es aquel en que las dos sustituciones se componen de los mismos pares de elementos, pero invertidos. Estas sustituciones se llaman *inversas*, y su producto, en cualquier orden, es la sustitución idéntica. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} c & d & e & a & b \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e & a & b & c \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

Suele designarse la inversa de S por el símbolo S^{-1}.

Si uno de los factores es la sustitución unidad o idéntica, el producto es también conmutativo, pues $US = SU = S$.

6. Sustituciones circulares: descomposición en ciclos. — Dados los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$, si cada uno se sustituye por el siguiente, y el último a_k por el primero a_1, la sustitución se llama circular y se designa más brevemente así:

[11-19] $$(a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k) = \begin{pmatrix} a_2 a_3 \ldots a_k & a_1 \\ a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k \end{pmatrix}.$$

Si dividimos una circunferencia en k partes iguales, y en los puntos de división ponemos $a_1, a_2, \ldots, a_k$, la sustitución circular $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ equivale a un giro de amplitud $\frac{2\pi}{k}$; de modo que a_2 cae en a_1, a_3 en $a_2, \ldots, a_1$ en a_k. Por esto se llama *circular* dicha sustitución, y también *ciclo.*

Para hallar el producto $\sigma\sigma$, o sea σ^2, aplicaremos dos veces la sustitución σ, es decir, haremos girar la circunferencia un ángulo doble, obteniendo así:

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_k & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix}.$$

Análogamente, calculamos $\sigma^3, \sigma^4, \ldots, \sigma^{k-1}$; mas, al llegar a σ^k, hemos hecho girar la circunferencia k veces la k-ésima parte de 2π, total: 2π; y por lo tanto, cada punto coincide con su posición primera. Es decir:

[11-20] $$\sigma^k = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{k-1} & a_k \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix} = 1.$$

a) La potencia σ^k de una sustitución circular de k elementos es la unidad, y todas las potencias anteriores son distintas de la sustitución idéntica.

Este número k se llama también *grado* de la sustitución circular. Prosiguiendo el cálculo, tenemos:

$$\sigma^{k+1} = \sigma . \sigma^k = \sigma \quad ; \quad \sigma^{k+2} = \sigma^2 \quad ; \ldots ; \quad \sigma^{2k} = 1 \quad ; \ldots$$

b) Las potencias de una sustitución circular de k elementos forman una sucesión periódica, cuyo período tiene k términos; las únicas que coinciden con la sustitución idéntica son las de exponente múltiplo de k.

EJEMPLO: Las potencias de $\sigma = (a\,b\,c\,d)$, son:

$$\sigma^1 = (a\,b\,c\,d), \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} c\,d\,a\,b \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} d\,a\,b\,c \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}, \quad \sigma^4 = 1.$$

c) Si una sustitución no es circular, se puede descomponer de modo único en producto de sustituciones circulares sin elementos comunes entre sí.

Sea S una sustitución entre n elementos, y llamemos a_1 a uno cualquiera de ellos. Llamemos a_2 al elemento que sustituye a a_1; a_3 al que sustituye a a_2, etcétera; vayamos ordenando los pares que constituyen S, poniendo en primer término los así obtenidos:

$$S = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Siendo finito el conjunto de elementos con que opera S, debe llegarse, siguiendo así, a un elemento a_m del denominador, cuyo homólogo a_{m+1} en el numerador coincida con uno de los elementos anteriores: $a_1, a_2, a_3,$

... a_α; y no pudiendo ser ninguno de los $a_2, a_3, \ldots, a_\alpha$, ya separados, debe ser $a_{\alpha+1}$ el mismo a_1.

Si no queda en S ningún par restante (es decir: si $\alpha = n$), la sustitución S es el ciclo $(a_1 a_2 a_3 \ldots a_\alpha)$. En caso contrario, separados ya estos α pares, en los restantes no figura ninguno de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$; partiendo de uno cualquiera b_1 de tales objetos restantes, procederemos análogamente, hasta llegar al mismo elemento de partida b_1: si todavía quedan elementos restantes, iniciaremos un nuevo ciclo, partiendo de uno de ellos c_1; etc. Hemos clasificado así los pares que componen S, en la forma siguiente:

[11-21] $$S = \begin{pmatrix} a_2 a_3 a_4 \ldots a_1 \; b_2 b_3 \ldots b_1 \; \ldots l_2 l_3 \ldots l_1 \\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_\alpha \; b_1 b_2 \ldots b_\beta \; \ldots l_1 l_2 \ldots l_\lambda \end{pmatrix}$$

y como los pares de cada uno de estos grupos son independientes, esta sustitución es el producto (§ 11-5, b_6) de las sustituciones parciales circulares:

[11-22] $$S = (a_1 a_2 \ldots a_\alpha)(b_1 b_2 \ldots b_\beta) \ldots (l_1 l_2 \ldots l_\lambda).$$

d) Los ciclos que constan de dos elementos se llaman *trasposiciones*, porque la operación que representan consiste en invertir dos objetos:

Todo ciclo se descompone en producto de trasposiciones entre el primer elemento y cada uno de los demás.

Para comprobar esto, basta efectuar el producto:

[11-23] $$(a\, b\, c\, d\, e\, f \ldots g) = (a\, g) \ldots (a\, d)(a\, c)(a\, b).$$

e) Descompuesta la sustitución S en ciclos, y éstos en trasposiciones, queda descompuesta S en trasposiciones. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = (487)(25)(136) = (47)(48)(25)(16)(13).$$

Esta descomposición no es única; por ejemplo, podemos sustituir el factor (48) por su igual (14)(18)(14), y entonces obtendremos 7 trasposiciones; o en vez de (16)(13) podemos poner (31)(36), etcétera. Pero de cualquier modo que se efectúe la descomposición, el número de trasposiciones es siempre par o siempre impar, como demuestra este teorema:

f) *El número de trasposiciones en que se descompone una sustitución es par o impar, según que las dos permutaciones numerador y denominador sean de la misma o distinta clase.*

En efecto, el numerador resulta de aplicar al denominador la sustitución S, o sea, de aplicarle sucesivamente las trasposiciones que componen ésta; cada una produce un cambio de clase (§ 11-2, b_1); luego, la permutación final es de la misma o de distinta clase que la inicial, según sea par o impar dicho número; y recíprocamente.

DEF.: Una sustitución cuyas dos permutaciones son de la misma (distinta) clase, y que por lo tanto se descompone siempre en un número par (impar) de trasposiciones de cualquier modo que se efectúe esta descomposición, se llama sustitución *par* (*impar*).

g) Fijada para todas las $n!$ sustituciones, como denominador, la permutación natural, entre las $n!$ permutaciones que figuran como numeradores, la mitad son pares y la mitad impares. Luego:

Entre las $n!$ sustituciones entre n elementos, la mitad son pares y la mitad impares.

Ejercicios

1. Calcular: $V_{10;4}$, $V_{6;3}$, $V_{5;2}$; $V'_{4;3}$, $V'_{3;5}$, $V'_{5;5}$; P_8; $P_{10}^{3;5;2}$; $C_{8;5}$, $C_{6;3}$, $C_{9;7}$; $C'_{4;6}$, $C'_{5;8}$, $C'_{7;4}$.

2. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 10 libros en un estante, si 4 deben ocupar los mismos lugares, aun cuando estos 4 puedan intercambiarse entre sí?

3. ¿Cuántos caracteres se pueden formar con los puntos y rayas del alfabeto Morse, si en cada uno entran hasta 4 de tales elementos?

4. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila 6 hombres, no pudiendo uno determinado estar nunca a la cabeza?

5. Demostrar que la suma de los números representados por todas las permutaciones de las cifras 1, 2, 3, 4 y 5 es 3 999 960. Generalización.

6. Calcular de cuántas maneras se pueden disponer n (> 2) personas alrededor de una mesa redonda, considerando sólo la contigüidad y no el lugar ocupado por cada una.

7. ¿Cuántas palabras se pueden formar con n vocales y n consonantes distintas, de modo que no haya dos vocales juntas, ni dos consonantes juntas? ¿Cuántas si hay vocales y consonantes repetidas?

8. Hallar el número de términos del polinomio completo de 5º grado en las variables x, y, z, t, tanto si es homogéneo como si no lo es.

9. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 15 soldados de un piquete si se los separa en tres grupos de 3, 5 y 7 hombres?

10. ¿De cuántas maneras se pueden alinear p signos $+$ y n signos $-$, de modo que no haya dos signos $-$ consecutivos?

11. En un plano hay 12 puntos, no habiendo 3 en línea recta, excepto 5 que lo están. Calcular: 1º) Cuántas rectas determinan; 2º) Cuántos triángulos se pueden formar; 3º) Cuál es el número máximo de puntos en que aquellas rectas se cortan.

12. ¿Cuántos grupos de 4 personas pueden formarse con 5 niños y 7 niñas, debiendo haber por lo menos un niño en cada grupo?

13. Deducir las fórmulas

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k}$$

y aplicarlas al cálculo de:

$$\sum_1^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{y de} \quad \sum_1^n r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

14. Dadas las sustituciones $S = \begin{pmatrix} 374165298 \\ 123456789 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 451372698 \\ 123456789 \end{pmatrix}$ mostrar que son conmutables, descomponerlas en ciclos y trasposiciones, y determinar la paridad de cada una. Hallar el orden (nota I) de cada una y escribir las potencias sucesivas de S, comprobando que $S^{g-1} = S^{-1}$.

15. Dadas las sustituciones $R = (374)(1256)$; $S = (263)(51)$ y $T = (137)(246)$, formar la inversa del producto TSR sin efectuar éste, y verificar el resultado efectuando el producto.

§ 12. Potencias de binomios y polinomios

1. **Potencia de un binomio.**—Escribamos la potencia $(a+b)^m$ en la forma:

$$(a+b)\ (a+b)\ (a+b)\ \overset{m}{\ldots}\ (a+b)$$

y formemos, para aplicar la regla del producto de varias sumas (§ 4-9, a_1), todos los productos de un término del primer paréntesis por uno del segundo, etc. El producto $a^{m-n}\,b^n$ aparecerá tantas veces como grupos de n paréntesis (donde se toma el término b) se puedan formar con los m, es decir, $C_{m,n} = \binom{m}{n}$ veces. El producto a^m aparece una sola vez, y lo mismo el b^m, pues $\binom{m}{m} = 1$. Por tanto:

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1}\,b + \binom{m}{2} a^{m-2}\,b^2 + \ldots +$$

[12-1] $$+ \binom{m}{n} a^{m-n}\,b^n + \ldots + \binom{m}{m-1} a\,b^{m-1} + b^m$$

fórmula fundamental, impropiamente llamada del *binomio de* NEWTON *.

He aquí algunas observaciones que facilitan el cálculo:

1ª Una vez formado uno de los coeficientes,

[12-2] $$\binom{m}{n} = \frac{m\,(m-1)\,\ldots\,(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots n},$$

obsérvese que el siguiente es:

$$\binom{m}{n+1} = \frac{m\,(m-1)\,\ldots\,(m-n+1)\,(m-n)}{1\,.\,2\ldots n\,(n+1)}$$

luego, *basta multiplicar el anterior por* $m-n$ (*que es el exponente de a en dicho término anterior*), *y dividirlo por* $(n+1)$, *que es el exponente de b aumentado en* 1.

EJEMPLO: Se calculan los coeficientes de $(x+a)^6$ de este modo:

$$1,\ 6,\ \frac{6.5}{2} = 15,\ \frac{15.4}{3} = 20,\ \frac{20.3}{4} = 15,\ \frac{15.2}{5} = 6,\ \frac{6.1}{6} = 1.$$

2ª Por ser $\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1}$, $\binom{m}{2} = \binom{m}{m-2}$, ...; y, en general,

[12-3] $$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n},$$

resulta que los *coeficientes equidistantes de los extremos son iguales*, y por lo tanto, basta calcular la mitad de ellos si el exponente m es impar, o la mitad por exceso, si m es par.

---

* En realidad, era ya conocida por TARTAGLIA, matemático italiano del siglo XVI. NEWTON la generalizó un siglo después, para exponentes no enteros (§ 45-5).

La fórmula puede, pues, escribirse así:

[12-4] $$(a+b)^m =$$
$$a^m + \binom{m}{1} a^{m-1}b + \binom{m}{2} a^{m-2}b^2 + \ldots + \binom{m}{2} a^2b^{m-2} + \binom{m}{1} ab^{m-1} + b^m.$$

ESCOLIO: Para el cálculo de las primeras potencias de un binomio, es muy práctico formar el triángulo de TARTAGLIA, mediante sencillas adiciones sucesivas. Los números de la 1ª, 2ª, 3ª, ..., m-sima fila, son los coeficientes de las potencias 1ª, 2ª, 3ª, ..., m-sima.

2. **Potencia de un polinomio.** — La aplicación más importante de las permutaciones con repetición es el desarrollo de la potencia de un polinomio cualquiera de n términos:

$$(a + b + c + \overset{n}{\ldots} + l)^m.$$

Para aplicar la regla del producto de sumas, escribiremos los diversos factores:

$$\begin{array}{l} 1)\ a + b + c + \overset{n}{\ldots} + l \\ 2)\ a + b + c + \ldots + l \\ 3)\ a + b + c + \ldots + l \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m)\ a + b + c + \ldots + l \end{array}$$

y formaremos todos los productos posibles de un factor de la primera línea, por uno de la segunda, ..., por uno de la m-sima. En general, habrá factores repetidos en cada producto, es decir, éste será de la forma:

[12-5] $$a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma\, \ldots\, l^\lambda,$$

siendo nulos los exponentes de aquellas letras que no entren en el producto; mas, siendo m el número total de factores, cumplen la condición:

[12-6] $$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = m.$$

Recíprocamente, cualquier producto del tipo [12-5], con la condición [12-6] (o sea con m factores), puede obtenerse multiplicando un término de cada fila, y por lo tanto, pertenece al producto.

El problema se reduce así a estos dos:

1º Averiguar cuántas veces aparece repetido cada uno de estos términos, es decir, calcular su coeficiente.

2º Formar todos los términos posibles de la forma [12-5], con la condición [12-6].

Cálculo de los coeficientes. — Escribamos el producto [12-5], poniendo sucesivamente: el factor que se toma de la primera fila, el que se toma de la segunda, ..., el tomado de la fila m-sima (por ejemplo, si es $m = 8$, $n = 4$, escribiremos $b\,a\,a\,c\,b\,a\,d\,b$, $d\,a\,c\,b\,b\,a\,b\,a$, ...). Tenemos así diversas permutaciones de los siguientes objetos:

$$\overset{\alpha}{a, a, \ldots, a}, \overset{\beta}{b, b, \ldots, b}, \ldots, \overset{\lambda}{l, l, \ldots l},$$

cada una de las cuales da un término del desarrollo; pero todos los así obtenidos, por la propiedad conmutativa de la multiplicación, son iguales. El coeficiente del término es, por lo tanto, el número de dichas permutaciones, o sea:

[12-7] $$\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots\,\lambda!}.$$

Cálculo de los términos. — Formar todos los términos de la forma $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma\, \ldots\, l^\lambda$ que cumplan la condición [12-6], equivale a obtener todas las descomposiciones posibles del número m en n sumandos. Esto se logra fácilmente, tomando como primer sumando el número m, luego el $m-1$, el $m-2$, ..., el $m-k$, y descomponiendo a su vez el complemento k de todos los modos posibles, comenzando siempre por el sumando máximo.

Sea, por ejemplo, $m = 5$, $n = 4$. He aquí todas las descomposiciones de 5 en cuatro sumandos:

[12-8]
$$\begin{array}{c} 5+0+0+0 \\ 4+1+0+0 \\ 3+2+0+0 \\ 3+1+1+0 \\ 2+2+1+0 \\ 2+1+1+1 \end{array}$$

En cada una de ellas podemos, naturalmente, permutar sus sumandos, obteniéndose varias descomposiciones; por ejemplo:

$$3+2+0+0 = 2+3+0+0 = 2+0+3+0 = \ldots$$

Es indiferente conservar fijas las letras a, b, c y d, permutando los exponentes, o conservar éstos fijos, permutando las bases. Así, por ejemplo, la tercera descomposición [12-8], da los términos:

$$a^3\, b^2,\ a^3\, c^2,\ a^3\, d^2,\ b^3\, a^2,\ b^3\, c^2,\ b^3\, d^2$$
$$c^3\, a^2,\ c^3\, b^2,\ c^3\, d^2,\ d^3\, a^2,\ d^3\, b^2,\ d^3\, c^2.$$

Entendiendo que de este modo ha de interpretarse, en este caso, el símbolo Σ, resulta, pues, la *fórmula de* LEIBNIZ:

[12-9]
$$(a + b + c + \overset{n}{\ldots} + l)^m = \Sigma \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots\,\lambda!} a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma\, \ldots\, l^\lambda,$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, reciben todos los sistemas posibles de enteros no negativos en que se puede descomponer el número m.

NOTAS: 1. El número de términos de la forma [12-5] que cumplan la condición [12-6] es precisamente el número de combinaciones con repetición de orden m entre n objetos y viene dado, según [11-17], por

$$\binom{n + m - 1}{m}.$$

2. Como todos los términos obtenidos con una misma descomposición

sumatoria $m = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda$, tienen el mismo coeficiente [12-7], y se hallan todos permutando las letras que sirven de bases a los exponentes fijos α, β, γ, $\ldots$, λ, se suelen agrupar, sacando dicho coeficiente factor común.

EJEMPLO: Desarrollar $(a + b + c + d)^5$.

En [12-8] tenemos todas las descomposiciones de 5 en cuatro sumandos, es decir, todos los sistemas de exponentes. Agrupando los términos correspondientes a una misma descomposición, tenemos el desarrollo:

$$(a+b+c+d)^5 = \frac{5!}{5!\,0!\,0!\,0!}\ \Sigma\ a^5 + \frac{5!}{4!\,1!\,0!\,0!}\ \Sigma\ a^4 b + \frac{5!}{3!\,2!\,0!\,0!}\ \Sigma\ a^3 b^2 +$$

$$+ \frac{5!}{3!\,1!\,1!\,0!}\ \Sigma\ a^3 bc + \frac{5!}{2!\,2!\,1!\,0!}\ \Sigma\ a^2 b^2 c + \frac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!}\ \Sigma\ a^2\, b\, c\, d\ ,$$

donde las sumas se extienden a todos los términos semejantes, según se ha dicho en nota 2 y se ha explicado en detalle al aplicar [12-8] a los términos semejantes al $a^3 b^2$.

Calculando estos coeficientes, y desarrollando todos los términos contenidos en cada suma parcial, resulta en definitiva:

$$(a+b+c+d)^5 = a^5 + b^5 + c^5 + d^5 +$$
$$+ 5\,(a^4b + a^4c + a^4d + b^4a + b^4c + b^4d + c^4a + c^4b + c^4d + d^4a + d^4b + d^4c) +$$
$$+ 10\,(a^3b^2 + a^3c^2 + a^3d^2 + b^3a^2 + b^3c^2 + b^3d^2 + c^3a^2 + c^3b^2 + c^3d^2 + d^3a^2 + d^3b^2 + d^3c^2) +$$
$$+ 20\,(a^3bc + a^3bd + a^3cd + b^3ac + b^3ad + b^3cd + c^3ab + c^3ad + c^3bd + d^3ab +$$
$$+ d^3ac + d^3bc) + 30\,(a^2b^2c + a^2c^2b + a^2b^2d + a^2d^2b + a^2c^2d + a^2d^2c + b^2c^2a + b^2c^2d +$$
$$+ b^2d^2a + b^2d^2c + c^2d^2a + c^2d^2b) + 60\,(a^2bcd + b^2acd + c^2abd + d^2abc).$$

Comprobación: haciendo $a = b = c = d = 1$, en ambos miembros resulta 1024. El número de términos del desarrollo es 56, igual al de combinaciones con repetición de orden 5 entre 4 objetos.

EJERCICIOS

1. Desarrollar $(a + b)^7$, $(a - b)^6$, $(a + 3b)^5$, $(2a - b)^4$, $\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{5}b\right)^4$.

2. Calcular: 1º) $(2 + \sqrt{3})^6 + (2 - \sqrt{3})^6$; 2º) $(2 + 3i)^7 - (2 - 3i)^7$

3. Hallar: 1º) El 5º término de $(ax + 5y^2)^9$; 2º) El coeficiente de x^{18} en el desarrollo de $(3x^6 - 18x^4 + 27x^2)^4$.

4. Desarrollar $(a + b + c + d)^7$.

5. Dar las fórmulas que expresan los desarrollos de $(\Sigma\, a_i)^2$, $(\Sigma\, a_i)^3$ $(\Sigma\, a_i)^4$, $(\Sigma\, a_i)^5$.

6. Calcular: 1º) $\sum_{r=0}^{8} \binom{9}{r}\binom{12}{8-r}$, igualando los coeficientes de x^8 en $(1+x)^9\,(1+x)^{12} = (1+x)^{21}$; 2º) $\sum_{r=0}^{8} (-1)^r \binom{11}{r}\binom{11}{8-r}$ igualando los coeficientes de x^8 en $(1+x)^{11}\,(1-x)^{11} = (1-x^2)^{11}$.

7. Demostrar las fórmulas:

$$1º)\quad \Sigma\ \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} = n^m,\ \left(\underbrace{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}_{n} = m\right)$$

$$2º)\quad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n;\quad 3º)\ \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1};$$

$$4º)\quad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2};$$

5º) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots = \sqrt{2^n} \cos \frac{n\pi}{4}$;

6º) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots = \sqrt{2^n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$.

8. Partiendo de $z = \cos x + i \operatorname{sen} x$; $z + (1/z) = 2 \cos x$; $z - (1/z) = 2i \operatorname{sen} x$, obtener las fórmulas que expresan: 1º) $\cos^m x$ en función de los cosenos de los múltiplos de x; 2º) $\operatorname{sen}^m x$ en función de los cosenos o senos de los múltiplos de x. (Cfr. ejercicio 6 de § 45).

§ 13. DETERMINANTES

1. **Origen de la teoría de los determinantes.** — *a*) Consideremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,

[13-1] $$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'\,x + b'\,y = c', \end{cases}$$

en que las ecuaciones son de primer grado en las variables, es decir, *lineales*. Este nombre (que se conserva para distinto número de variables) se debe a que si x e y son las coordenadas cartesianas de un punto del plano, las ecuaciones representan rectas, r_1 y r_2.

Una *solución* del sistema es *un par* (x_0, y_0) de números tales que reemplazando x e y por ellos se satisfacen a la vez ambas ecuaciones. Geométricamente, esto ocurre cuando, y sólo cuando, el punto $P(x_0, y_0)$ pertenece a la vez a las rectas r_1 y r_2, y entonces pueden presentarse tres casos

1º) *Las rectas se cortan*; entonces el sistema admite *una solución, y sólo una,* es decir, determina los valores de las incógnitas, por cuya razón se llama *determinado.*

2º) *Las rectas son paralelas*; no hay ningún punto (propio) común, es decir, el sistema no admite soluciones y se llama *incompatible.* Lo es, evidentemente, el formado por las ecuaciones: $x + y = 0$; $x + y = 1$.

3º) *Las rectas coinciden*: $r_1 \equiv r_2$; hay infinitos puntos comunes, el sistema tiene *infinitas soluciones* y se llama *indeterminado.* Entonces, las dos ecuaciones [13-1] se llaman *equivalentes*, porque ambas quedan satisfechas por los infinitos pares (x, y) que verifican una de ellas.

EJEMPLO: Las rectas del sistema

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 4x - 2y = -2 \end{cases}$$

coinciden, pues multiplicando la primera ecuación por -2 se obtiene la segunda. Entonces, la segunda ecuación no da nada nuevo con respecto a la primera, y las soluciones del sistema son las de la ecuación única

$$-2x + y = 1,$$

que admite infinitas soluciones, pues se puede escribir:

$$y = 2x + 1,$$

y para cualquier x hay un y que forma con él una solución:

para $x=0$	$y=2.0+1=1$	una solución:	$x=0$, $y=1$
para $x=1$	$y=2.1+1=3$	otra soluc.:	$x=1$, $y=3$
para $x=-2$	$y=2.(-2)+1=-3$	otra soluc.:	$x=-2$, $y=-3$, etc.

Todas estas soluciones pueden verificarse en el sistema.

EJERCICIO 1: Probar que el sistema [13-1] es *indeterminado* si, y sólo si, los coeficientes a, b, c son proporcionales a los coeficientes a', b', c'; e incompatible si, y sólo si, $a:a' = b:b'$, sin que esta proporcionalidad se mantenga para c y c'.

b) Para resolver el sistema [13-1], en el caso en que sea determinado, se trata de obtener una ecuación de primer grado *con una sola incógnita*, llamada *eliminante* por haber eliminado la otra incógnita, y tal que su solución sea una de las componentes del par solución de [13-1]. Calculada esta incógnita, su valor se reemplaza en una de las ecuaciones del sistema, obteniéndose una ecuación *en la otra incógnita solamente*. Si una de las incógnitas no figura en ambas ecuaciones, una de éstas es ya la eliminante. En caso contrario, la eliminante puede hallarse de varias maneras:

1º) *Por sustitución*: Despejando una de las incógnitas, por ejemplo x de una de las ecuaciones, y reemplazando la x de la otra ecuación por la expresión obtenida. Se llega así a una ecuación en la sola incógnita y.

2º) *Por igualación*: Se despeja una misma incógnita de ambas ecuaciones. Igualando las expresiones obtenidas se llega a una ecuación en la otra incógnita solamente.

3º) *Por reducción*: Para eliminar una incógnita, por ejemplo y, cada ecuación se multiplica por su coeficiente en la otra. y luego se resta. Se tiene así, sucesivamente,

$$\begin{cases} a\,b'\,x + b\,b'\,y = c\,b' \\ a'\,b\,x + b'\,b\,y = c'\,b, \end{cases}$$

y restando:

$$(a\,b' - a'b)\,x = c\,b' - c'\,b.$$

De aquí se obtiene la siguiente expresión de x, que junto con la análoga de y, dan la solución del sistema:

$$x = \frac{c\,b' - c'\,b}{a\,b' - a'\,b}, \qquad y = \frac{a\,c' - a'\,c}{a\,b' - a'\,b}.$$

Estas expresiones se recuerdan muy fácilmente si se observa que el denominador es el mismo, y que los numeradores se obtienen reemplazando los coeficientes de la incógnita respectiva por los términos independientes.

En el proceso de eliminar una de las incógnitas, por ejemplo y, puede ocurrir que se llegue a una eliminante en x verificada para *cualquier* valor de x (es decir, a una *identidad*, cfr. § 16-1); en dicho caso, y sólo entonces, el sistema es indeterminado. O bien puede ocurrir que en la eliminante se anule

el coeficiente de x, sin que se anule el término independiente; entonces, y sólo entonces, el sistema es incompatible (cfr. ejercicio 1).

EJERCICIO 2: Resolver los sistemas

$$\begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 2y = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 4x - 2y = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 1, \end{cases}$$

hallando una eliminante por cada uno de los métodos indicados.

c) Si se pasa al análisis de la resolución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, equivalente geométricamente a buscar la intersección de tres planos en el espacio euclidiano, el proceso se complica ya algo, pero las dificultades acrecen rápidamente al tratar de resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas cuando *n es grande.*

Sea el sistema

$$[13\text{-}2] \qquad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = k_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = k_n, \end{cases}$$

donde los coeficientes a y k se consideran dados. El doble índice, i, j, de un coeficiente a_{ij}, sirve para designar: mediante el primer índice, i, que el coeficiente pertenece a la ecuación i-ésima, y mediante el segundo índice, j, que el coeficiente afecta a la incógnita j-ésima: x_j.

La natural generalización del método de sustitución antes recordado consistirá en expresar x_1 mediante las $x_2, \ldots, x_n$, despejándola en una de las ecuaciones en que efectivamente figure, y en sustituir esta expresión de x_1 en las restantes $n-1$ ecuaciones, para transformarlas en un sistema de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas, $x_2, \ldots, x_n$. Reiterando el procedimiento, se llegará a una sola ecuación lineal con una sola incógnita x_n, a menos que se tropiece antes con un sistema incompatible o indeterminado. Si puede llegarse a despejar x_n mediante los coeficientes del sistema, se seguiría el proceso inverso, para ir hallando $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$, mediante dichos coeficientes (cfr. § 15-3, *c*).

Sin embargo, este proceso, conceptualmente sencillo, se complica enormemente en la práctica, pues, como veremos (§ 15-4), cada incógnita se expresa finalmente mediante el cociente de dos polinomios en los coeficientes del sistema, cada uno de los cuales tiene $n!$ términos, es decir: ya para $n = 6$, cada polinomio tiene 720 términos.

Por otra parte, sería muy difícil la discusión de los casos en los que al aplicar el método de sustitución debería tropezarse con sistemas incompatibles o indeterminados.

Esto justifica la introducción de un nuevo algoritmo (o conjunto de operaciones) que permita concentrar simbólica-

mente la resolución expuesta, y del que también pueda deducirse el respectivo cálculo numérico.

La teoría de los determinantes ha tomado origen en el problema expuesto, por obra de LEIBNIZ (1678, en Europa), y SEKI KOWA (1683, en Japón), pero su importancia es hoy día mucho mayor, por constituir un instrumento conciso y potente muy usado en la Matemática pura y aplicada.

2. **Determinantes de segundo y tercer orden.** — Dado un cuadro de n^2 números, distribuídos en n *filas* y en n *columnas*, designaremos todos ellos por una misma letra a con dos índices: el número de orden de la *fila*, contando de arriba abajo; y el que indica la *columna*, contando de izquierda a derecha. Por ejemplo: el elemento situado en la fila tercera y en la columna segunda se designará así: a_{32}. Adoptando esta notación los números del cuadro están representados así:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \qquad [13\text{-}3]$$

Este cuadro, formado por los n^2 números dados, se llama *matriz cuadrada de orden n*, y los números que la forman se llaman sus *elementos*. La palabra *línea* designará, indistintamente, una *fila* o una *columna*.

Los elementos de la matriz que tienen índices iguales, esto es: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, forman la llamada *diagonal principal*.

ESCOLIO: A veces es más cómodo designar con letras distintas los elementos de las diversas filas, poniendo índices para designar las columnas, o inversamente; por ejemplo:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{matrix}$$

Otros autores utilizan dos índices, uno inferior y otro superior, etc.

Dada una matriz cuadrada de segundo orden, si escribimos ésta entre dos barras verticales, convendremos representa al *polinomio*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}, \qquad [13\text{-}4]$$

llamado *determinante de segundo orden*. Observemos que cada término consta de un producto de dos factores, tomados de manera que haya uno de cada fila y uno de cada columna. Si ordenamos dichos factores de acuerdo con las filas, de manera que los primeros índices formen la permutación principal 1, 2 (§ 11-2, *b*), obtendremos todos los productos posibles, formando con los segundos índices las permutaciones 1,2 y 2,1. El primer término, al que se le ha asignado algebraicamente el

signo +, corresponde a la permutación 1,2, de la *misma* clase (par) que la principal, mientras que al segundo término, al que se le ha asignado algebraicamente el signo —, corresponde a la permutacinó 2,1, de *distinta* sclase (impar) que la principal. Claro está que el signo definitivo de cada término del polinomio [13-]) depende también del valor numérico de los elementos a_{ij} del determinante.

EJEMPLOS: 1.

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & -3 \\ -1 & -\frac{5}{4} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) - (-1)\cdot(-3) = -\tfrac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$$

2. $$\begin{vmatrix} i & 1 \\ 6 & -i \end{vmatrix} = i\,.\,(-i) - 1.6 = +1 - 6 = -5.$$

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 - 2.3 = -6.$$

Considerando ahora una matriz cuadrada de tercer orden, si escribimos ésta entre dos barras verticales, convendremos representa al *polinomio*, llamado *determinante de tercer orden*:

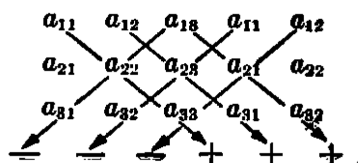
$$[13\text{-}5] \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma\,(-1)^{\nu}\, a_{1i_1}\, a_{2i_2}\, a_{3i_3} =$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} -$$

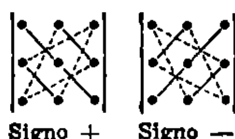
$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33},$$

donde cada término consta de un producto de tres factores, tomados de manera que haya uno de cada fila y uno de cada columna; si ordenamos dichos factores de acuerdo con las filas, de manera que los primeros índices formen la permutación principal 1, 2, 3, obtendremos todos los productos posibles, formando con los segundos índices, $i_1\, i_2\, i_3$, las 3! permutaciones de tercer orden, y entonces se asigna algebraicamente a cada término el signo $(-1)^{\nu}$, en que ν es el número de inversiones de la correspondiente permutación de segundos índices $i_1\, i_2\, i_3$ (§ 11-2, *b*), para que si ésta es de la *misma* clase (par) que la principal, el término lleve algebraicamente el signo +, mientras que si $i_1\, i_2\, i_3$ es de *distinta* clase (impar) que la principal, el término correspondiente lleve *algebraicamente* el signo — (v. gr., término $-a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$ de *signo contrario* al del producto $a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$). Por lo tanto, los tres primeros términos del último miembro de [13-5] llevan el signo +, y los tres últimos el —, por ser de clase par las permutaciones 123, 231, 312, y de clase impar las 321, 132, 213.

Para obtener rápidamente el desarrollo [13-5], se aplica la siguiente regla práctica de SARRUS (1831), válida solamente para determinantes de tercer orden. Agregadas a la derecha de la matriz dada de tercer orden sus dos primeras columnas, para formar el cuadro rectangular:



los términos algebraicamente positivos del desarrollo son los productos de los elementos que se encuentran sobre la diagonal principal y sobre cada paralela a ella; los términos algebraicamente negativos resultan del producto de los elementos que se encuentran sobre la otra diagonal del determinante, llamada *secundaria*, y sobre cada paralela a ella. Con un poco de práctica puede prescindirse de formar el cuadro anterior y considerar sólo los esquemas:



Signo + Signo —

EJEMPLO 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-1).(-½).2 + 2.(-3).¾ + 0.\left(-\frac{2}{5}\right).4 -$$

$$\frac{4}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right).4 - (-1)\left(-\frac{2}{5}\right).(-3) - 0.2.2 = 1 - \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{5} = -\frac{4}{5}.$$

3. **Determinantes de orden cualquiera: sus propiedades.** — Generalicemos para un orden n cualquiera las definiciones que hemos dado de determinante de segundo y tercer orden. Tomemos n elementos de la matriz [13-3], de tal modo que entre ellos no haya dos de una misma fila ni dos de una misma columna, y formemos su producto. Por ejemplo, si es $n = 5$, uno de estos productos será:

[13-6] $$a_{24} \,.\, a_{33} \,.\, a_{45} \,.\, a_{12} \,.\, a_{51}.$$

Como entre estos n elementos no hay dos de una misma fila, habrá necesariamente uno de cada fila, es decir, los primeros índices forman una permutación de los números 1, 2, 3, ..., n; y análogamente, los segundos índices forman otra permutación de estos mismos números. En el ejemplo anterior,

estas permutaciones de primeros y segundos índices, que representan las filas y las columnas elegidas, son, respectivamente, 23415 y 43521.

DEFINICIÓN: *Formados todos los productos posibles de n elementos elegidos entre los n^2 de la matriz dada, de modo que en cada producto haya un factor de cada fila y uno de cada columna, y anteponiendo a cada producto el signo + ó el —, según que las permutaciones que indican las filas y las columnas sean de la misma o distinta clase, el polinomio que tiene como términos todos los productos así formados, con sus signos correspondientes, se llama* determinante *de la matriz dada.*

Se representa escribiendo ésta entre dos barras verticales.

a) El signo que corresponde a cada término del determinante no depende del orden de sus factores. En efecto, al trasponer dos factores cualesquiera, las permutaciones que indican las filas y las columnas cambian de clase (§ 11-2, b_1); luego, si eran de la misma clase, siguen siéndolo después de cualquier permutación; y si eran de distinta clase, lo mismo acontecerá después.

Por comodidad ordenaremos *por filas* los elementos de cada término, es decir, escribiremos sucesivamente: el elemento que pertenece a la primera, el de la segunda, ..., el de la n-sima. Esta ordenación tiene la ventaja de que siendo 1 2 3 ... n la primera permutación, y por lo tanto de clase *par*, basta atender a la segunda para saber el signo correspondiente.

EJEMPLO 1: El producto [13-6], ordenado por filas, nos da el término

$$- a_{12}\, a_{24}\, a_{33}\, a_{45}\, a_{51},$$

siendo — su signo correspondiente, puesto que la permutación 2 4 3 5 1 es de clase *impar*.

b) Dos términos se consideran como distintos cuando en uno hay por lo menos un elemento que no figura en el otro; por lo tanto, ordenando en filas sus elementos obtendremos todos los términos posibles, tomando para los segundos índices todas las $n!$ permutaciones; luego:

El número de términos de un determinante de orden n es n!; la mitad de ellos tienen el signo "de desarrollo" + y la otra mitad el signo —.

Al término $a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$ *(llamado principal) corresponde siempre el signo "de desarrollo" +.*

ESCOLIO: Cuando entre los elementos de la matriz haya números negativos, el signo de cada término puede modificarse al sustituir cada elemento por su valor, y por lo tanto, en el desarrollo numérico no habrá, en general, el mismo número de términos positivos que negativos; y si hay elementos nulos, el número de términos será inferior a $n!$

c) **Para un determinante de 4º, 5º, 6º, ..., orden (que contiene, respectivamente, 24, 120, 720, ..., términos), el cálcu-**

lo de su valor numérico, por aplicación directa de la definición de determinante, resulta demasiado laborioso. Por eso es oportuno estudiar las propiedades del algoritmo que representa en forma concisa un determinante, para llegar también a su rápida evaluación, mediante reglas más simples que la obtenida por aplicación inmediata de la definición.

Dos elementos, a_{ji}, a_{ij}, simétricos respecto de la diagonal principal, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$, se llaman *conjugados*. Los elementos de ésta son conjugados de sí mismos.

c_1) *El valor de un determinante no varía si se sustituye cada elemento por su conjugado, es decir, si se cambian las filas por columnas, y éstas por aquéllas, sin alterar el orden relativo de los elementos de cada una.*

En efecto, todo término del primer determinante está formado por n elementos, uno de cada fila y uno de cada columna; luego, pertenece también al segundo determinante. Las dos permutaciones que indican filas (columnas) en el segundo determinante, son las mismas que indican columnas (filas) en el primero; luego, el signo de dicho término en ambos determinantes es $+$ ó $-$, según que ambas permutaciones sean de la misma o distinta clase.

c_2) *Si se cambian entre sí dos filas (o dos columnas) sin alterar el orden relativo de los elementos de cada una, el valor absoluto del determinante no varía, pero cambia su signo.*

Supongamos que se trasponen la columna del lugar h, y la del lugar k; el teorema expresa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1h} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2h} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nh} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1h} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2\cdot} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2h} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nh} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En efecto, un término cualquiera, $a_{1f}\, a_{2g} \ldots a_{nl}$, del primero tiene un elemento de cada fila, y uno de cada columna de la segunda matriz; luego, pertenece también al segundo determinante. El signo de este término en el primer determinante es $+$ ó $-$, según que sea par o impar la permutación de los segundos índices, la cual, poniendo de manifiesto los índices h y k que en ella figuran, puede escribirse así: A h C k B. Mas los elementos que estaban en las columnas h y k están ahora en las columnas k y h, respectivamente; luego, la permutación formada por los números que indican las columnas a que pertenecen aquellos elementos en el segundo determinante es: A k C h B, la cual (§ 11-2, b) es de clase opuesta a la anterior; luego, el signo de aquel término en el segundo determinante es contrario al que tiene en el primero.

Componiéndose el segundo determinante de los mismos términos del primero, cambiados de signo, ambos tienen el mismo valor absoluto, pero signos contrarios.

COROLARIO: *Un determinante* Δ *que tiene dos filas o dos columnas idénticas es nulo.* Porque si invertimos estas dos filas o columnas resulta $-\Delta$ como valor del nuevo determinante; mas siendo idénticas dichas dos líneas, el nuevo determi-

nante es idéntico al anterior; luego, $\Delta = -\Delta$, o sea $2\Delta = 0$, y por lo tanto, $\Delta = 0$.

c_3) *Si se multiplican todos los elementos de una línea por un mismo número* λ, *el valor del determinante queda multiplicado por* λ.

En efecto, en cada término del desarrollo figura un elemento, y sólo uno, de la línea de que se trata; luego, si se multiplican dichos elementos por λ, todos los términos del desarrollo quedan multiplicados por λ, y también, por lo tanto, la suma total.

Esta propiedad permite separar como factor del determinante un factor común a todos los elementos de una línea cualquiera, simplificando ésta así:

$$\begin{vmatrix} 24 & -3 & 0 \\ 16 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 8.5 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8.5.3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

COROLARIO: *Un determinante es nulo si los elementos de una línea son proporcionales a los correspondientes de otra paralela a ella.*

Porque, separando el coeficiente de proporcionalidad como factor del determinante, queda otro con dos líneas idénticas, y por lo tanto es nulo.

EJEMPLO 2: Son nulos estos determinantes:

$$\begin{vmatrix} 123 & -\frac{97}{2} \\ -246 & 97 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 7 & -47 & 29 \\ -\frac{9}{2} & 1 & 3 \\ -3 & \frac{2}{3} & 2 \end{vmatrix} .$$

4. **Desarrollo de un determinante.** — *a*) *Adjuntos.* — Si en una matriz cuadrada de orden n se suprimen la fila que ocupa el lugar l y la columna del lugar k, se obtiene una matriz cuadrada de orden $n - 1$, cuyo determinante se llama *menor complementario* del elemento a_{lk}, común a la fila y columna suprimidas. Lo designaremos así: α_{lk}.

EJEMPLO 1: El menor complementario del elemento a_{22} en el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{es:} \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} .$$

Si en el desarrollo de un determinante sacamos factor común a_{lk} en todos los términos en que figura, aparece multiplicado por un polinomio que se llama *adjunto* o *cofactor* de a_{lk}.

Veamos cómo se expresa el adjunto.

a_1) Si el elemento es a_{11}, cualquier término en que él figure es del tipo $(-1)^{\nu}\, a_{11} \,.\, a_{2i_2} \,.\, a_{3i_3} \ldots a_{ni_n}$, siendo ν el número de inversiones de la permutación $1\; i_2 i_3 \ldots i_n$; separando el factor a_{11}, el producto $(-1)^{\nu}\, a_{2i_2} \,.\, a_{3i_3} \ldots a_{ni_n}$ contiene un factor de cada fila distinta de la primera, y uno de cada columna distinta de la primera; luego, es un término del determinante

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

También su signo es el que le corresponde en este determinante, pues la permutación $i_2 i_3 \ldots i_n$ tiene también ν inversiones, ya que 1 puesto al comienzo no forma inversión alguna. Recíprocamente, todo término de α_{11} multiplicado por a_{11} da un término del determinante total. Por consiguiente, el adjunto de a_{11} es α_{11}.

a_2) Si el elemento es el a_{lk}, podemos llevarlo a la primera fila trasponiendo la fila del lugar l con cada una de las $l-1$ anteriores; y trasponiendo después la columna k con las $k-1$ precedentes, llevamos a_{lk} al lugar que antes ocupaba a_{11}.

En el desarrollo del nuevo determinante A, el adjunto de a_{lk} es el menor α_{lk} *que no ha sufrido variación*, es decir: $A' = a_{lk}\,\alpha_{lk} + \ldots$; y como el determinante A se deduce del A' mediante $(k-1)+(l-1)$ cambios de filas y columnas, que producen $k+l-2$ cambios de signos, será:

$$A = (-1)^{l+k} A' = (-1)^{l+k} a_{lk}\,\alpha_{lk} + \ldots;$$

luego, el adjunto de a_{lk} en el determinante A es $(-1)^{l+k}\alpha_{lk}$:

El adjunto de un elemento a_{lk} es $(-1)^{l+k}\alpha_{lk}$, igual a su menor complementario, con su signo o con signo contrario, según que $l+k$ sea par o impar.

Por esta razón, el adjunto de a_{lk} suele llamarse también *complemento algebraico*; lo designaremos por A_{lk}.

Ejemplo 2: El adjunto del elemento 7 en el determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{es:} \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

b) *Desarrollo por los elementos de una línea.* — b_1) *El valor de un determinante es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por sus adjuntos correspondientes.*

Fijémonos, por ejemplo, en la fila que ocupa el lugar i. En cada término de A hay un elemento de esta línea, y sólo uno; luego, podemos clasificar los $n!$ términos del siguiente modo: todos los que contienen a_{i1} forman el producto $a_{i1}\,A_{i1}$; los que

contienen a_{i2} forman $a_{i2}\, A_{i2}, \ldots$; los que contienen a_{in} componen $a_{in}\, A_{in}$; luego:

$$A = a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \ldots + a_{in}\, A_{in}.$$

De aquí resulta por *a* el *desarrollo en base a los menores complementarios*:

$$A = (-1)^{i+1} a_{i1}\, \alpha_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}\, \alpha_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in}\, \alpha_{in},$$

donde los signos de desarrollo son alternativamente + y —.

EJEMPLO 3: Desarrollando por los elementos de la primera columna, resulta:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Cada uno de éstos puede desarrollarse en determinantes de segundo orden, o, lo que es equivalente, aplicando la regla de SARRUS, y resulta:

$$A = -3.7.4.2 + 3.3.5.3 + 3.3.1.2 + 3.4.5.4 -$$
$$-5.4.7.6 - 5.1.5.3 + 5.6.1.3 + 5.2.5.4 +$$
$$+2.3.5 - 4.1.6 - 1.2.7 - 6.7.3 + 2.2.1 + 4.1.5 = -510.$$

b_2) *La suma de los elementos de una línea, multiplicados por los adjuntos de los elementos de una paralela a ella, es cero.*

En efecto, la suma

$$a_{l1}\, A_{i1} + a_{l2}\, A_{i2} + \ldots + a_{ln}\, A_{in}$$

es el desarrollo del determinante obtenido poniendo en A, en vez de la fila $a_{i1}\, a_{i2}\, a_{i3} \ldots a_{in}$, la fila $a_{l1}\, a_{l2} \ldots a_{ln}$; este determinante tiene, pues, esta fila idéntica a la que ocupa el lugar l; luego, es nulo.

c) *Descomposición de un determinante en suma de varios de igual orden.* — c_1) *Si los elementos de una línea son polinomios de p términos, se puede descomponer el determinante en la suma de p determinantes que tienen las mismas restantes líneas, y en lugar de aquélla, la formada por los primeros sumandos, por los segundos, ..., y por los p-ésimos, respectivamente.*

Supongamos, por ejemplo, que los términos de la fila i sean trinomios:

$$a_{i1} = x_1 + y_1 + z_1, \quad a_{i2} = x_2 + y_2 + z_2, \; \ldots, \; a_{in} = x_n + y_n + z_n;$$

sustituyendo en el desarrollo del determinante A, efectuado por los elementos de esta fila, resulta:

$$\begin{aligned} A &= a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \ldots + a_{in}\, A_{in} = \\ &= x_1\, A_{i1} + x_2\, A_{i2} + \ldots + x_n\, A_{in} + \\ &+ y_1\, A_{i1} + y_2\, A_{i2} + \ldots + y_n\, A_{in} + \\ &+ z_1\, A_{i1} + z_2\, A_{i2} + \ldots + z_n\, A_{in} \end{aligned}$$

y cada una de estas tres sumas es el desarrollo del determinante obtenido sustituyendo los elementos de la fila i por sus primeros sumandos, por los segundos, o por los terceros.

c_2) *Un determinante no varía al sumar a los elementos de una línea los correspondientes de otra paralela, multiplicados por cualquier número* λ, *los de otra multiplicados por un número arbitrario* μ, *etc.*

Porque por (c_1), el nuevo determinante se descompone en una suma del primitivo más otros que son nulos, por tener cada uno dos líneas formadas por elementos proporcionales (§ 13-3, c_3, Cor.).

c_3) *Si una línea de un determinante es suma de varias paralelas a ella, multiplicada cada una por un número cualquiera, el determinante es nulo.*

Porque por (c_1) puede descomponerse en una suma de determinantes nulos Veremos (§ 14-3, b) que también vale el recíproco.

c_4) El teorema (c_2) permite simplificar los determinantes, reduciendo a cero varios elementos de una misma línea, mediante adiciones y sustracciones convenientes; cada elemento que se logre anular de este modo evita el cálculo de un menor complementario al desarrollar por dicha línea. Si se logra anular así todos los elementos de una línea, excepto uno, el producto de éste por su adjunto es igual al determinante total.

EJEMPLO 4: Para desarrollar el determinante de cuarto orden puesto en (b), comenzaremos restando de la 3ª columna las dos anteriores, y después restaremos de la 2ª el triplo de la 1ª. Obtenemos así:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 11 & 2 & 6 \\ 5 & -11 & -12 & 2 \\ 0 & 7 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 11 & 2 & 6 \\ -11 & -12 & 2 \\ 7 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 11 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 8 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

La última simplificación ha consistido en sumar a la 2ª fila la 1ª, y sacar el factor común 2 de la 2ª columna. Aplicando ya la regla de SARRUS al último determinante, obtenemos:

$$A = -2\,(-11.5.5 + 1.7.8 + 6.5.7 + 11.3.8) = -510.$$

5. **Menores complementarios. Regla de Laplace.** — Si en una matriz de orden n se suprimen varias filas, e igual número de columnas, se obtiene otra matriz de orden inferior, llamada *menor* de la primera. Para determinar una menor, basta dar los números $l_1, l_2, \ldots, l_h$ que designan las filas que contiene, y los $k_1, k_2, \ldots, k_h$ que expresan sus columnas.

Si en la matriz primera se suprimen las filas de lugares $l_1\, l_2, \ldots, l_h$, y las columnas que ocupan los lugares $k_1, k_2, \ldots, k_h$, se obtiene otra menor, llamada *complementaria* de la anterior. La suma de los órdenes de dos matrices complementarias es

evidentemente n. Los determinantes de dos matrices complementarias se llaman *menores complementarios*. Las locuciones abreviadas: *un menor, una menor*, se refieren, respectivamente, a los determinantes y a las matrices.

Se dice que un menor δ es de clase par (impar), si la suma de los números de orden de sus filas y columnas:

$$\Sigma\, l + \Sigma\, k = l_1 + l_2 + \ldots + l_h + k_1 + k_2 + \ldots + k_h$$

es par (impar). Para hallar la clase de su complementario δ formaremos la suma análoga:

$$\Sigma\, l' + \Sigma\, k' = l_{h+1} + \ldots + l_n + k_{h+1} + \ldots + k_n;$$

pero como

$$\Sigma\, l + \Sigma\, l' = \Sigma\, k + \Sigma\, k' = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

resulta $(\Sigma\, l + \Sigma\, k) + (\Sigma\, l' + \Sigma\, k')$ múltiplo de 2, o sea $\Sigma\, l' + \Sigma\, k'$ tiene la misma paridad que $\Sigma\, l + \Sigma\, k$, es decir: ***dos menores complementarios son de la misma clase.***

Se llama *adjunto* (o *complemento algebraico*) de un menor δ al menor complementario de δ, con el signo $+$ o $-$, según que sea de clase par o impar. En particular, si el menor dado se reduce a un solo elemento tendremos el adjunto definido en el § 13-4, a).

Un menor de orden h se llama *inicial*, cuando está formado por las h primeras filas y las h primeras columnas. Su adjunto coincide con su menor complementario, puesto que es de clase par igual a $2\,(1 + 2 + \ldots + h)$.

EJEMPLO 1: En la matriz

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\
b_1 & \mathbf{b_2} & b_3 & b_4 & \mathbf{b_5} \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\
d_1 & \mathbf{d_2} & d_3 & d_4 & \mathbf{d_5} \\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5
\end{array}$$

el menor $\begin{vmatrix} b_2 & b_5 \\ d_2 & d_5 \end{vmatrix}$ tiene como complemento el $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ e_1 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}$, y como la suma $(2 + 4) + (2 + 5)$ correspondiente al primero (o la $(1 + 3 + 5) + (1 + 3 + 4)$ correspondiente al segundo) es impar, ambos menores son de clase impar. Por lo tanto, el adjunto de uno cualquiera de ellos es el otro, cambiado de signo.

a) ***El producto de un menor por su adjunto forma parte del determinante total.***

1º Supongamos primero que un menor δ esté formado por las h primeras filas y las h primeras columnas, como indica el esquema siguiente:

$$
A = \left|\begin{array}{cccc|ccc}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,h} & a_{1,h+1} & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,h} & a_{2,h+1} & \dots & a_{2,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{h,1} & a_{h,2} & \dots & a_{h,h} & a_{h,h+1} & \dots & a_{h,n} \\
\hline
a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \dots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+1} & \dots & a_{h+1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,h} & a_{n,h+1} & \dots & a_{n,n}
\end{array}\right|
$$

entonces es δ de clase par y su adjunto es el menor complementario δ'

Multiplicando ambos determinantes menores, un término cualquiera del producto será:

$$[13\text{-}7] \qquad (-1)^{\nu} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{hj_h} (-1)^{\nu'} a_{h+1,\, j_{h+1}} \dots a_{n,\, j_n} \,,$$

llamando ν al número de inversiones de la permutación $j_1 j_2 \dots j_h$, que indica las columnas elegidas en el término δ, y ν' al número de inversiones que ofrecen los índices de las columnas en δ', y como éstos, aumentados en h, son precisamente $j_{h+1}, j_{h+2}, \dots, j_n$, es también ν' el número de inversiones de esta permutación; por lo tanto, el número de inversiones de la permutación

$$j_1 \; j_2 \; \dots \; j_h \; j_{h+1} \; \dots \; j_n$$

es $\nu + \nu'$, puesto que $j_1, j_2, \dots, j_h$ son todos $\leqq h$, y por lo tanto, no forman inversiones con los $j_{h+1}, j_{h+2}, \dots, j_n$, los cuales son $\geqq h$.

Conteniendo, pues, el producto [13-7] un elemento de cada fila de A y uno de cada columna, y siendo además su signo $(-1)^{\nu + \nu'}$ el que le corresponde en el desarrollo de A, dicho producto [13-7] es un término de este desarrollo.

2º Si el menor δ no es principal, sino que está formado por las filas $l_1, l_2, \dots, l_h$ y columnas $k_1, k_2, \dots, k_h$, se lo puede convertir en principal por cambios sucesivos de filas y columnas. Basta trasponer la fila l_1 con todas sus anteriores (que son $l_1 - 1$), hasta ocupar el primer lugar; la fila l_2 con las $l_2 - 2$ que le preceden, hasta llegar al segundo lugar; ...; la fila l_h con las $l_h - h$ que hay desde ella a la fila h. Haciendo lo mismo con las columnas, hemos llevado el menor δ al primer lugar, reduciendo este caso al anterior.

En el desarrollo del nuevo determinante A', el adjunto del menor principal δ es el menor δ', el cual no ha sufrido variación; luego $A' = \delta\delta' + \dots$, y como de A' se deduce el determinante dado A, mediante un número de trasposiciones:

$$(k_1 - 1) + (k_2 - 2) + \dots + (k_h - h) +$$

$$+ (l_1 - 1) + (l_2 - 2) + \dots + (l_h - h) = \Sigma k + \Sigma l - 2,$$

será

$$A = (-1)^{\Sigma k + \Sigma l} A' = (-1)^{\Sigma k + \Sigma l} \delta\delta' + \dots$$

y siendo $(-1)^{\Sigma k + \Sigma l} \delta'$ el adjunto de δ, queda demostrado el teorema.

b) Todo determinante es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando todos los menores de orden h que se pueden formar con h líneas paralelas fijas, por sus adjuntos respectivos (LAPLACE).

Todos los términos de estos productos pertenecen al desarrollo de A, en virtud del teorema anterior; todos son distintos, pues contienen elementos distintos, y así obtenemos *todos* los términos del determinante. En efecto, el número de menores formados con h líneas es $\binom{n}{h}$; luego, el número de términos obtenidos es:

$$\binom{n}{h} h! \ (n-h)! = n!$$

ESCOLIO: El teorema anterior reduce el desarrollo de un determinante al de otros de orden inferior. Para hacer el desarrollo por los menores de h filas, convendrá elegir aquellas en que aparezca el mayor número posible de columnas formadas por elementos nulos, porque todo menor en que figure una de estas columnas, es nulo.

EJEMPLO 2:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & 1 & -5 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Fijándonos en las dos primeras filas, calculemos los menores que con ellas se pueden formar; de ellos son nulos siete, y los demás son:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},$$

cuyos complementarios son:

$$\begin{vmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -4 & 7 & -5 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

y los signos que les corresponden son los tres negativos. Por consiguiente.

$$A = -(-17)\,145 - (-13)\frac{67}{2} - (-3)\left(-\frac{31}{2}\right) = 2854.$$

6. Producto de determinantes. — El teorema (§ 13-5, *b*) en que se funda el desarrollo de un determinante por menores complementarios permite expresar, en forma de determinante

de orden $m+n$, el producto de dos determinantes de órdenes m y n. En efecto,

$$\mathrm{A.B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & b_{11} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

cualesquiera que sean los números x, porque desarrollando este determinante por los menores de las n primeras filas, como todos los menores, excepto el primero, tienen alguna columna de ceros, y por lo tanto son nulos, resulta el producto A.B.

Para poder reducir el orden de este determinante, podemos suponer que los dos determinantes dados sean del mismo orden n (si es $n > m$), pues en caso contrario se puede transformar el de menor orden m en otro de orden n, prolongando su diagonal principal con $n-m$ elementos 1, y completando con ceros las nuevas filas y columnas. Además, como podemos disponer de los números indeterminados x, tomemos todos ellos iguales a 0, excepto los de la diagonal $x_{11}, x_{22}, \dots, x_{nn}$, que tomaremos iguales a -1. Finalmente, en virtud de § 13-3, c_1, podemos cambiar las filas por columnas, en el determinante menor B. Resulta así:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ 0 & -1 & \dots & & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Si mediante adiciones convenientes de filas o columnas (§ 13-4. c_3), logramos reducir a 0 los elementos a_{ij}, en vez del cuadro de ceros aparecerá otro de nuevos elementos c_{ij}, y el nuevo determinante de orden $2n$ será igual al determinante de orden n formado por estas c_{ij} multiplicado por su complemento algebraico; mas reduciéndose el menor complementario a su diagonal principal, su valor es $(-1)^n$; tendremos, pues, el producto en forma de determinante de orden n.

Esto se logra fácilmente del siguiente modo: sumemos a la primera fila las filas $n+1$, $n+2$, ..., $2n$, multiplicadas respectivamente por

$$a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n},$$

y obtenemos como primera ésta:

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \ldots + a_{1n}b_{1n},\ \ldots,\ a_{11}b_{n1} + a_{12}b_{n2} + \ldots + a_{1n}b_{nn}.$$

Llamaremos *producto escalar de la fila i de* A *por la fila j de* B, y lo designaremos por c_{ij}, a la suma de los productos de los términos que ocupan iguales lugares en ambas. Es decir:

[13-8] $$c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \ldots + a_{in}b_{jn}.$$

Con esta notación, la fila obtenida es la siguiente:

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ c_{11},\ c_{12},\ \ldots,\ c_{1n}.$$

Análogamente: sumando a la segunda fila, las $n+1$, $n+2$, ..., $2n$, multiplicadas por a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, respectivamente, resulta como nueva fila:

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ c_{21},\ c_{22},\ \ldots,\ c_{2n}.$$

Finalmente, sumando a la fila n-sima las mismas filas $n+1$, $n+2$, ..., $2n$, multiplicadas por a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}, respectivamente, resulta:

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ c_{n1},\ c_{n2},\ \ldots\ c_{nn}.$$

El determinante producto se ha transformado en éste:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} (-1)^{\sigma}$$

siendo

$$\sigma = (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+n) + 1 + 2 + \ldots + n = n.n + 2,$$

y como el valor del primer menor es $(-1)^n$, el factor que multiplica al segundo es $(-1)^{n+\sigma} = (-1)^{n+nn} = (-1)^{n(n+1)}$, número que es igual a 1, por ser n y $n+1$ dos números consecutivos, y por lo tanto, par su producto. Resulta, pues, en resumen:

El producto de dos determinantes de orden n está dado por la fórmula:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

designando con c_{ij} *el producto escalar* [13-8] *de la fila i del primero por la fila j del segundo* (BINET-CAUCHY).

ESCOLIO: Como el valor de un determinante no altera si se cambian entre sí las filas y las columnas, puede hacerse también el producto por columnas; la fórmula es la misma, designando c_{ij} el producto de la columna i del primero por la columna j del segundo. Finalmente, puede hacerse multiplicando las filas del primero por las columnas del segundo, o inversamente.

EJEMPLO: Producto, por filas, de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ b & 0 & d \\ c & d & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b\beta & c\gamma & b\gamma + c\delta \\ b\alpha & b\beta + d\gamma & d\delta \\ c\alpha + d\beta & c\beta & d\gamma \end{vmatrix}.$$

7. **Determinantes especiales.** — *a*) *Determinantes adjuntos y recíprocos.* — El determinante de la matriz formada por los adjuntos de los elementos de otro determinante se llama *adjunto* de éste. Es decir, el adjunto de

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{es} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Haciendo el producto de ambos, por filas, resulta según la regla de § 13-6:

$$\delta\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n}, & a_{11}A_{21} + \dots + a_{1n}A_{2n}, & \dots, a_{11}A_{n1} + \dots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + \dots + a_{2n}A_{1n}, & a_{21}A_{21} + \dots + a_{2n}A_{2n}, & \dots, a_{21}A_{n1} + \dots + a_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}A_{11} + \dots + a_{nn}A_{1n}, & a_{n1}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{2n}, & \dots, a_{n1}A_{n1} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{vmatrix}$$

y en virtud de § 13-4, b este determinante se reduce así:

$$\delta\,\Delta = \begin{vmatrix} \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta \end{vmatrix} = \delta^n,$$

y si es $\delta \neq 0$, se puede dividir por él y resulta $\Delta = \delta^{n-1}$.

Si δ tiene la primera columna de elementos nulos, las demás columnas de Δ también tendrán sus elementos nulos, y en este caso, por ser $\delta = \Delta = 0$, subsiste $\Delta = \delta^{n-1}$. Si en la primera columna de δ hay un elemento no nulo, por ejemplo $a_{11} \neq 0$, sustituyamos la fila correspondiente de Δ, por ejemplo, la primera, por el resultado de sumar las filas de Δ respectivamente multiplicadas por $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$. Entonces, Δ queda multiplicado por a_{11} (§ 13-3, c_3 y § 13-4, c_2), y en nuestro caso, los elementos de la primera fila resultante serán nulos (§ 13-4, b_2), menos el primero, que valdrá δ (§ 13-4, b_1). Por lo tanto:

$$a_{11}\,.\,\Delta = \begin{vmatrix} \delta & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

lo que prueba que si $\delta = 0$, al haber supuesto $a_{11} \neq 0$, queda también $\Delta = 0$. Por consiguiente, en todo caso:

El determinante adjunto de un determinante de orden n es igual a éste elevado al exponente n — 1.

Llamaremos determinante *recíproco* de δ al que tiene por elementos $\alpha_{ij} = A_{ji} : \delta$. Esta denominación está justificada, pues según lo demostrado, su valor es $\delta^{n-1} : \delta^n = 1 : \delta$. Las matrices correspondientes también se llaman *recíprocas* o *inversas*, nombres cuya justificación veremos en § 15-7, donde se comprenderá por qué se cambia i por j (filas por columnas).

b) Determinante de VANDERMONDE. — Se llama así, o *determinante de las diferencias*, al formado por las potencias sucesivas de n números distintos: $a, b, c, \dots, g, h, k$, ordenadas del siguiente modo:

$$[13\text{-}9] \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & b & c & \dots & h & k \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & h^2 & k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & h^{n-1} & k^{n-1} \end{vmatrix}$$

Podemos reducir a ceros los elementos de la primera colum-

na, excepto el primero, restando de cada fila la anterior, multiplicada por a, y obtenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & \ldots & h-a & k-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & \ldots & h(h-a) & k(k-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & \ldots & h^2(h-a) & k^2(k-a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b^{n-2}(b-a) & c^{n-2}(c-a) & \ldots & h^{n-2}(h-a) & k^{n-2}(k-a) \end{vmatrix}$$

determinante que se reduce a uno de orden $n-1$, el cual, separando los factores comunes $b-a$, $c-a$, $\ldots$, $h-a$, $k-a$, es éste:

$$\Delta = (b-a)(c-a)\ldots(h-a)(k-a). \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ b & c & \ldots & h & k \\ b^2 & c^2 & \ldots & h^2 & k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b^{n-2} & c^{n-2} & \ldots & h^{n-2} & k^{n-2} \end{vmatrix}$$

y observando que este determinante de orden $n-1$ es de la misma forma que el anterior se le puede aplicar la misma transformación, y resulta:

$$\Delta = (b-a)(c-a)\ldots(h-a)(k-a)\times \\ \times(c-b)\ldots(h-b)(k-b)\times \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ c & \ldots & h & k \\ c^2 & \ldots & h^2 & k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c^{n-3} & \ldots & h^{n-3} & k^{n-3} \end{vmatrix}$$

Con éste, que es de orden $n-2$, se opera de igual modo, y así se sigue hasta llegar a uno de segundo orden $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ h & k \end{vmatrix} = k-h$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \Delta = (b-a)(c-a)(d-a)\ldots(h-a)(k-a)\times \\ \times(c-b)(d-b)\ldots(h-b)(k-b)\times \\ \times(d-c)\ldots(h-c)(k-c)\times \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times(h-g)(k-g)\times \\ \times(k-h). \end{aligned}$$

b_1) *El determinante* [13-9] *es igual al producto de todas las diferencias obtenidas restando cada número, a, b, c, ..., g, h, k, de todos los que le siguen.*

b_2) *El determinante* [13-9] *es distinto de cero si, y sólo si, todos los números, a, b, c, ..., g, h, k, son distintos.*

EJEMPLO:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 3^2 & 1 & 5^2 & 7^2 \\ 3^3 & 1 & 5^3 & 7^3 \end{vmatrix} = (1-3)(5-3)(7-3)(5-1)(7-1)(7-5) = \\ = -2.2.4.4.6.2. = -768.$$

c) *Determinantes simétricos.* — Se llama *simétrico* un determinante, cuando todo elemento es igual a su conjugado, es decir: $a_{ij} = a_{ji}$.

Los menores complementarios de a_{ij} y a_{ji} están formados por elementos simétricos, y por lo tanto, iguales. Sólo difieren en que las filas de cada uno son columnas en el otro; luego (§ 13-3, c_1), son iguales. También los adjuntos A_{ij} y A_{ji} son iguales, pues sólo difieren de estos menores en el signo $(-1)^{i+j}$, que es el mismo para ambos. Por lo tanto, los determinantes recíproco y adjunto de uno simétrico son también simétricos.

d) *Determinantes antisimétricos.* — Determinante *hemisimétrico*, o bien *antisimétrico*, se llama al que tiene opuestos cada dos elementos conjugados, y por consiguiente, nulos los elementos principales.

d_1) Si en un determinante antisimétrico δ, de orden n, se cambian de signo los elementos de todas las filas, el valor del nuevo determinante es $(-1)^n \delta$; y como, por otra parte, es el mismo δ (cambiadas las filas por columnas y viceversa), resulta: $(-1)^n \delta = \delta$; luego, si es n impar, debe ser $\delta = 0$.

Todo determinante antisimétrico de orden impar es nulo.

d_2) Obsérvese que los menores complementarios de dos elementos conjugados, a_{ij} y a_{ji}, se componen de los mismos elementos con signos contrarios; luego,

$$\alpha_{ij} = (-1)^{n-1} \alpha_{ji}.$$

Por lo tanto:

El adjunto (y también el recíproco) de un determinante antisimétrico de orden n es simétrico o antisimétrico, según sea n impar o par.

EJERCICIOS

1. Calcular los determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 3+7i & 0 & -4 & 1 & 7 \\ -2+3i & 8 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 8 & 0 & 6 & -5 \\ 1+10i & 8 & -3 & 1 & 2 \\ 3i & 0 & 1 & -6 & 0 \end{vmatrix};$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{vmatrix}..$$

2. Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$

3. Poner en forma de determinante, donde en cada elemento figure a lo más una letra: $a(g-h)+b(h-f)+c(f-g)$; $a+b+c+abc$; $a+b+c-abc$.

4. Probar que la condición necesaria y suficiente para que el polinomio $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$ se descomponga en el producto de dos factores de primer grado es:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Aplicar a los polinomios:

1º) $2x^2 - 7xy - 15y^2 + 4x - 4y - 8$;

2º) $2x^2 + 4xy - 6y^2 - 4x + 12y - 6$;

3º) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4$.

¿Cuál es la condición para que el polinomio sea un cuadrado perfecto?

5. Desarrollar por menores complementarios:

$$A = \begin{vmatrix} a & x & y & z & t \\ x & b & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & c & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & d & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 7 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

6. Dado $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. formar el adjunto Δ y comprobar que $\Delta = \delta^2$. Formar el cuadrado y el cubo de δ.

§ 14. CÁLCULO DE MATRICES

1. **Definiciones.** — Estudiamos en este § 14 las propiedades de las matrices rectangulares:

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{matrix}\right\} \quad (m \gtreqless n),$$

las cuales comprenden a las cuadradas como caso particular.

Por abreviar, suele decirse que una línea es *suma* o *diferencia* de otras cuando sus elementos resultan de sumar o restar los correspondientes de estas otras; se llama *producto* de una línea por un número, a la obtenida al multiplicar por este número cada uno de sus elementos, y se dice que una línea es *combinación lineal* de otras líneas, $l_1, l_2, \dots$, cuando resulta de sumar éstas, respectivamente multiplicadas por factores $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, cualesquiera.

Dado un determinante menor de la matriz M, formado por h filas y h columnas cualesquiera de la misma, todo menor de

orden $h+1$ formado por aquellas h filas más otra cualquiera de las restantes, y por aquellas h columnas más otra de las restantes columnas, suele llamarse *menor orlado.*

2. **Dependencia lineal de filas y columnas.** — *a*) *Si una fila l es combinación lineal de las filas $l'_1, l'_2, \ldots, l'_k$, y cada una de éstas es una combinación lineal de las filas $l_1, l_2, \ldots, l_h$, la fila l es combinación lineal de éstas.* Análogo enunciado vale para las columnas.

Supongamos, por ejemplo, que los elementos de la fila l estén formados por la siguiente combinación lineal de las filas 3ª, 5ª y 8ª:

$$a_{lj} = \lambda a_{3j} + \mu a_{5j} + \nu a_{8j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

y que las filas 3ª, 5ª y 8ª sean combinaciones lineales de las filas 1ª y 2ª:

$$a_{3j} = \lambda' a_{1j} + \lambda'' a_{2j}, \qquad a_{5j} = \mu' a_{1j} + \mu'' a_{2j}, \qquad a_{8j} = \nu' a_{1j} + \nu'' a_{2j}.$$

Entonces, los elementos de la fila l están formados por las siguientes combinaciones lineales de las filas 1ª y 2ª:

$$a_{lj} = (\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')\, a_{1j} + (\lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \nu\nu'')\, a_{2j}.$$

b) Si una fila es una combinación lineal de h filas, todos los determinantes menores que se pueden formar con dichas $h+1$ filas son nulos en virtud de § 13-4, c_3. Recíprocamente, *si entre los determinantes de orden h que se pueden formar con h filas de una matriz hay uno $A \neq 0$, se puede asegurar que la fila l es una combinación lineal de aquéllas, cuando todos los menores obtenidos orlando A con la fila l y cada una de las columnas restantes son nulos; y también si no existe ningún orlado, por no haber columnas sobrantes.*

Enunciado análogo, si se trata de una columna.

En efecto, para todas las columnas $j = 1, 2, 3, \ldots, m$ se verifica:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1h} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2h} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hh} & a_{hj} \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{lh} & a_{lj} \end{vmatrix} = 0.$$

pues para $j = 1, 2, \ldots, h$, este determinante tiene dos columnas iguales; y para $j = h+1, h+2, \ldots, m$, es nulo, por hipótesis. Desarrollando por los elementos de la última columna, resulta:

$$a_{1j} A_1 + a_{2j} A_2 + \ldots + a_{hj} A_h + a_{lj} A = 0,$$

siendo $A_1, A_2, \ldots, A$ los adjuntos de dichos elementos; de donde se deduce para todos los valores $j = 1, 2, \ldots, m$:

$$a_{lj} = -a_{1j}\frac{A_1}{A} - a_{2j}\frac{A_2}{A} - \ldots - a_{hj}\frac{A_h}{A},$$

es decir: los elementos de la fila l resultan de sumar los de las filas 1, 2, ..., h, multiplicados por los números fijos:

$$-\frac{A_1}{A}, \quad -\frac{A_2}{A}, \quad \ldots \quad -\frac{A_h}{A}.$$

3. **Característica de una matriz: su cálculo.** — DEF. — Si en una matriz hay algún menor no nulo de orden h, y son nulos todos los menores de órdenes superiores a h, este número h se llama *característica* de la matriz. Todo menor no nulo de orden h, se llama *principal.*

De esta definición y de § 14-2, b), resulta:

a) *Si h es la característica y A un menor principal, todas las filas (columnas) de la matriz son combinaciones lineales de las h filas (columnas) que figuran en* A.

Un caso particular es aquel en que la matriz es cuadrada de orden n y su determinante es nulo; siendo entonces $h < n$ se obtiene el siguiente teorema, recíproco de § 13-4, c_3:

b) *Todo determinante nulo tiene, por lo menos, una fila (y una columna) que es combinación lineal de las demás.*

c) *Cálculo de la característica.* — Para asegurar que son nulos todos los menores de órdenes mayores que h, basta comprobar que son nulos *todos* los menores posibles de orden $h+1$; porque cualquiera de orden superior, desarrollado por menores de orden $h+1$, resultará nulo. Aun con esta simplificación, la obtención de la característica sería prácticamente imposible, exceptuando casos triviales. Se simplifica considerablemente con el siguiente teorema:

c_1) *Si a una matriz se le agrega o suprime una línea que es combinación lineal de las restantes, la característica no varía.*

Sea M una matriz de característica h, y M' la matriz formada agregándole una fila más, combinación lineal de varias filas de M.

Los únicos menores A'_i de orden $h+1$ de la matriz M', que no figuran en M, son los formados con la nueva fila l más h cualesquiera de las filas M. Si todos los menores de orden h formados con dichas h filas son nulos, entonces es $A'_i = 0$. Si, por el contrario, entre los menores formados con estas h filas hay uno $A \neq 0$, *principal* en la matriz M, entonces, siendo por hipótesis la fila l una combinación lineal de varias filas de M, y éstas, a su vez (a), combinaciones lineales de las h filas que componen A, es la fila l una combinación lineal de estas h filas (§ 14-2, a), y por lo tanto, $A'_i = 0$.

Siendo, pues, nulos todos los menores de orden $h+1$ de la matriz M' su característica es también h.

c_2) Según este teorema, hallado un menor $A \neq 0$ de orden h, procederemos del siguiente modo, para ver si la característica es h o superior a h. Formados todos los menores orlados de A con la fila l y cada columna, si son nulos todos, es dicha fila combinación lineal de las h filas que figuran en A (§ 14-2, b), y puede por lo tanto suprimirse. Procediendo análogamente con las demás filas, si todos los orlados así obtenidos son nulos, la matriz queda compuesta por h filas, y su característica es h.

Si por el contrario, hay alguno de estos orlados $A'_i \neq 0$, la característica es por lo menos $h+1$: formaremos los orlados de A'_i, etc.

Ejemplo: Hallemos la característica de la matriz:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 & 1/2 \\ -2 & 6 & -10 & 0 & -4 & -1 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 1/2 & 2 & -3/2 \end{matrix}\right\}.$$

A primera vista se reconoce que la segunda fila es el producto de la primera por -2, y por lo tanto, puede suprimirse; también suprimimos la quinta, que es mitad de la tercera, y la matriz se reduce a ésta:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 & 1/2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 & -2 \end{matrix}\right\}.$$

Elegido un menor cualquiera no nulo de segundo orden, por ejemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix},$$

he aquí sus menores orlados con la tercera fila.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1/2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & -2 \end{vmatrix},$$

y como todos son nulos, la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras (§ 14-2, *b*), y suprimida dicha fila, resulta que la característica de la matriz es 2.

Si no hubiéramos demostrado el teorema (c_1), para llegar a este resultado habríamos tenido que formar 200 menores de tercer orden.

Ejercicios

1. Hallar las características de las matrices:

$$1^{\circ})\ \left\{\begin{matrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ -6 & 9 & -3 & 0 & -15 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 3 & 5 \\ 8 & -12 & 4 & 0 & 20 & -4 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & 11 & 9 \end{matrix}\right\}; \quad 2^{\circ})\ \left\{\begin{matrix} 2 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & -3 \\ 9 & 5 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \end{matrix}\right\}.$$

2. Determinar las características de las matrices formadas con los elementos de los determinantes del ejercicio 1 de § 13.

3. Estudiar la característica de la matriz:

§ 15. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Expresiones algebraicas: su valor numérico. — *a*) Anteriormente hemos demostrado las propiedades de las operaciones aritméticas, designando por letras los números, a fin de que los razonamientos fuesen válidos con independencia del valor particular de ellos. Tales números indeterminados se llaman *variables*.

Una combinación cualquiera de varias variables (o variables y números fijos), ligadas un número finito de veces por los signos de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación, se llama una *expresión algebraica*.

Si las variables están sometidas a las cuatro operaciones *racionales*, a saber: adición, sustracción, multiplicación y división, entonces la expresión algebraica se llama *racional*. Como caso particular del producto y del cociente, pueden figurar potencias de exponente entero.

Si las variables están ligadas únicamente por las tres operaciones enteras, esto es: adición, sustracción y multiplicación (como caso particular, potencias de exponente natural), la expresión algebraica se llama *entera*.

Una expresión algebraica no racional se llama *irracional*. Es necesario tener muy en cuenta que el concepto de *función algebraica*, que definiremos (§ 23-8), es *más amplio* que el de expresión algebraica arriba definido.

Si sólo se atiende a algunas letras de las que figuran en la expresión, ésta se dirá *irracional* o *racional*, respecto de dichas variables, según que éstas figuren o no bajo el signo radical; y siendo racional, se dirá que es *entera* respecto de tales letras, cuando no sean divisores.

Ejemplo 1: Son algebraicas las expresiones:

$$\frac{2\sqrt{a}-q\sqrt{b}+1}{p-1}, \qquad \frac{2}{3}\,\frac{a}{a-b}\,x-\frac{b}{a}\,y, \qquad -\frac{1}{2}a^2b+\frac{3}{4}\,bc,$$

siendo irracional la primera, y racionales las otras dos; la última es entera; la expresión primera es racional respecto de las letras p y q, y es entera lineal respecto de q; la segunda es entera respecto de x, y.

b) *Valor numérico de las expresiones algebraicas.* — Si damos valores numéricos fijos a las variables que figuran en una expresión, y efectuamos con ellos las operaciones indicadas, obtenemos un número, que se llama *valor numérico* de la expresión, correspondiente al sistema de valores atribuídos a las variables. Supondremos, en general, que dichos valores pueden ser reales o complejos cualesquiera.

El valor numérico de la expresión segunda del ejemplo 1, para $a = 3$, $b = 1/2$, $x = 5$, $y = -3/2$, es $17/4$.

Dos expresiones algebraicas que tienen iguales valores nu-

méricos para todo sistema de valores atribuídos a las variables que contienen, se llaman *equivalentes.*

Nótese que esta definición satisface a las tres condiciones: idéntica, recíproca y transitiva, fundamentales de la equivalencia abstracta (§ 1-5).

Cuando convenga distinguir entre la *equivalencia* y la *igualdad* que sólo se verifica para ciertos valores de las letras, adoptaremos para designar aquélla el símbolo $\equiv$.

Cálculo algebraico es el conjunto de reglas que permiten transformar una expresión algebraica en otras equivalentes. Todas las reglas operativas demostradas en el capítulo I cumplen esta condición, puesto que se han demostrado para todos los valores posibles de las letras, exceptuando los que anulen algún divisor. Veamos este caso.

Puede suceder que una expresión algebraica Q carezca de significado numérico para algunos valores de sus variables, y transformada por medio de las reglas de cálculo en otra expresión Q′ equivalente para todos los demás valores, ésta adquiera un valor numérico β para dicho sistema de valores excepcionales. Convendremos, entonces, en atribuir a Q este mismo número β, al cual llamaremos *valor* de Q (también suele llamarse *verdadero valor*), correspondiente a aquel sistema de valores de sus letras. Más adelante, mediante el concepto de continuidad funcional (§ 25-3), justificaremos este convenio.

EJEMPLOS: 2. La expresión $\frac{x^2-4}{3x+6}$ carece de sentido para $x=-2$; pero como la expresión $\frac{x-2}{3}$, obtenida suprimiendo el factor $x+2$, es equivalente a ella para todos los valores x distintos del -2, y para éste toma el valor $-\frac{4}{3}$, diremos que $-\frac{4}{3}$ es el *verdadero valor* de la expresión dada, para $x=-2$.

3. Análogamente, siendo $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$ igual a $\frac{1}{x+1}$ para todo valor de x distinto del 1 y del -1, como esta última toma el valor 1/2 para $x=1$, diremos que el valor de la primera es también 1/2; pero una y otra carecen de significado para $x=-1$.

c) *Reducción a forma típica de las expresiones racionales.* — Toda expresión racional puede transformarse en otra equivalente de uno de los dos tipos que indican los teoremas siguientes:

c_1) *Toda expresión entera respecto de las variables a, b, ..., l, se puede transformar en otra equivalente de la forma*

$$[15\text{-}11] \qquad A_0\, a^n + A_1\, a^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\, a + A_n,$$

siendo $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ *expresiones enteras respecto de las variables b, c, ..., l, o bien coeficientes numéricos, si la expresión final sólo contiene una variable.*

En efecto, puesto que las únicas operaciones que ligan las letras $a, b, \ldots, l$ son adiciones, sustracciones y multiplicacio-

nes, si la expresión dada no contiene productos de sumas o diferencias, sino solamente sumas y diferencias de productos, ya es una expresión polinómica (§ 4-7). Si, por el contrario, hay en ella productos indicados de sumas y diferencias, desarrollados éstos según la regla de § 4-9, obtenemos finalmente una expresión polinómica:

[15-2] $$\Sigma\, C\, a^{\alpha}\, b^{\beta} \ldots l^{\gamma},$$

representando por C el coeficiente numérico de cada término.

Los términos que en este polinomio final tienen común la parte literal, se llaman *semejantes*; pueden reducirse a un término único, que tiene esta misma parte literal y como coeficiente la suma de los coeficientes. Cuando este coeficiente final sea nulo, el término $0 \,.\, a^{\alpha}\, b^{\beta} \ldots l^{\gamma}$ puede suprimirse, sin que se altere la equivalencia, puesto que dicho término es nulo para todo sistema de valores de las letras.

DEF.: Un polinomio desprovisto de términos semejantes y de términos con coeficientes nulos, se llama *reducido*.

Vemos, pues, que dada una expresión entera, existe un polinomio reducido equivalente a ella. Ordenando, según las potencias de a, los monomios que componen esta expresión reducida, y agrupando los que tengan la misma potencia, ésta queda multiplicada por un polinomio que sólo tiene las letras $b, c, \ldots, l$, el cual se puede ordenar según las potencias de b, etc.

c_2) *Toda expresión racional respecto de las variables a, b, $\ldots$, l se puede transformar en otra equivalente, que es entera, o es un cociente de dos expresiones enteras.*

Si en la expresión figura solamente un signo de división, el dividendo y divisor son expresiones enteras; si, por el contrario, hay varios signos de división, aplicando las reglas demostradas en el § 6 para sumar, restar, multiplicar o dividir fracciones de términos cualesquiera, y observando que los términos de las fracciones obtenidas resultan de efectuar operaciones *enteras* con los términos de las dos fracciones dadas, obtenemos, finalmente, un cociente de dos expresiones enteras.

Esta fracción final es equivalente a la expresión dada, excepto para aquellos valores de las letras que anulen a algunos de los divisores sucesivos; pero en virtud del convenio hecho en (b), ambas son completamente equivalentes.

EJEMPLO 4:

$$\left\{ \frac{\dfrac{2\,a\,c - b}{c} - a}{\dfrac{b-c}{b+c} + \dfrac{b+c}{b-c}} - \frac{b\,c}{b^2 - c^2} \right\} : \frac{b}{(b^2 - c^2)\,c^2} =$$

$$\frac{a\,b^4\,c - 2\,a\,b^2\,c^3 + a\,c^5 - b^5 - 3\,b\,c^4}{2\,c\,(b^2 + c^2)\;(b^2 - c^2)} : \frac{b}{(b^2 - c^2)\,c^2} =$$

$$= \frac{a\,b^4\,c^2 - 2\,a\,b^2\,c^4 + a\,c^6 - b^5\,c - 3\,b\,c^5}{2\,b^3 + 2\,b\,c^2},$$

después de haber suprimido el factor común $b^2 - c^2$ y el c. Mientras la primera expresión carece de significado para los valores $c = 0$, $b = 0$, $b = c$, $b = \pm c i$, $b = -c$, que anulan a algunos divisores, esta última tiene solamente los valores excepcionales $b = 0$, $b = \pm c i$; por lo tanto, atribuiremos a la primera los mismos valores que ésta toma. Así diremos, por ejemplo, que para $b = c = 2$, la expresión dada vale -8.

2. Planteamiento y transformación de ecuaciones. — *a*) Todo problema que pueda reducirse a hallar uno o varios números que cumplan ciertas condiciones, susceptibles de ser expresadas por medio de igualdades (o desigualdades, en el campo real), es resoluble por medio del Álgebra.

Tales igualdades (o desigualdades, en el campo real), a que han de satisfacer los números desconocidos, se llaman *ecuaciones* (o *inecuaciones*), respectivamente. Se llama *solución* o *raíz* a todo número o sistema de números que satisfaga a la ecuación (o inecuación), es decir, que dé a los dos miembros valores numéricos iguales (desiguales en el sentido prefijado).

La resolución de un problema tiene tres partes:

1ª *Planteamiento*, esto es, elección de las variables cuya determinación es suficiente para responder a la cuestión propuesta, y traducción en ecuaciones (o inecuaciones) de las condiciones impuestas a dichos números.

2ª *Resolución* de las ecuaciones (o inecuaciones), es decir, cálculo de los valores que las satisfacen.

3ª *Interpretación* concreta de los resultados numéricos obtenidos.

b) *Ejemplos de planteamiento y discusión de problemas. — De un punto* O *parten simultáneamente, por un mismo camino y en un mismo sentido, dos móviles,* A *y* A', *con velocidades* v *y* v', *respectivamente. Hallar el momento y el punto en que ambos se encuentran.*

b_1) El único número que importa conocer es el tiempo transcurrido, o bien la longitud recorrida, pues de uno se deduce el otro. Adoptando como incógnita el tiempo t transcurrido hasta su encuentro, los espacios recorridos por A y A' son $v t$ y $v' t$; luego, la condición del problema se traduce así:

[15-3] $$v t = v' t, \quad \text{o sea:} \quad (v - v')\, t = 0.$$

Si es $v \neq v'$, resulta $t = 0$ como única solución; luego, en ningún punto distinto del de partida pueden encontrarse. Si es $v = v'$, todo valor de t satisface a [15-3]; luego, en todo momento van juntos ambos móviles.

b_2) Supongamos ahora que la pista sea un camino cerrado, de longitud conocida l. El planteo habrá de ser distinto, pues el encuentro puede acontecer después de haber dado más de una vuelta completa. Sea x el número de vueltas completas dadas por A, y x' las vueltas recorridas por A'; sean e y e' los espacios recorridos.

La condición necesaria y suficiente para que al cabo del tiempo t coincidan A y A', es que las longitudes $v t$ y $v' t$ difieran en un número exacto de vueltas, que será precisamente la diferencia entre x y x'. Llamando $x - x' = z$, la ecuación que plantea el problema es

[15-4] $$v t - v' t = l z, \quad \text{o sea:} \quad (v - v')\, t = l z,$$

la cual contiene dos incógnitas, debiendo ser z natural y t cualquiera.

DISCUSIÓN: *Primer caso*: $v = v'$. La ecuación [15-4] da las soluciones $z = 0$, y t cualquiera; es decir, los móviles van juntos en todo momento, y el número de vueltas $x = x'$ es el mismo.

Segundo caso: $v > v'$. Entonces puede recibir z cualquier valor natural 0, 1, 2, ..., y para cada uno obtenemos una solución:

$$t = z\frac{l}{v - v'}, \quad e = z\frac{l\,v}{v - v'}, \quad e' = z\frac{l\,v'}{v - v'},$$

El número x de vueltas se obtendrá por la condición:

$$l\,x \leqq z\frac{l\,v}{v - v'} < l\,(x + 1), \quad \text{o sea:} \quad x \leqq \frac{z\,v}{v - v'} < x + 1,$$

y análogamente x'; luego,

$$x = \left[\frac{z\,v}{v - v'}\right], \quad x' = \left[\frac{z\,v'}{v - v'}\right]$$

en la que la notación $[x]$ significa: *parte entera de x.*

Tercer caso: $v < v'$. No es preciso repetir el análisis anterior, bastando permutar v con v', x con x' y e con e'.

Caso notable: La razón de velocidades v/v' es un número natural h. Es decir: $v = v'\,h$.

Los espacios e' correspondientes a los puntos de encuentro son:

$$\frac{l}{h-1}, \quad \frac{2\,l}{h-1}, \quad \frac{3\,l}{h-1}, \ldots, \frac{(h-1)\,l}{h-1}, \quad \frac{h\,l}{h-1} = l + \frac{l}{h-1}, \ldots,$$

es decir, hay infinitos momentos de coincidencia, pero solamente $h - 1$ puntos de encuentro, los cuales dividen el camino l en $h - 1$ partes iguales.

Estúdiese el caso en que ambos móviles partan en sentidos opuestos.

Ejemplos: Datos: $l = 10$ m; $v = 5$ m por s; $v' = 1$ m por s.

Soluciones:

z	0	1	2	3	4	...
t	0ˢ	2ˢ,5	5ˢ	7ˢ,5	10ˢ	...
e	0 m	12,5 m	25 m	37,5 m	50 m	...
e'	0 m	2,5 m	5 m	7,5 m	10 m	...
x	0	1	2	3	5	...
x'	0	0	0	0	1	...

c) *Transformaciones de una ecuación.* — Dos ecuaciones se llaman *equivalentes*, cuando toda solución de cada una satisface a la otra.

Planteado un problema en ecuaciones, es preciso transformar éstas en otras equivalentes, más sencillas, utilizando los recursos siguientes:

c_1) *Si se suma a los dos miembros de una ecuación un mismo número h, o una expresión entera* H, *se obtiene una ecuación equivalente.*

Porque todo sistema de valores que satisfaga a la ecuación A = B, es decir, que dé a las expresiones A y B el mismo valor numérico, también da a las expresiones A + H y B + H valores iguales; luego, satisface a la ecuación A + H = B + H; y, recíprocamente, todo sistema de valores que haga iguales estas dos expresiones, da también valores iguales a A y B (puesto que H toma en ambas el mismo valor); luego, satisface a la ecuación A = B.

COROLARIO: *Se puede pasar un término cualquiera de un miembro a otro, cambiándole el signo, si es numérico o si es una expresión entera.*

ESCOLIO: Si se suma a los dos miembros de la ecuación $A = B$ una misma expresión H, que sea función no entera de las variables, la ecuación obtenida $A + H = B + H$ no será equivalente si esta expresión H carece de valor numérico para algunas raíces de la primera; entonces habremos *perdido* estas soluciones.

Tampoco se puede suprimir siempre una misma expresión H en los dos miembros de una ecuación $A + H = B + H$, porque si alguna de las raíces de la ecuación obtenida $A = B$ no da valor numérico ninguno a H, habremos introducido estas soluciones extrañas.

Por consiguiente, tampoco podemos pasar de un miembro a otro una expresión *no entera* si ésta carece de valor numérico para alguna raíz de la ecuación.

EJEMPLOS: 1. No son equivalentes las ecuaciones

$$(x-1)^2 + \frac{2}{x} = x^2 + 1 + \frac{2}{x}, \quad (x-1)^2 = x^2 + 1,$$

pues el valor 0 satisface a la segunda, pero no a la primera.

2. Tampoco son equivalentes las ecuaciones

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-3}{x-1} \quad \text{y} \quad x + \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-3}{x-1},$$

pues la primera tiene la solución $x = 1$, que no satisface a la segunda.

c_2) *Si se pasan* todos *los términos de un miembro a otro con signo contrario, la ecuación obtenida tiene* por lo menos *todas las soluciones de la primera.*

Toda solución de $A = B$ da valores numéricos a A y B, y ambos son iguales; luego, satisface a $A - B = 0$. Sin embargo, puede haber soluciones de ésta que, por no dar significado numérico a A ni a B (aunque sí a su diferencia), no satisfagan a la ecuación $A = B$.

EJEMPLOS: 3. De la ecuación del primer ejemplo anterior deducimos ésta:

$$(x-1)^2 + \frac{2}{x} - x^2 - 1 - \frac{2}{x} = 0, \quad \text{o sea:} \quad -2x = 0,$$

que tiene la solución extraña $x = 0$.

4. De la ecuación del 2º ejemplo anterior deducimos esta, que es equivalente:

$$x + \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{x-1} = 0, \quad \text{o sea:} \quad x + \frac{1}{x} - 2 = 0.$$

c_3) *Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por un mismo número $h \neq 0$, se obtiene otra ecuación equivalente; y si se multiplican por una expresión entera* H, *la ecuación obtenida tiene* por lo menos *todas las soluciones de la dada.*

Todo sistema de valores que satisfaga a la ecuación A = B, es decir, que dé el mismo valor numérico a A que a B, también satisface a la ecuación $A\,h = B\,h$; y, recíprocamente, todo sistema que da a $A\,h$ y $B\,h$ iguales valores numéricos, satisface a la ecuación A = B.

Si el factor es una expresión entera H, toda solución de A = B satisface también a A H = B H; pero no se puede asegurar la recíproca, pues los números que anulen a H pueden dar valores desiguales a A y B; tales números satisfarán entonces a la ecuación A H = B H, pero no a la A = B.

ESCOLIO: Si la expresión H no es entera, puede suceder que las soluciones A = B hagan ilusorias las expresiones A H y B H; entonces se habrán *perdido* soluciones. Tal sucede, por ejemplo, cuando se divide por una expresión entera K; pues esto equivale a multiplicar por 1/K.

EJEMPLO 5: De la ecuación:

$$4x + \frac{x-1}{x} = 2\,\frac{x+1}{x}$$

deducimos las tres siguientes, multiplicando por $\frac{1}{x-1}$, por x y por $x+1$, respectivamente.

$\frac{4x}{x-1} + \frac{x}{1} = 2\frac{x+1}{x(x-1)}$; $4x^2+x-1=2x+2$; $4x(x+1) + \frac{x^2-1}{x} = \frac{2(x+1)^2}{x}$

(soluc. perdida $x=1$) (ecuac. equivalente) (soluc. extraña: $x=-1$)

c_1) *Si se elevan a una misma potencia los dos miembros de una ecuación, resulta otra que tiene todas las soluciones de la primera.*

De la ecuación obtenida, $A^n = B^n$, deducimos esta otra: $A^n - B^n = 0$, o sea:

[15-5] $(A - B)\,(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + A\,B^{n-2} + B^{n-1}) = 0.$

Toda solución de la ecuación A = B da a las expresiones A y B valores numéricos iguales; luego, satisface a [15-5], puesto que anula al factor A — B y el segundo tiene valor numérico; pero teniendo significado numérico A y B, y siendo nula la diferencia $A^n - B^n$, los valores del minuendo y sustraendo son iguales, esto es: $A^n = B^n$. La recíproca no es cierta, pues si un sistema de valores de las incógnitas anula el segundo factor de [15-5], dando al primer factor A — B un valor no nulo, dicho sistema no satisfará a la ecuación A = B.

EJEMPLO 6: Elevando al cuadrado los dos miembros de

$$\frac{x^2}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}, \quad \text{resulta:} \quad \frac{x^4}{(x-1)^2} = \frac{(2x-1)^2}{(x-1)^2}.$$

La primera carece de soluciones, y la segunda tampoco tiene solución racional; en el campo de los números reales admite dos soluciones: $1 \pm \sqrt{2}$.

d) Reducción de las ecuaciones a forma entera. — Dada una ecuación cualquiera, si sus dos miembros son expresiones racionales respecto de las incógnitas, comenzaremos por reducir a cero uno de ellos, aplicando la propiedad (c_2); la expresión obtenida en el otro miembro se reducirá a su forma típica, según las reglas del § 15-1, *c*, obteniéndose en definitiva una ecuación del tipo

$$H = 0, \quad \text{o del tipo} \quad \frac{H}{K} = 0.$$

siendo H y K polinomios. En este último caso, multiplicando por K, la ecuación se reduce al primer tipo.

En resumen: *las únicas operaciones que pueden alterar la equivalencia, introduciendo soluciones extrañas (sin perder ninguna de la ecuación), son la reducción de un miembro a cero y la supresión del denominador.* Las introducidas por la primera operación serán aquellas raíces que hagan ilusorios los dos miembros de la ecuación dada, y esto se reconocerá por sustitución directa. Las soluciones extrañas que puede introducir la supresión del denominador son las que anulen a H y a K, y sin embargo, den al cociente H/K un valor distinto de cero.

Reducida la ecuación a forma entera, si ésta resulta de primer grado: $a\,x = b$, $(a \neq 0)$, la única solución, según demostrábamos en § 6-4, es $x = b/a$. Si es de grado superior al primero, la resolución exige una combinación de operaciones aritméticas, que estudiaremos más adelante (§ 41).

EJEMPLO 7:

$$x + \frac{1}{x} + \frac{x-3}{1-x} = 2 + \frac{4}{x^2-1}.$$

Pasando todos los términos al primer miembro, y simplificando éste, obtenemos:

$$\frac{x^2+1}{x} - \frac{x-1}{x+1} - 2 = 0, \qquad \text{o sea:} \qquad \frac{x^3-2\,x^2+1}{x\,(x+1)} = 0,$$

y quitando el denominador, resulta la ecuación $x^3 - 2\,x^2 + 1 = 0$, cuya única raíz racional $x = 1$ es extraña, introducida al pasar todos los términos al primer miembro; dividiendo por $x - 1$, la ecuación se reduce a $x^2 - x - 1 = 0$, que tiene dos raíces reales únicas, las cuales satisfacen a la ecuación dada.

Al quitar el denominador último no se han introducido soluciones extrañas. En cambio, si hubiéramos quitado denominadores directamente en la ecuación dada, multiplicando todos los términos por $x\,(x^2-1)$ habríamos obtenido la ecuación de cuarto grado:

$$x^4 - 3\,x^3 + 2\,x^2 + x - 1 = 0,$$

la cual, después de suprimida la raíz extraña $x = 1$, introducida por la reducción del segundo miembro a cero, se convierte en $x^3 - 2\,x^2 + 1 = 0$, que admite otra vez la raíz $x = 1$, introducida por la segunda transformación.

3. **Teorema fundamental de equivalencia en los sistemas de ecuaciones lineales: método de reducción.** — *a) Definiciones.* — Recordemos que (§ 13-1, *a*) dos sistemas de ecuaciones se lla-

man equivalentes cuando tienen las mismas soluciones. Supondremos, en general, que dichas soluciones pueden darse en el campo real o complejo.

Si toda solución de un sistema de ecuaciones satisface a otra ecuación, se dice que ésta es *consecuencia* de aquéllas. Sumando miembro a miembro dos ecuaciones, o restándolas, o multiplicándolas, se obtiene una ecuación que es consecuencia de ellas, porque toda solución de las mismas da valores numéricos iguales a los dos miembros de cada una, y también, por lo tanto, a la ecuación suma, diferencia o producto. Más general: *Si una ecuación es combinación lineal de varias, es decir, si resulta de sumarlas miembro a miembro, previamente multiplicadas por números cualesquiera, es consecuencia de ellas.* Si en un sistema se observa que una ecuación es combinación lineal de varias otras, puede por lo tanto suprimirse, sin alterar la equivalencia.

Si una ecuación es consecuencia de otras y no contiene una incógnita que en ellas figura, se dice que ésta se ha *eliminado.* Por lo tanto, *eliminar* una incógnita entre varias ecuaciones es obtener otra ecuación, consecuencia de éstas (es decir, que se satisface para las soluciones comunes) y que no contiene dicha incógnita.

En particular: eliminar *todas* las incógnitas de un sistema de ecuaciones de coeficientes literales indeterminados, $a, b, c, \ldots, l$, es hallar una relación $R(a, b, c, \ldots, l) = 0$, a la que han de satisfacer estos coeficientes, para que el sistema tenga solución. Cuando la anulación de R no sólo es *necesaria* para la compatibilidad del sistema. sino también *suficiente*, esta función $R(a, b, c, \ldots, l)$ de los coeficientes se llama *resultante* del sistema.

Eliminando todas las incógnitas menos una, y resolviendo la ecuación obtenida, tenemos los valores de esta incógnita. Este es el método más general de resolución de sistemas; pero como la teoría de la eliminación habremos de desarrollarla en el § 42, nos limitaremos a tratar aquí los sistemas lineales.

b) Teorema fundamental de equivalencia. — Si una ecuación se sustituye por la que resulta de sumarla miembro a miembro (después de multiplicarla por cualquier factor $\alpha \neq 0$) con otra del sistema, previamente multiplicada por un número cualquiera β, con otra multiplicada por un factor γ, etc., el nuevo sistema es equivalente del primero.

Es decir, son equivalentes los sistemas:

$$\left|\begin{array}{l} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \\ \cdots\cdots \\ A_n = B_n \end{array}\right. \left\{\begin{array}{r} \alpha A_1 + \beta A_2 + \ldots + \lambda A_i = \alpha B_1 + \beta B_2 + \ldots + \lambda B_i \\ A_2 = B_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_n = B_n \end{array}\right.$$

En efecto, toda solución del sistema dado satisface al segundo, puesto que la primera ecuación de éste es consecuencia de aquéllas (α), y las demás no se han alterado. Recíprocamente, toda solución del segundo sistema satisface al dado, pues ambos tienen comunes $n-1$ ecuaciones, y la ecuación $A_1 = B_1$ es combinación lineal de las ecuaciones del segundo sistema, ya que resulta de sumar a la primera ecuación: la segunda multiplicada por $-\beta$, la tercera multiplicada por $-\gamma$, etc.

c) Método de reducción para resolver los sistemas de ecuaciones lineales. — En el teorema anterior se funda el *método de reducción*, que es el más rápido para resolver un sistema de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas, cuando los coeficientes son numéricos. Sea el sistema de tres ecuaciones:

$$[15\text{-}6] \qquad \begin{cases} \text{I.} & a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ \text{II.} & a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ \text{III.} & a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases}$$

En una de ellas, por lo menos, figura la x; supongamos, por ejemplo, que en la primera es $a_1 \neq 0$. Sumando a la segunda ecuación la primera multiplicada por $-a_2/a_1$; o, lo que es equivalente, restando de la segunda ecuación, multiplicada por a_1, la primera multiplicada por a_2, resulta un nuevo sistema equivalente; y procediendo análogamente con la primera y tercera, obtenemos el nuevo sistema:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1 \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) y + (a_1 c_2 - a_2 c_1) z = a_1 k_2 - a_2 k_1 \\ (a_1 b_3 - a_3 b_1) y + (a_1 c_3 - a_3 c_1) z = a_1 k_3 - a_3 k_1 \end{cases}$$

Esta eliminación de x no será necesaria cuando la segunda o la tercera ecuación del sistema dado carezcan de término en x. Obtenemos pues, en todo caso, un sistema equivalente de la forma:

$$\begin{cases} \text{I} & a_1x + b_1 y + c_1 z = k_1 \\ \text{II}' & b'_2y + c'_2z = k'_2 \\ \text{III}' & b'_3y + c'_3z = k'_3 \end{cases}$$

Si es $b'_2 \neq 0$, restamos de la tercera ecuación, multiplicada por b'_2, la segunda multiplicada por b'_3, y obtenemos otro sistema del tipo

$$\begin{cases} \text{I} & a_1x + b_1 y + c_1 z = k_1 \\ \text{II}' & b'_2y + c'_2z = k'_2 \\ \text{III}'' & c''_3z = k''_3 \end{cases}$$

Si fuese nulo b'_2, ó b'_3, ó c'_2, ó c'_3, esta eliminación no sería necesaria.

En general: partiendo de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, se obtiene otro sistema equivalente trian-

gular, formado: por una de las ecuaciones, que contiene las n incógnitas; otra que carece de una; otra que carece de dos; ... ; otra con una sola incógnita. Hallado el único valor que satisface a ésta, se sustituye en la anterior, despejando en ella otra incógnita; ambos valores se sustituyen en la anterior ecuación, y se despeja otra, etc. Métodos prácticos para efectuar todo esto se verán en nota IV del Cap. XVII (vol. II).

ESCOLIO: Puede acontecer que en el sistema final aparezca alguna ecuación absurda, de primer miembro idénticamente nulo y segundo miembro distinto de cero; entonces, es incompatible el sistema dado; o puede reducirse a identidad una de dichas ecuaciones, sin que ninguna otra sea absurda, y entonces se pueden dar valores arbitrarios a una o más incógnitas, siendo el sistema indeterminado. En este caso, para el estudio completo del mismo convendrá acudir al teorema general que demostraremos en el § 15-5.

EJEMPLO: Sea el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4z &= -2 \\ 4y + 3z &= 1 \\ x + 6y + 5z &= \frac{8}{3} \end{aligned}\right\}$$

Puesto que la segunda ecuación no contiene x, eliminemos x entre la primera y la tercera; después eliminamos y entre la segunda y tercera. Obtenemos así estos sistemas equivalentes, y el último nos da la solución única del sistema propuesto.

$$\left.\begin{aligned} &\dots\dots\dots\dots \\ 4y + 3z &= 1 \\ 18y + 19z &= 10 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\dots\dots \\ &\dots\dots \\ 11z &= 11 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \frac{2}{3} \\ y &= -\frac{1}{2} \\ z &= 1 \end{aligned}$$

4. Regla de Cramer. — Aunque para la resolución numérica el método de reducción es el más rápido, sobre todo si los coeficientes son números decimales, tiene gran importancia la resolución por medio de determinantes, pues permite hacer la discusión completa de los sistemas lineales.

a) Dado un sistema con igual número de ecuaciones que incógnitas:

$$[15\text{-}7] \qquad \left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= k_n \end{aligned}\right.$$

el método de CRAMER es aplicable cuando es distinto de cero el determinante

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

de la matriz cuadrada que forman los coeficientes de las n ecuaciones.

Multiplicando la primera ecuación por A_{11} (adjunto de a_{11}), por A_{21} la segunda, ..., A_{n1} la última, y sumando, obtenemos otra ecuación:

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+...+a_{n1}A_{n1})\,x_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+...+a_{n2}A_{n1})\,x_2+$$
$$+\ldots(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+...+a_{nn}A_{n1})\,x_n=k_1A_{11}+k_2A_{21}+\ldots+k_nA_{n1},$$

la cual, en virtud de las propiedades de § 13-4, *b*, se reduce a ésta:

$$A\,x_1 = k_1\,A_{11} + k_2A_{21} + \ldots + k_n\,A_{n1}.$$

Análogamente, si multiplicamos las ecuaciones dadas por los adjuntos de los elementos de la columna j, es decir, por $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$, al sumar todas ellas se anulan los coeficientes de todas las incógnitas, excepto de x_j, y obtenemos:

[15-8] $$Ax_j = k_1\,A_{1j} + k_2A_{2j} + ... + k_n\,A_{nj} \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Todo sistema de valores que satisfaga a las ecuaciones dadas satisface también a éstas, que son combinaciones lineales de aquéllas. Mas siendo, por hipótesis, $A \neq 0$, los únicos valores que satisfacen a las ecuaciones [15-8] son:

[15-9] $$\begin{cases} x_1 = (k_1\,A_{11} + k_2\,A_{21} + \ldots + k_n\,A_{n1}) : A \\ x_2 = (k_1\,A_{12} + k_2\,A_{22} + \ldots + k_n\,A_{n2}) : A \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = (k_1\,A_{1n} + k_2A_{2n} + \ldots + k_n\,A_{nn}) : A \end{cases}$$

Recíprocamente, estos valores sustituídos en las ecuaciones [15-7], las satisfacen, como se comprueba directamente.

O bien (§ 14-2, *b*), siendo la columna $k_1, k_2, \ldots, k_n$, combinación lineal de las columnas de A (por no existir ningún menor orlado de A) existe seguramente, por lo menos, un sistema de valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen a todas las ecuaciones; y en virtud del teorema directo, tal sistema no puede ser otro que el [15-9].

b) Puede darse forma sencilla a las fórmulas [15-9], que dan la única solución del sistema, observando que el segundo miembro de [15-8] difiere del desarrollo:

$$a_{1j}\,A_{1j} + a_{2j}\,A_{2j} + \ldots + a_{nj}\,A_{nj} = A$$

solamente en haber sustituído los elementos $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ de la columna j, por los términos independientes $k_1, k_2, \ldots, k_n$; luego, dicho segundo miembro es el desarrollo del determinante obtenido haciendo esta sustitución.

Llamando $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ a los determinantes así obtenidos, las fórmulas [15-9] se escriben de este modo:

[15-10] $$x_1 = \frac{A'_1}{A} \quad x_2 = \frac{A'_2}{A}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{A'_n}{A}.$$

Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas cuyo determinante no es nulo, tiene solución única. El valor de cada

incógnita se obtiene dividiendo por el determinante del sistema el determinante formado sustituyendo por los términos constantes, que están en los segundos miembros, la columna que forman los coeficientes de dicha incógnita.

EJEMPLO: Sea el sistema:

$$\left\{\begin{aligned} 3x - 4z &= -2 \\ 4y + 3z &= 1 \\ x + 6y + 5z &= \frac{8}{3} \end{aligned}\right. \qquad A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 22.$$

Solución única:

$$x = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 3 \\ \frac{8}{3} & 6 & 5 \end{vmatrix} : 22, \quad y = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{8}{3} & 5 \end{vmatrix} : 22, \quad z = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & \frac{8}{3} \end{vmatrix} : 22$$

Es decir: $x = \frac{2}{3}, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z = 1.$

ESCOLIO: Obsérvese que si bien las soluciones de [15-7] satisfacen en todo caso a las ecuaciones [15-8], las cuales son combinaciones lineales de aquéllas, sólo puede asegurarse la equivalencia de ambos sistemas en el caso $A \neq 0$.

Si es $A = 0$, y alguno de los determinantes $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ es $A'_j \neq 0$, en el sistema [15-8] aparece la ecuación imposible $0 . x_j = A'_j$; luego, el sistema dado es *incompatible*.

Si además de ser $A = 0$, son $A'_1 = A'_2 = \ldots = A'_n = 0$, el sistema [15-8] es completamente indeterminado, pero nada puede asegurarse respecto del dado, el cual puede ser incompatible.

EJEMPLO: Es claramente incompatible el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 5 \end{aligned}\right\} \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

y sin embargo, siendo nulos $A'_1\ A'_2\ A'_3$, el sistema transformado [15-8] es indeterminado.

5. **Sistema general de ecuaciones lineales.** — Resuelto ya, por medio de la regla de CRAMER, el sistema lineal más sencillo, consideremos ahora el caso más general posible de n ecuaciones con m incógnitas (*sistema rectangular* si $n \neq m$):

[15-11]
$$\left|\begin{aligned} &a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1h}\,x_h + \ldots + a_{1m}\,x_m = k_1 \\ &a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2h}\,x_h + \ldots + a_{2m}\,x_m = k_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{h1}\,x_1 + a_{h2}\,x_2 + \ldots + a_{hh}\,x_h + \ldots + a_{hm}\,x_m = k_h \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nh}\,x_h + \ldots + a_{nm}\,x_m = k_n \end{aligned}\right.$$

Formemos la matriz de los coeficientes y la matriz de éstos ampliada con los términos constantes:

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{matrix}\right\} \text{(M)} \qquad \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & k_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & k_n \end{matrix}\right\} \text{(M')}$$

Sea h la característica de la primera, esto es, el orden máximo de los menores no nulos que se puedan formar en ella.

Si el sistema admite solución, es decir, si existe un conjunto de valores de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, tales que multiplicadas por ellos las columnas 1ª, 2ª, ..., mª, resulte la columna formada por las k, esta columna es combinación lineal de las anteriores; luego (§ 14-3, c_1), las dos matrices (M) y (M′) tienen igual característica.

Recíprocamente, si ambas tienen igual característica h, no sólo vamos a demostrar que el sistema admite solución, sino que vamos a hallarlas todas.

Sea A un menor principal de la matriz del sistema, el cual es, por lo tanto, menor principal de la matriz ampliada. Sin restringir la generalidad, podemos suponer que A está formado por las h primeras filas y las h primeras columnas, pues podemos alterar convenientemente el orden de las ecuaciones y el orden de las incógnitas. Llamaremos *incógnitas principales* a las h primeras, y *ecuaciones principales* a las h primeras. Puesto que cada una de las $n - h$ filas restantes de la matriz (M′) es una combinación lineal de las h primeras (§ 14-3, a), la ecuación correspondiente es una combinación lineal de las h primeras ecuaciones, es decir, es la suma de éstas después de multiplicadas por ciertos números, y por lo tanto (§ 15-3, a), es consecuencia de ellas, pudiendo suprimirse.

Queda así reducido el sistema a otro equivalente, formado por las h ecuaciones principales, que podemos escribir así:

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1h}x_h = k_1 - a_{1,h+1}x_{h+1} - \ldots - a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2h}x_h = k_2 - a_{2,h+1}x_{h+1} - \ldots - a_{2m}x_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \ldots + a_{hh}x_h = k_h - a_{h,h+1}x_{h+1} - \ldots - a_{hm}x_m \end{matrix}\right\}.$$

Para cada sistema de valores arbitrarios, dadas a las incógnitas $x_{h+1}, \ldots, x_m$, resulta un sistema de h ecuaciones con h incógnitas, y determinante no nulo, el cual, según la regla de Cramer, da una solución: $x_1, x_2, \ldots, x_h$, que es única. Resumiendo:

a) ***La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución, es que la matriz de los***

coeficientes y la matriz ampliada con los términos constantes tengan igual característica.

b) Si la característica h es igual al número m de incógnitas, la solución es única; si es $h < m$, hay infinitas soluciones, cada una de las cuales está determinada dando un sistema arbitrario de valores a las $m - h$ incógnitas no principales (ROUCHÉ-FROBENIUS).

ESCOLIO: Después de las reglas dadas en el § 14-3. *c*, para el cálculo de la característica de una matriz, y hallada por este método la característica de (M), es muy fácil hallar la de (M'), pues basta formar los orlados del menor principal A con la columna $k_1, k_2, \ldots, k_n$, y cada una de las $n - h$ filas. Si estos $n - h$ orlados (que suelen llamarse *determinantes característicos del sistema*) son nulos, la característica de (M') es también h, y el sistema es, por lo tanto, compatible. Si, por el contrario, hay alguno distinto de cero, la característica de (M') es $h + 1$, y el sistema es incompatible.

EJEMPLO: Estudiemos el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + u + 10v = 1 \\ 3z + 3u = 3/2 \\ -x - 2y + 1/2\,z - 5/2\,u - 10v = -7/4 \\ 5x + 10y - 19z - 4u + 50v = 1/2 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ -1 & -2 & 1/2 & -5/2 & -10 & -7/4 \\ 5 & 10 & -19 & -4 & 50 & 1/2 \end{array}\right|$$

Suprimidas las columnas quinta y segunda, que son proporcionales a la primera, queda una matriz de tres columnas; elegido el menor no nulo $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, sus orlados con la restante columna son:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & -5/2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & -19 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

luego, la característica de la matriz de coeficientes es $h = 2$. Los orlados del determinante principal con la columna de términos independientes son:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -7/4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 5 & -19 & 1/2 \end{vmatrix} = 0;$$

luego, también es 2 la característica de la matriz ampliada; y el sistema es, por lo tanto, compatible y equivalente a éste:

$$x - 2z = 1 - 2y - u - 10v$$
$$z = 1/2 - u$$

y como y, u, v pueden recibir valores arbitrarios, despejaremos x, z en función de ellos, resultando:

$$z = 1/2 - u, \qquad x = 2 - 2y - 3u - 10v.$$

Si damos, por ejemplo, los valores arbitrarios

$y = 1$, $u = 1/2$, $v = 0$, resulta: $z = 0$, $x = -3/2$

$y = u = v = 0$, resulta: $z = 1/2$, $x = 2$.

6. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas. — El sistema

$$[15\text{-}12] \qquad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1m}\,x_m = 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2m}\,x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nm}\,x_m = 0 \end{cases}$$

admite siempre la solución $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_m = 0$, y por lo tanto es siempre compatible. Sin embargo, como en Geometría analítica tiene su aplicación más importante, y esta solución trivial carece de significado geométrico, veamos cuándo el sistema admite solución formada por valores *que no son todos nulos*. Hallada una solución cualquiera no trivial:

$$x_1 = \alpha_1 \quad x_2 = \alpha_2 \quad \ldots, \quad x_m = \alpha_m$$

estos mismos valores, multiplicados por cualquier número λ, es decir, los valores

$$\lambda\,\alpha_1, \quad \lambda\,\alpha_2, \quad \ldots, \quad \lambda\,\alpha_m,$$

satisfacen también a todas las ecuaciones, y forman, por lo tanto, infinitas soluciones.

a) Aplicando el teorema de ROUCHÉ resulta: Si es $h = m$, admite la solución única $(0, 0, 0, \ldots, 0)$. Si es $h < m$, pueden darse valores arbitrarios a $m - h$ incógnitas, y por lo tanto, hay infinitas soluciones distintas de la $(0, 0, 0, \ldots, 0)$. Luego, *la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones homogéneas admita solución fuera de* $(0, 0, \ldots, 0)$, *es que la característica sea inferior al número de incógnitas.*

b) En particular, dado un sistema con igual número n de ecuaciones que de incógnitas, para que la característica sea menor que n es preciso y basta que sea nulo el determinante de los coeficientes.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas admita solución fuera de $(0, 0, \ldots, 0)$, *es que sea nulo el determinante de los coeficientes.*

Por lo tanto, según la definición dada en el § 15-3, *a*, este determinante de los coeficientes es la *resultante* del sistema.

c) Si en un sistema de ecuaciones homogéneas con tres incógnitas la característica alcanza el valor 2, máximo que puede tener si tiene soluciones fuera de $(0, 0, 0)$, y suprimimos las ecuaciones no principales, resulta un sistema de dos ecuaciones:

$$[15\text{-}13] \qquad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 = 0. \end{cases}$$

Aplicando la regla de CRAMER, después de pasar al segundo miembro los términos que contienen x_3, vienen expresados x_1, x_2 por los determinantes de segundo orden, obtenidos sustitu-

yendo la columna a_{13}, a_{23} en vez de las columnas 1ª y 2ª, multiplicados por $-x_3 : A$, que puede recibir valores arbitrarios. Sin embargo, conviene escribir el resultado en permutación circular, es decir:

Los valores de x_1, x_2, x_3 que satisfacen al sistema [15-13] *de dos ecuaciones homogéneas con 3 incógnitas y característica 2, vienen dados por valores proporcionales a los determinantes*

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

obtenidos de la matriz del sistema, al tomar respectivamente las columnas 2,3; 3,1; 1,2 para las incógnitas x_1, x_2, x_3.

d) En cambio, para un sistema de tres ecuaciones homogéneas con cuatro incógnitas y característica 3:

[15-14] $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0. \end{cases}$$

la regla análoga a la anterior debería modificarse en cuanto al signo, y es mejor aplicar la que corresponde en general a un sistema de ecuaciones homogéneas con n incógnitas de característica $n-1$, máximo que puede tener si tiene soluciones fuera de $(0, 0, \ldots, 0)$, tal que suprimidas las ecuaciones no principales, resulte un sistema de $n-1$ ecuaciones:

[15-15] $$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,1}\,x_1 + a_{n-1,2}\,x_2 + \ldots + a_{n-1,n}\,x_n = 0 \end{cases}$$

Entonces, aplicando a la última columna de la matriz del sistema la propiedad § 14-2, *b*, resulta, mediante los factores allí obtenidos,

$$-\frac{A_1}{A}, \quad -\frac{A_2}{A}, \quad \ldots, -\frac{A_{n-1}}{A},$$

tomados como soluciones,

$$-\frac{x_1}{x_n}, \quad -\frac{x_2}{x_n}, \quad \ldots, -\frac{x_{n-1}}{x_n},$$

la regla:

Los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ que satisfacen al sistema [15-15] *de $n-1$ ecuaciones homogéneas con n incógnitas y característica $n-1$, vienen dados por los determinantes:*

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

obtenidos suprimiendo en la matriz del sistema la columna 1ª, la 2ª, ..., la nª, a los cuales se antepone alternativamente el signo + ó —, y todos ellos multiplicados por un factor arbitrario λ.

Es indiferente comenzar por el signo + ó —, puesto que el factor λ puede ser positivo o negativo.

La regla anterior es equivalente a la siguiente:

Dado un sistema [15-15] *de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas y característica $n-1$, basta agregar las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como última fila de la matriz del sistema, para que los valores que satisfacen a éste sean proporcionales a los respectivos adjuntos de las incógnitas correspondientes.*

7. **Sustituciones lineales.** — En íntima conexión con la teoría de ecuaciones lineales están las sustituciones lineales, que tienen gran importancia para el estudio de la Geometría analítica.

Toda correspondencia entre n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y otras n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, cada una de las cuales es una combinación lineal de aquéllas, es decir, $y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n$, se llama *sustitución lineal*. Cada sustitución A está determinada dando los coeficientes por los que se deben multiplicar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para obtener $y_1, y_2, \ldots, y_n$, y se representa escribiendo así este cuadro de coeficientes:

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

Este cuadro A de coeficientes se llama *matriz* de la sustitución, y el determinante A de esta matriz recibe el nombre de *módulo* de la sustitución. Dadas dos sustituciones A y B lineales de matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{Bmatrix},$$

si a un sistema cualquiera de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se aplica A, y a las n variables obtenidas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se aplica B, las nuevas variables, $z_1, z_2, \ldots, z_n$, son también (§ 14-2, *a*) combinaciones lineales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; la sustitución lineal que transforma directamente el sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el $z_1, z_2, \ldots, z_n$, se llama *producto* de A por B, y se representa por $B.A$ de matriz:

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{Bmatrix}.$$

Cada coeficiente c_{ij} es (como se puede comprobar si se hacen sucesivamente las dos sustituciones) el producto escalar de la fila i de la matriz **B** por la columna j de la matriz A. Por lo tanto (§ 13-6):

El módulo del producto de dos sustituciones lineales es el producto de los módulos de ambas, es decir: C = B . A.

Las sustituciones A, B pueden aplicarse también en el orden B, A, de manera que B sirva para pasar de las x a las y, y A de las y a las z. Entonces, la sustitución que lleva de las x a las z es la sustitución lineal $A.B$, en general *distinta* de la $B.A$, es decir, *el producto de sustituciones no es en general conmutativo*. En caso de serlo, las respectivas sustituciones se llaman *conmutables*.

EJEMPLOS: 1.

A pesar de no ser A y B conmutables, obsérvese que los productos tienen módulos iguales: $B \cdot A = A \cdot B = -1$.

2.

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \qquad B = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = A \cdot B.$$

Se prueba fácilmente que el producto de sustituciones lineales es *asociativo*: $C(BA) = (CB)A$, y entonces pueden suprimirse los paréntesis y escribir: $C \cdot B \cdot A$.

Una sustitución de módulo nulo se llama *degenerada*.

Si A es la sustitución por la cual se pasa de las x a las y, el problema de la *inversión* de dicha sustitución consiste en hallar la *sustitución inversa*, A^{-1}, por la que se hallan las y en expresión lineal de las x. Si A no es degenerada, el problema tiene solución única por la regla de CRAMER (§ 15-4), y la sustitución A^{-1} es la [15-9], poniendo y en vez de k. La matriz de A^{-1} vemos es la *recíproca* de la A (§ 13-7, a), siendo también recíprocos los módulos.

El producto (conmutativo) de la sustitución A por su inversa A^{-1} es la *sustitución lineal idéntica* $x_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, cuya matriz tiene los elementos de la diagonal principal iguales a 1, y los demás, nulos.

EJERCICIOS

1. Hallar el "verdadero valor" para los valores de x en que carezca de sentido inmediato la expresión:

$$\left(x + \frac{a^2 x}{x^2 - a^2}\right) : \left(1 + \frac{a^3}{x^3 - a^3}\right).$$

2. 1º) Valor de $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ para $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$;

2º) Valor de $\dfrac{1 \quad ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}$ para $x = \dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a}{b} - 1}$;

3º) Valor de $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ para $x = \dfrac{2ab}{b^2+1}$.

3. Un zorro da 9 saltos mientras un lebrel, que lo persigue, da 6, pero 3 saltos de éste equivalen a 7 de aquél. Si el zorro lleva 60 saltos suyos de ventaja, ¿cuántos saltos dará el lebrel para alcanzar al zorro?

4. Determinar a, b, c, de modo que el producto de $x^3 - 3x^2 + 4$ por $x^3 + ax^2 + bx + c$ carezca de términos en x^4, x^3, x.

5. Se dan tres aleaciones de plata, cobre y oro, con la siguiente composición:

	Plata	*Cobre*	*Oro*
1ª	5 %	15 %	80 %
2ª	10 %	25 %	65 %
3ª	15 %	30 %	55 %

¿Cuántos gramos se han de tomar de cada una para obtener 20 gr de una nueva aleación que contenga 12 % de plata, 26 % de cobre y 62 % de oro?

6. Analizar y resolver los sistemas

$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 8 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y - 5z = 10 \\ x - 2y + z = 1 \\ 5x - y - 4z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y - 5z = 10 \\ x - 2y + z = 1 \\ 5x - y - 4z = 11. \end{cases}$$

7. Analizar y resolver los sistemas:

$$\begin{cases} 2x + 5z = 17 \\ 2y + z = 7 \\ x + 5y = 11 \\ x - 3y - 4z = -17 \\ -3x + 7y + 11z = 44 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 2y + 11 = 0 \\ 5z - y + x - 12 = 0 \\ 2z - x - 7 = 0 \\ 2x + y - 11z + 33 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 2t - 3u = 2 \\ 5x - 4y - 3z - 8t + u = 5 \\ -x + 3y + z + 5t - 2u = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - z + 2t - 3u = 2 \\ 5x - 4y - 3z - 8t + u = 0 \\ -x + 3y + z + 5t - 2u = 1. \end{cases}$$

8. Analizar y resolver los sistemas homogéneos:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + y - 2z + 3t = 0 \\ 3x - 3y + 4z + t = 0 \\ 7x + 5y - 8z + 5t = 0 \\ x - 4y + 3z + t = 0. \end{cases}$$

9. Probar que es condición necesaria, pero no suficiente, para la compatibilidad de un sistema no-homogéneo de $n + 1$ ecuaciones con n incógnitas, que sea nulo el determinante de todos los coeficientes y términos independientes.

NOTAS AL CAPÍTULO III

I. Grupos de sustituciones entre permutaciones. — *a*) *Definición: Dado un sistema de sustituciones entre n elementos* (§ 11-5), *si el producto* (§ 11-5, *b*) *de cada una por sí misma o por otra cualquiera del sistema pertenece también a éste, el sistema es un grupo* (§ 5-12, *b*) *respecto a dicho producto.* En efecto, por hipótesis, el producto es cerrado respecto del sistema, y basta probar que se cumplen las leyes asociativa, modular y de inversión. Hemos demostrado (§ 11-5, b_3) que el producto de sustituciones es siempre asociativo. Cumple la ley modular (§ 11-5, b_4), porque multiplicando una sustitución por sí misma repetidas veces, se llega a obtener la sustitución idéntica U (o unidad 1). Para verlo, supongamos descompuesta la sustitución S, en ciclos, sin elementos comunes:

$$S = \begin{pmatrix} a_2 a_3 \ldots a_1 & b_2 b_3 \ldots b_1 & \ldots l_2 l_3 \ldots l_1 \\ a_1 a_2 \ldots a_\alpha & b_1 b_2 \ldots b_\beta & \ldots l_1 l_2 \ldots l_\lambda \end{pmatrix} = L \ldots B . A \quad ,$$

por lo que se puede aplicar la regla § 11-5, b_6 multiplicando cada ciclo por el mismo, es decir:

a_1) *La potencia de una sustitución se forma elevando al mismo exponente cada uno de sus ciclos, si éstos carecen de elementos comunes* *. Es decir:

$$S^2 = A^2 . B^2 \ldots L^2 \quad , \text{ y, en general, } \quad S^p = A^p . B^p \ldots L^p \quad ;$$

como estos factores son sustituciones sin elementos comunes, para que S^p coincida con la sustitución idéntica es necesario y suficiente que cada uno sea igual a 1; es decir:

$$A^p = 1 \quad , \quad B^p = 1 \quad , \quad L^p = 1$$

y como las únicas potencias de un ciclo iguales a 1 son las que tienen un exponente múltiplo de su grado (§ 11-6, *b*), el menor valor de p que cumple las condiciones anteriores es:

$$g = \text{m.c.m.} \ (\alpha, \beta, \ldots, \lambda).$$

---

* Esto no puede hacerse con *cualquier* producto de ciclos, por no ser aplicable la propiedad conmutativa. Ejemplo:

$$S = (123)\ (13), \quad (123)^2 (13)^2 = (132) \text{ mientras que } S^2 = 1.$$

Este exponente mínimo, que da como potencia $S^g = 1$, se llama *orden* de S.

a_4) *El orden de una sustitución cualquiera es el* m. c. m. *de los órdenes de sus ciclos.*

A partir de $S^g = 1$, obtenemos:

$$S^{g+1} = S^g . S = S, S^{g+2} = S^g . S^2 = S^2, \quad \ldots, S^{2g-1} = S^g . S^{g-1} = S^{g-1} \quad ;$$

es decir, se reproducen las sustituciones S, S^2, ..., S^{g-1}; a partir de $S^{2g} = 1$, vuelven a reproducirse, etc. Por lo tanto:

a_5) *La sucesión de potencias de una sustitución cualquiera* S, *es periódica pura; el número de términos del período es el orden g de* S, *y las únicas potencias que coinciden con la sustitución idéntica son las de exponente múltiplo de g.*

La potencia S^{g-1} es la *inversa* S^{-1} de S (§ 11-5, b_7), por ser $S^{g-1} . S = S^g = 1$. Por lo tanto, se cumple la ley de inversión.

El número de sustituciones del grupo se llama *orden* del mismo. Un grupo de sustituciones puede ser abeliano o no (§ 5-12, b).

Ejemplos: 1. Forman un grupo abeliano de cuarto orden las sustituciones

$$1, \quad (a\, b)\,(c\, d), \quad (a\, b), \quad (c\, d).$$

2. Forman un grupo no abeliano de sexto orden las sustituciones

$$1, \quad (a\, b\, c), \quad (a\, c\, b), \quad (a\, b), \quad (a\, c), \quad (b\, c).$$

b) *Grupos y subgrupos notables.* — Si todas las sustituciones de un grupo g figuran entre las de otro grupo G, se dice que g es un *subgrupo* de G. Subgrupos triviales de todo grupo G son los formados por la sola sustitución idéntica y por el mismo grupo G; los demás que pueda tener G se llaman *subgrupos propios* de G.

Ejemplo 3: El grupo 1, $(a\, b)\,(c\, d)$, es subgrupo del dado en el ejemplo 1.

b_1) Todas las $n!$ sustituciones posibles entre n elementos forman, evidentemente, un grupo. Éste se llama *grupo simétrico*, y su orden tiene el valor máximo posible, que es $n!$

b_2) Todas las sustituciones *pares* (§ 11-6, f) entre n elementos forman un grupo, puesto que el producto de dos sustituciones, cada una de las cuales se compone de un número par de trasposiciones, tiene también un número par de trasposiciones, es decir, también es una sustitución par. Este grupo se llama *alternado*, y su orden es $n!/2$. En cambio, las $n!/2$ sustituciones impares no forman grupo, pues el producto de dos de ellas es par.

b_3) Otro grupo notable es el formado por las g potencias distintas de una sustitución cualquiera S:

[III-1] $$S^0 = 1, S, S^2, \ldots, S^{g-1}.$$

En efecto, el producto de una de ellas por sí misma o por otra, es una potencia de S, y por lo tanto, en virtud de la periodicidad (a_5), es igual a una de las sustituciones [III-1].

Este grupo, formado por las g potencias distintas de una sustitución S, se llama *cíclico*; su orden es igual al orden g de S.

De la propiedad asociativa (§ 11-5, b_3) se deduce que todo grupo cíclico es abeliano; en cambio, en el ejemplo 1 se tiene un grupo abeliano que no es cíclico.

Todo grupo que no sea cíclico tiene como subgrupos todos los grupos cíclicos formados por las potencias de cada una de las sustituciones que contiene.

Ejemplos: 4. He aquí el grupo cíclico engendrado por $S = (a\, b\, c)\,(d\, e)\,(f\, g)$:

$$S, S^2 = (a\,c\,b) \quad , \quad S^3 = (d\,e)(f\,g) \quad , \quad S^4 = (a\,b\,c)$$
$$S^5 = (a\,c\,b)(d\,e)(f\,g) \quad , \quad S^6 = 1.$$

¿Cuál de sus elementos es S^{-1}?

5. Los subgrupos cíclicos del grupo abeliano G:

$$1, \quad (a\,b)(c\,d), \quad (a\,d\,b\,c), \quad (a\,c\,b\,d),$$

son 1, el grupo del ejemplo 3 y el mismo G.

b_4) Todas las sustituciones pares que figuran en un grupo G forman un grupo g, que es subgrupo de G; en efecto, el producto de dos sustituciones de g figura desde luego en G, y como es par, pertenece a g.

Sabemos que el grupo simétrico (b_1) tiene igual número de sustituciones pares que impares; también en el grupo cíclico [III-1], o son todas pares (si S es par), o son alternativamente pares e impares (si S es impar). En general:

Si no son pares todas las sustituciones de un grupo G, *las sustituciones pares que contiene forman un subgrupo g, cuyo orden es la mitad del de* G.

Sean, en efecto:

$S_1, S_2, \ldots, S_p$ las sustituciones pares de G.
$T_1, T_2, \ldots, T_q$ „ „ impares „ G.

Las p sustituciones $S_1 T_1, S_2 T_1, \ldots, S_p T_1$ son impares, y todas distintas (§ 11-5, b_2); luego, es $q \geqq p$.

Las q sustituciones $T_1 T_1, T_2 T_1, \ldots, T_q T_1$ son pares, y todas distintas; luego, $p \geqq q$.

Por lo tanto $p = q$, es decir, la mitad de las sustituciones de G, son pares (y forman un grupo), y la otra mitad son impares (no formando grupo).

c) *Teorema de* GALOIS-LAGRANGE. — *Si g es un subgrupo de* G, *el orden de* G *es múltiplo del orden de g.*

Sean éstas las p sustituciones de que consta g:

[III-2] $$S_0 = 1, \quad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_{p-1}.$$

Todas ellas pertenecen a G, y fuera de los casos triviales, éste contiene alguna otra sustitución T_1 distinta de todas las [III-2]; por tanto, también figuran en G los productos:

[III-3] $$T_1, \quad S_1 T_1, \quad S_2 T_1, \quad \ldots, \quad S_{p-1} T_1 \quad ,$$

que son distintos entre sí (§ 11-5, b_2), por serlo las sustituciones [III-2]; también son las sustituciones [III-3] distintas de las [III-2], pues si fuese

$$S_i T_1 = S_j \quad ,$$

multiplicando ambos miembros por S_i^{-1} resultaría

$$S_i^{-1} S_i T_1 = S_i^{-1} S_j \quad \text{o sea:} \quad T_1 = S_i^{-1} S_j \quad ;$$

pero S_j y S_i^{-1} son sustituciones de g; luego, también su producto. No sería, por lo tanto, T_1 distinta de las [III-2], como hemos supuesto.

Si G no contiene otra sustitución que las [III-2] y [III-3], su orden es $m = 2p$, y el teorema queda demostrado. Si contiene una nueva sustitución T_2, también contiene las sustituciones

[III-4] $$T_2, \quad S_1 T_2, \quad S_2 T_2, \quad \ldots, \quad S_{p-1} T_2 \quad ,$$

las cuales son distintas entre sí y de las [III-2], por la misma razón que antes. También son distintas de las [III-3], pues si fuese

$$S_i T_2 = S_j T_1 \quad ,$$

multiplicando ambos miembros por S_i^{-1} resultaría

$$S_i^{-1} S_i T_2 = S_i^{-1} S_j T_1 \quad \text{o sea:} \quad T_2 = (S_i^{-1} S_j) T_1 \quad ,$$

y como S_i^{-1} y S_j pertenecen a g, también su producto $S_i^{-1} S_j$; luego, éste coincide con una de las sustituciones [III-2], por ejemplo, S_h, y resulta-

ría, en resumen, $T_2 = S_h T_1$, es decir: T_2 figuraría entre las [III-3], contra lo supuesto.

Si G no contiene otra sustitución que las [III-2], [III-3] y [III-4], el teorema queda demostrado, pues es $m = 3p$. Si, por el contrario, contiene una nueva sustitución T_3, procederemos como antes; y así siguiendo, llegaremos a agotar todas las sustituciones de G, obteniéndolas ordenadas en el cuadro siguiente:

$$
\text{[III-5]} \qquad
\begin{array}{lllll}
1 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{p-1} \\
T_1 & S_1\, T_1 & S_2\, T_1 & \ldots & S_{p-1}\, T_1 \\
T_2 & S_1\, T_2 & S_2\, T_2 & \ldots & S_{p-1}\, T_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
T_{q-1} & S_1\, T_{q-1} & S_2\, T_{q-1} & \ldots & S_{p-1}\, T_{q-1}
\end{array}
$$

y por lo tanto, es $m = p\,q$, como expresa el enunciado.

d) Índice de un grupo. — Corolarios inmediatos del teorema de GALOIS-LAGRANGE, son éstos:

Puesto que todo grupo G es subgrupo del simétrico, y éste tiene el orden $n!$, resulta:

d_1) *El orden m de todo grupo de sustituciones entre n elementos es un divisor de $n!$.*

Resulta de aquí que todas las $n!$ sustituciones posibles pueden clasificarse en la forma [III-5], poniendo en primera fila las m sustituciones de G, y en cada una de las siguientes los productos de éstas por nuevas sustituciones $T_1, T_2, \ldots, T_{q-1}$.

Al cuadro de todas las $n!$ sustituciones así ordenadas lo llamaremos brevemente *cuadro de* LAGRANGE del grupo G.

El número de filas de este cuadro, es decir, el cociente $n!/m$, se llama *índice* del grupo G.

d_2) *El orden de toda sustitución contenida en un grupo* G *es un divisor del orden de este grupo.*

En efecto, basta observar que las potencias de S forman un subgrupo de G, y que su orden es precisamente el orden g, es decir, el menor exponente que cumple la condición $S^g = 1$.

Observe el lector que en el cuadro [III-5], ninguna de las filas, excepto la primera, constituye grupo; pues si fuese, por ejemplo:

$$S_i\, T_1 \,.\, S_j\, T_1 = S_k\, T_1 \quad ,$$

suprimiendo el factor T_1 y despejando la otra T_1, resultaría

$$T_1 = S_i^{-1} \,.\, S_k \,.\, S_j^{-1} \quad ,$$

es decir: T_1 pertenecería al subgrupo g, contra lo supuesto.

II. **Bibliografía.** — 1. Como fundador de la Combinatoria, puede considerarse a SANTIAGO BERNOULLI, por su *Ars conjectandi* (1713), la que en los primeros años del siglo XIX adquiere gran preponderancia (HINDENBURG, KRAMP, ETTINGHAUSEN, ...). Modernamente, ha reanudado estos estudios combinatorios la escuela inglesa, teniendo como principales representantes a MUIR y MAC-MAHON.

Para ampliar las nociones expuestas, pueden consultarse los tratados completos:

E. NETTO: *Lehrbuch der Combinatorik* (2ª ed., Chelsea, N. Y., 1958). Contiene todos los resultados clásicos y lo más interesante de las modernas investigaciones.

P. A. MAC-MAHON: *Combinatory Analysis.* (Cambridge Univ. Press, dos vol., 1915). Sistematización de las teorías desarrolladas modernamente por la escuela inglesa, poniendo como base de todas ellas el problema de la partición de los números.

Entre las tablas de números combinatorios citemos;

J. C. P. MILLER: *Table of binomial coefficients.* (Royal Soc. Math Tables. Cambridge Univ. Press, 1954).

2. Aquí hemos dado un extracto del contenido sobre determinantes y ecuaciones lineales del *Análisis algebraico*, de J. REY PASTOR (citado en Cap. I, nota IV-1). Obra de análogo lineamiento y de carácter más elemental y simplificado es la reciente de

F. VERA: *Matemáticas para ingenieros*: I. *Análisis algebraico.* (Buenos Aires, 1950).

Contiene una exposición adecuada sobre determinantes y ecuaciones lineales la obra elemental, de gran claridad de estilo y con numerosos ejemplos numéricos y ejercicios:

R. A. BEAUMONT y R. W. BALL: *Introduction to modern algebra and matrix theory.* (Rinehart, Nueva York, 1954).

Conteniendo análisis combinatorio, vectores, matrices y determinantes, destaca los temas importantes en las teorías físicas modernas, el libro elemental para principiantes:

M. MORAND: *Introduction mathématique aux théories physiques modernes. 1re Partie*: *Nombres complexes, nombres hypercomplexes, matrices, opérateurs, applications élémentaires.* (Lib. Vuibert, París, 1947).

El tratado elemental de carácter enciclopédico más recomendable para quienes deseen ampliar las nociones de este capítulo, estudiando multitud de determinantes especiales (de PUCHTA-NOTHER, de ZEIPEL, de SMITH, circulantes ortogonales, cúbicos, etc.), así como teoremas diversos sobre determinantes formados con menores de otros, es el siguiente:

E. PASCAL: *I determinanti.* (Manuali Hoepli, 1897).

También de carácter elemental, con muchos detalles interesantes y ejemplos, está el más moderno de:

F. NEISS: *Determinanten und Matrizen.* (5ª ed., Springer, Berlín, 1959).

La obra enciclopédica más completa (hasta el año 1860), indispensable a quien desee hacer un estudio sobre cualquier clase especial de determinantes, es la siguiente:

TH. MUIR: *The theory of determinants in the historical order of development.* (2 vols., Macmillan, Londres, 1906 y 1911).

Para estudiar los modernos problemas, especialmente los determinantes de FREDHOLM y los infinitos, de gran importancia para la teoría de ecuaciones integrales, consúltese el tratado sistemático (no enciclopédico):

G. KOWALEWSKI: *Einführung in die Determinantentheorie.* (3ª ed., Veit, Berlín, Chelsea, Nueva York, 1942; 4ª ed., W. de Gruyter, Berlín, 1954).

3. Siendo la teoría de los grupos de sustituciones el fundamento del álgebra moderna, edificada según el método iniciado por GALOIS, es muy abundante la bibliografía consagrada a ella. Como obra adecuada a principiantes que deseen ampliar las nociones expuestas aquí, recordamos: *A survey of modern algebra*, de G. BIRKHOFF y S. MAC LANE (citada en Cap. I, nota IV-5). Obra didáctica es también:

W. LEDERMAN: *Introduction to the theory of finite groups.* (Oliver and Boyd, Edinburgo, 1949).

Introducción muy adecuada para principiantes es la obra, traducida del ruso:

P. S. ALEXANDROFF: *An introduction to the theory of groups* (Hafner, N. Y., 1959); *Einführung in die Gruppentheorie* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín, 1954).

La teoría de grupos abstractos está magistralmente expuesta en la obra de B. L. VAN DER WAERDEN (citada en Cap. I, nota IV-7), y en el famoso y conciso tratado monográfico alemán, de presentación renovada en su reciente traducción inglesa:

H. ZASSENHAUS: *The theory of groups.* (Chelsea, Nueva York, 1949).

En particular, los grupos finitos abstractos, con abundante bibliografía, se estudian detenidamente en el tratado de:

A. SPEISER: *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.* (4ª ed., Birkhäuser, Basilea, 1956).

Muy completa, de carácter superior y claramente escrita, es la obra:

G. SCORZA: *Gruppi astratti.* (Ediz. Cremonese, Perella, Roma, 1942).

Una cuidadosa y concisa presentación sobre grupos, cuerpos y su aplicación a la teoría de GALOIS sobre ecuaciones, es

G. ZAPPA: *Gruppi, corpi, equazioni.* (2ª ed., Lib. Ed. Liguori, Nápoles, 1954).

Contiene modernas investigaciones la obra traducida del ruso:

A. G. KUROSCH: *Gruppentheorie.* (Akad. Verlag, Berlín, 1953), *The theory of groups*, vol. I, 1955; vol. II, 1956 (Chelsea, Nueva York).

También de rico contenido y orientación moderna son:

W. SPECHT: *Gruppenteorie* (Springer, Berlín, 1956);

M. HALL, JR.: *The theory of groups* (Macmillan, Nueva York, 1959).

De carácter matemático-humanístico, sobre la importancia del concepto de grupo en las ciencias físico-naturales, son las conferencias de:

H. WEYL: *Symmetry.* (Princeton Univ. Press, 1952); trad. alemana: *Symmetrie* (Birkhäuser, Basilea, 1955).

4. Nada hemos indicado en el texto sobre los sistemas de sustituciones lineales (§ 15-7) que forman grupo, base de la geometría moderna, según propuso KLEIN en su famoso programa de Erlangen (1872). Son particularmente importantes los correspondientes al álgebra lineal de los espacios vectoriales (cfr. Cap. II, nota III), para cuyo detenido estudio debe conocerse a fondo el álgebra de matrices. Recomendamos, como iniciación, las obras citadas en (3). Particularmente sobre matrices, está escrito sencillamente:

R. A. FRAZIER, W. J. DUNCAN y A. R. COLLAR: *Elementary matrices and some applications to dynamic and differential equations.* (Cambridge, Univ. Press, 1938, reimpr., 1946).

Para popularizar el cálculo de matrices, escrita en forma elemental, dedicada a ingenieros, con referencias históricas, ejemplos y bibliografía, está la obra:

M. DENIS-PAPIN y A. KAUFMANN: *Cours de Calcul matriciel appliqué.* (Albin Michel, París, 1951).

Obra dedicada también a ingenieros, con muchos ejemplos bien detallados, métodos numéricos modernos para resolución de sistemas lineales algebraicos, procesos de iteración y aplicaciones, es

R. ZURMÜHL: *Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure.* (Springer, Berlín, 2ª ed., 1958).

Obra importante, que comprende en pocas páginas resultados hasta entonces dispersos, es la de:

C. C. MAC DUFFEE: *Theory of matrices.* (Ergebnisse der Mathematik, Springer, Berlín, 1933; 2ª ed., Chelsea, Nueva York, 1949).

Magistral muestra de unificación por el método algebraico abstracto de las diversas teorías matemáticas basadas en los grupos lineales, incluyendo la teoría general de la representación, contienen las 94 páginas de:

B. L. VAN DER WAERDEN: *Gruppen von linearen Transformationen.* (Ergebnisse der Mathematik, Springer, Berlín, 1935; Chelsea, Nueva York).

Exposición concisa de ideas y métodos empleados en teorías algebraicas, escrita para matemáticos no especialistas en ellas, es

D. E. LITTLEWOOD: *The skeleton key of Mathematics. A single account of complex algebraic theories* (Hutchinson's Univ. Lib., Londres, 1949).

CAPÍTULO IV

ALGORITMO ALGEBRAICO

§ 16. PRINCIPIO DE IDENTIDAD. OPERACIONES RACIONALES CON POLINOMIOS

1. Principio de identidad de los polinomios de una variable. — Este teorema, de importancia capital en toda el Álgebra, tiene alcance muy distinto, según se trate de polinomios de una o más variables, casos que estudiamos separadamente.

Definiciones. — Un polinomio de cualquier número de variables se llama *idénticamente nulo* cuando son nulos sus coeficientes; el polinomio *reducido* es, pues, el número cero.

Dos polinomios se llaman *idénticos* cuando constan de los mismos términos con iguales coeficientes, es decir, cuando la diferencia de ambos polinomios es un polinomio idénticamente nulo.

La equivalencia de polinomios se ha definido ya anteriormente (§ 15-1, b).

a) *Si un polinomio* $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ *de coeficientes reales o complejos, se anula para más de* n *valores reales o complejos de* x*, es idénticamente nulo.*

Supongamos que los valores distintos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$, anulen al polinomio, es decir:

[16-1] $$a_0 \alpha_i^n + a_1 \alpha_i^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Entonces, como el determinante de VANDERMONDE:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 & \alpha_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_n^n & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

es distinto de cero (§ 13-7, b_2), el sistema de $n+1$ ecuaciones lineales homogéneas [16-1] de coeficientes $\alpha_i^n, \alpha_i^{n-1}, \ldots, \alpha_i, 1$, $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ y $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tiene como única solución (§ 15-6, b) $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, lo que demuestra el teorema.

b) *Si dos polinomios, de coeficientes reales o complejos.*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \quad ,$$
$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

toman iguales valores numéricos para un número de valores

reales o complejos de x superior a los grados de ambos, los polinomios son idénticos.

En efecto, el polinomio diferencia $f(x) - g(x)$ es de grado $\leqq n$ ó $\leqq m$, y se anula para un número de valores superiores a su grado; luego, es idénticamente nulo.

NOTA: El principio de identidad puede no subsistir para cualquier sistema de números, aun formando cuerpo o campo de racionalidad (§ 5-12, *d*). Así, el sistema de enteros (mód. 3) forma cuerpo (§ 5-12, d_1), y respecto de él, los polinomios $f(x) = x^4 + x$ y $g(x) = x^3 + x^2$ *no* son idénticos, siendo sin embargo equivalentes, pues $f(0) = g(0) = 0$; $f(1) = g(1) = 2$; $f(2) = g(2) = 0$. ¿Dónde falla aquí la demostración del principio de identidad mediante el determinante de VANDERMONDE? Obsérvese que el sistema de enteros (mód. 3) tiene sólo un número *finito* de elementos *distintos*.

Estos teoremas de identidad para polinomios de una o más variables son válidos en campos de racionalidad que tengan infinitos elementos distintos, pero por comodidad los exponemos referidos en general al campo complejo.

2. Principio de identidad de polinomios de varias variables. *a*) *Si un polinomio de h variables es equivalente a cero, es decir* (§ 15-1, *b*), *si se anula para todo sistema de valores numéricos, entonces es idénticamente nulo en el campo real o complejo.*

Haremos la demostración por inducción. El teorema ya está probado para una variable (pues queda incluído en § 16-1, *a* como caso particular), supongámoslo cierto hasta $h - 1$ variables, y veremos que vale para un polinomio de h variables. En efecto, ordenado éste respecto de una de ellas, lo escribiremos así:

$$P(x, y, \ldots, t) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Fijado un sistema de valores cualesquiera $(y_i\ z_i, \ldots, t_i)$, los coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_n$, que son expresiones enteras respecto de $(y, z, \ldots, t)$, se convierten en números; y como el polinomio $P(x, y_i, z_i, \ldots, t_i)$ de variable x se anula para infinitos valores de x, deben ser nulos todos los coeficientes: $A_0(y_i, z_i, \ldots, t_i) = 0, A_1(y_i, z_i, \ldots, t_i) = 0, \ldots, A_n(y_i, z_i, \ldots, t_i) = 0$; pero estas igualdades deben verificarse cualquiera sea el sistema de valores $(y_i, z_i, \ldots, t_i)$; luego, estos polinomios de $h-1$ variables, equivalentes a cero, son idénticamente nulos, y por lo tanto, también P.

b) ***Si dos polinomios de h variables son equivalentes, es decir, si tienen valores numéricos iguales para todos los sistemas de valores de sus variables, son idénticos en el campo real o complejo.***

Es corolario inmediato del anterior, como en el caso de una variable.

Nótese que si bien la igualdad de valores numéricos de dos polinomios para *infinitos* sistemas de valores de sus h variables lleva consigo la *identidad* de ambos cuando es $h = 1$, no sucede lo propio si $h > 1$. Por ejemplo, los polinomios no idénticos $x y^2 - 2x + y$ e $y^3 - x$ toman iguales valores numéricos para los infinitos valores de x e y que cumplen la condición $x = y$.

Demostrado esto, en lo sucesivo podemos usar indistintamente las palabras *identidad* y *equivalencia* (§ 15-1, *b*).

c) Dada una expresión racional que carezca de sentido para cierto valor $x = \alpha$, hemos convenido (§ 15-1, *b*) en asignarle como valor el mismo valor β que tome otra expresión P/Q deducida de aquélla por transformaciones algebraicas convenientes. Queda todavía en pie la duda de si este valor β será distinto al tomar otra expresión P′/Q′, transformada por operaciones distintas. El principio de identidad resuelve la cuestión, pues verificándose para infinitos valores de x la igualdad

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} \quad \text{y por lo tanto:} \quad P\,Q' = Q\,P',$$

estos dos polinomios P Q′ y Q P′ son idénticamente iguales, y por lo tanto, son iguales también P/Q y P′/Q′ para el valor $x = \alpha$.

3. **Operaciones enteras con polinomios.** — *a*) Se llama *suma* de varias expresiones enteras a una expresión entera *reducida* (§ 15-1, *c*), cuyo valor numérico es igual a la suma de los valores numéricos de aquéllas, cualquiera sea el sistema de valores atribuídos a las letras que contienen.

Este problema queda incluído en el § 15-1, c_1, pues la suma indicada de varias expresiones enteras puede considerarse como una expresión entera, y basta reducir ésta a su forma típica. Reducidos los sumandos a monomios o polinomios, esto se consigue fácilmente con sólo formar un polinomio único con los términos de todos los sumandos, reduciendo después los términos semejantes y suprimiendo todos los términos cuyo coeficiente final sea nulo.

Además del polinomio que hemos dado como suma de otros dos, ¿existirá algún otro cuyo valor numérico coincida con la suma de valores de aquéllos, cualesquiera sean los valores atribuídos a las variables? Con el principio de identidad, vemos que todo polinomio que cumpla esta condición, por tener igual valor numérico que el allí obtenido, para todos los valores de las variables, debe ser del mismo grado que él y tener sus mismos coeficientes; luego, es la única solución.

Nótese que la suma de expresiones enteras tiene las propiedades conmutativa, asociativa y uniforme (§ 2-4, *a*).

Obsérvese que, respecto de una letra o de varias letras, el polinomio obtenido como suma o diferencia de varios es de grado no superior al mayor de los grados de éstos, pudiendo ser de grado inferior únicamente cuando haya dos o más polinomios de grado máximo y se reduzcan los términos de este grado.

EJEMPLO:

$$-\left[2x^5y^2z - \frac{3}{1}x^5yz\right] - \left[-2x^4y - [(y^3 - 3x^4yz^2) - (2yz - 2y)]\right] +$$

$$+ 3x^4yz^3 - \left(-\frac{3}{2}yz + 2x^4y\right) - \left[-\left(\frac{1}{2}yz - \frac{2}{5}y^3\right) + x^5yz\right] \equiv$$

$$\equiv -2x^5y^2z + \frac{1}{3}x^5yz + 2x^4y + y^3 - 3x^4yz^2 - 2yz + 2y + 3x^4yz^3 +$$

$$+\frac{3}{2}yz-2x^4y+\frac{1}{2}yz-\frac{2}{5}y^3-x^5yz=-2x^6y^2z-\frac{2}{3}x^6yz+\frac{3}{5}y^3+2y.$$

b) Se llama *producto* de varias expresiones enteras a otra expresión entera, cuyo valor numérico es el producto de los valores numéricos de aquéllas, para cada sistema de valores atribuídos a las letras que contienen.

Por la misma razón dada en (a), basta saber multiplicar monomios y polinomios, y esto se logra aplicando las reglas dadas en § 4-9 para el producto de sumas y diferencias.

El polinomio obtenido, que es único por el principio de identidad, tiene las siguientes propiedades:

b_1) *El término del producto que tiene mayor (menor) grado respecto de una letra, o de varias letras, es el producto de los términos de mayor (menor) grado, respecto de dicha letra o letras, en el multiplicando y en el multiplicador.*

En efecto, basta observar que dicho término del producto no se reduce con ningún otro, pues todos los demás son de menor (mayor) grado.

Por consiguiente:

b_2) *El producto de dos polinomios reducidos consta por lo menos de dos términos.*

b_3) *El grado del producto, respecto de una letra, o de varias letras, es la suma de los grados de los factores respecto de dicha letra o letras.*

b_4) *El producto de polinomios homogéneos es un polinomio homogéneo.*

b_5) *Si en el campo real o complejo el producto* $f(x).\varphi(x)$ *de dos polinomios de una variable y de grados, m y n, respectivamente, se anula para más de $m+n$ valores distintos, uno por lo menos de los dos polinomios es idénticamente nulo.*

Puesto que cada uno de dichos valores anula a $f(x)$ o a $\varphi(x)$, y el número de ellos es mayor que $m+n$, o se anula $f(x)$ para más de m valores, o se anula $\varphi(x)$ para más de n valores; por lo tanto, uno u otro es idénticamente nulo (§ 16-1, a).

b_6) *Si en el campo real o complejo el producto* $P(x, y, z, \ldots, t).Q(x, y, z, \ldots, t)$ *de dos polinomios es equivalente a cero, por lo menos uno de ellos es idénticamente nulo.*

Demos a la variable x un valor x_1; para todo valor de $y, z, \ldots, t$, deberá, pues, verificarse la igualdad:

$$P(x_1, y, z, \ldots, t).Q(x_1, y, z, \ldots, t) = 0.$$

Supuesto cierto el teorema para $h-1$ variables, será equivalente a 0 uno de los dos factores $P(x_1, y, z, \ldots, t)$ o $Q(x_1, y, \ldots, t)$. Dando a x otro valor x_2, será equivalente a 0 el polinomio $P(x_2, y, z, \ldots, t)$, o bien el $Q(x_2, y, z, \ldots, t)$, etc. Siguiendo así, si damos a x un número de valores superior a la suma de los grados de ambos polinomios, uno de éstos, por lo

menos, por ejemplo, el P $(x, y, \ldots, t)$, se anula para todos los valores de $y, z, \ldots, t$ y para un número de valores de x superior a su grado; luego (§ 16-1, a), se anula también para todo valor de x; por lo tanto (§ 16-2, a), es idénticamente nulo.

Escolio: Si los polinomios son complicados, convendrá ordenarlos según las potencias de una letra en la forma [15-1], y efectuar sucesivamente el producto de uno de ellos por cada término del otro, siendo suficiente con frecuencia escribir los coeficientes separados y operar con éstos, cuidando de poner un coeficiente nulo para cada término intermedio que falte.

Ejemplos:

$$
\begin{array}{llll|llll}
4x^3 & -2abx^2 & +cx & & +4, & -2ab, & +c & \\
 & 2cx^3 & +abcx & -\tfrac{1}{2}c^2 & +2c, & +abc, & -\tfrac{1}{2}c^2 & \\
\hline
8cx^6 & -4abcx^4 & +2c^2x^3 & & +8c & -4abc & +2c^2 & \\
 & +4abcx^4 & -2a^2b^2cx^3 & +abc^2x^2 & & +4abc & -2a^2b^2c & +abc^2 \\
 & & -2c^2x^3 & +abc^2x^2-\tfrac{1}{2}c^3x & & & -2c^2 & +abc^2-\tfrac{1}{2}c^3 \\
\hline
8cx^6 & & -2a^2b^2cx^3 & +2abc^2x^2-\tfrac{1}{2}c^3x & 8c, & 0, & -2a^2b^2c, & +2abc^2, -\tfrac{1}{2}c^3
\end{array}
$$

Otra disposición conveniente, cuando los polinomios tienen varias letras y hay varios términos que contienen la misma potencia de la letra ordenatriz, es ésta:

$$
\begin{array}{r|r|l}
x & z^2-2x^2 & z+4x^2y \\
-y & -2y^2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
z^3 \quad +2xz^2-4xy & z-8y^3 \\
-1/2\,y^2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
\hline
x & z^5-2x^2 & z^4+4x^2y & z^3+8x^3y & z^2-16x^3y^2 & z-32x^2y^4 \\
-y & -2y^2 & -4x^3 & +8x^3y & -2x^2y^3 & \\
 & +2x^2 & -4xy^2 & +8xy^3 & +16x^2y^3 & \\
 & -2xy & -4x^2y & +x^2y^2 & +16y^6 & \\
 & & +4xy^2 & +y^4 & & \\
 & & -\tfrac{1}{2}xy^2 & -8xy^3 & & \\
 & & +\tfrac{1}{2}y^3 & +8y^4 & & \\
\hline
x & -2y^2 & z^4-4x^3 & z^3+x^2y^2 & z^2-16x^3y^2 & z-32x^2y^4 \\
-y & z^5-2xy & -\tfrac{1}{2}xy^2 & +9y^4 & +14x^2y^3 & \\
 & & +\tfrac{1}{2}y^3 & +16x^3y & +16y^5 &
\end{array}
$$

Obsérvese, por ejemplo, que los términos de mayor grado en x son:

$$(-2z+4y)x^2 \qquad \text{y} \qquad (2z^2-4yz)x;$$

y en el producto, los términos de grado máximo en x componen el producto de éstos. Asimismo, los términos de mayor grado respecto de x e y, son: $4x^2y, -8y^3$; y en el producto es $-32x^2y^4$, de grado 6, suma de los grados de ambos, etc.

4. División entera de dos polinomios de una variable. — La suma, diferencia y producto de expresiones enteras es otra expresión entera; es decir: dentro del campo de las expresiones enteras son siempre posibles las tres operaciones de adición, sustracción y multiplicación, llamadas también *operaciones enteras*. En cambio, dadas dos expresiones enteras, A y B, no

siempre es posible hallar otra expresión entera que, multiplicada por B, dé el producto A; pero sí es posible con solución única el problema de la división *entera*, análoga a la de los números naturales (§ 5-1), y que para los polinomios de una variable se plantea así:

Dados en el campo real o complejo los polinomios A *y* B *en* x, *de grados* m *y* n, *hallar un polinomio* Q *y otro* R *que cumplan las dos condiciones*:

[16-2] $A \equiv B\,Q + R$; grado de R, menor que n.

Obtenemos fácilmente dos polinomios Q y R que cumplen estas dos condiciones, del siguiente modo: sea $c_0 = a_0/b_0$ el cociente exacto de a_0 por b_0, y restemos de A el producto $B\,c_0\,x^{m-n}$, obteniendo así un polinomio A′, cuyo grado es a lo más $m - 1$ (puesto que el término $a_0\,x^m$ se ha reducido con el primero del polinomio sustraendo), y que está ligado con A por la relación

[16-3] $$A \equiv B\,c_0\,x^{m-n} + A'.$$

Si el primer término de A′ es $a'_0\,x^{m-p}$, restaremos del polinomio A′ el producto $B\,c_1\,x^{m-n-p}$, siendo $c_1 = a'_0/b_0$, y obtenemos un resto A″, cuyo primer término, $a''_0\,x^{m-p-q}$, es a lo sumo de grado $m - p - 1$, estando ligado A′ y B por la relación

[16-4] $$A' \equiv Bc_1\,x^{m-n-p} + A'',$$

y análogamente:

[16-5] $$A'' \equiv B\,c_2\,x^{m-n-p-q} + A'''.$$

Así siguiendo, puesto que los grados de A, A′, A″, ..., disminuyen por lo menos de unidad en unidad, llegaremos a un polinomio $A^{(i)}$ de grado $m - n - p - q \ldots - s$ tal, que al restarle $B\,c_1\,x^{m-n-p\,\cdots\,-s}$ resulte la diferencia R, de grado inferior a n:

[16-6] $$A^{(i)} \equiv B\,c_i\,x^{m-n-p-\ldots-s} + R.$$

Sumando las igualdades [16-3] a [16-6], y simplificando resulta:

$$A \equiv B\,(c_0x^{m-n} + c_1x^{m-n-p} + c_2x^{m-n-p-q} + \ldots + c_ix^{m-n-p-\ldots-s}) + R.$$

El polinomio

$$Q \equiv c_0\,x^{m-n} + c_1\,x^{m-n-p} + c_2\,x^{m-n-p-q} + \ldots + c_i\,x^{m-n-p-\ldots-s}$$

es, por lo tanto, el cociente, y R, el resto.

En la práctica, las sustracciones suelen hacerse mentalmente, disponiéndose la operación como indica el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:

$x^5 + 4\,x^4 + 7/2\,x^3 \qquad - x + 3$	$2\,x^3 + 3\,x - 1/2$
$4\,x^4 + 2\,x^3 + \;1/4\,x^2 - x + 3$	$1/2\,x^2 + 2\,x + 1 = Q$
$2\,x^3 - 23/4\,x^2 \qquad + 3$	

$$R = -23/4\,x^2 - 3\,x + 7/2.$$

Puede omitirse la repetición de los términos de cada minuendo que subsisten en la diferencia, pero tachando aquellos que se han reducido con otro semejante; de lo contrario puede haber confusiones.

En el caso de polinomios con coeficientes numéricos, la operación puede efectuarse en forma expeditiva escribiendo sólo los coeficientes separados, cuidando de poner un coeficiente nulo por cada término intermedio que falte; este proceso recibe el nombre de *división sintética.*

EJEMPLO 2: Para el ejemplo 1 bastaría escribir

$$\begin{array}{r|l} 1+4+7/2+\quad 0-1+\ 3 & \underline{2+0+3-1/2} \\ 4+\ \ 2+\ 1/4-1+\ 3 & 1/2+2+1 \\ 2-23/4+0+\ 3 & \\ -23/4-3+7/2 & \end{array}$$

Vamos a investigar si además de los polinomios Q y R que cumplen las condiciones [16-2], existirán otros Q′ y R′, es decir:

$$A \equiv BQ + R \quad \text{y} \quad A \equiv BQ' + R',$$

siendo n el grado de B, y los grados de R y R′ inferiores a n.

De ambas equivalencias se deduce $B(Q - Q') \equiv R' - R$, equivalencia imposible si no es $Q \equiv Q'$ y $R \equiv R'$; porque, de lo contrario, el primer miembro sería *por lo menos* de grado n, y el segundo miembro, *a lo sumo* de grado $n - 1$.

Por lo tanto, la división entera [16-2] tiene *solución única.*

5. **División de un polinomio por $x - \alpha$.** *a*) El caso más importante de división algebraica de polinomios de una variable es aquel en que el divisor es de primer grado. Sin restringir la generalidad, podemos suponer que éste es de la forma $x - \alpha$, siendo α un número cualquiera, positivo o negativo. Si el primer coeficiente b_0 del divisor fuese distinto de 1, dividiendo por b_0 el dividendo y el divisor lo reduciríamos a la unidad.

Aplicando la regla de § 16-4 obtenemos:

$$\begin{array}{r|l} a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{-m2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m & x-\alpha \\ \underline{+c_0\alpha x^{m-1}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \overline{c_0x^{m-1}+c_1x^{m-2}+\ldots+c_{m-1}} \\ c_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m & \\ \underline{+c_1\alpha x^{m-2}\qquad\qquad\qquad\qquad} & \\ c_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{m-1}x+a_m & \\ \underline{+c_{m-1}\alpha} & \\ R & \end{array}$$

donde los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ se obtienen por el algoritmo siguiente:

[16-7] $\quad c_0=a_0,\ c_1=c_0\,\alpha+a_1, c_2=c_1\,\alpha+a_2, \ldots,\ c_{m-1}=c_{m-2}\,\alpha+a_{m-1},$

y aplicando el mismo proceso al último coeficiente c_{m-1}, resulta el resto de la división:

$$R = c_{m-1}\,\alpha + a_m.$$

El primer coeficiente del cociente es igual al primero del

dividendo; el segundo del cociente se obtiene multiplicando ***por α el anterior y sumándole el segundo del dividendo, etc. En general, el coeficiente que ocupa el lugar h en el cociente se obtiene multiplicando el anterior por α, y sumando el que ocupa el lugar h en el dividendo.***

El resto se obtiene multiplicando por α el último coeficiente del cociente y sumando el último del dividendo.

Ésta es la ***regla de*** RUFFINI, o ***ley de cocientes.***

b) Resulta una interpretación importante de los coeficientes calculados, $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ y el resto R, observando que estos números son precisamente los obtenidos al hallar el valor numérico del polinomio para $x = \alpha$, por la regla de § 4-11; por lo tanto, estos números tienen los siguientes valores, que también resultan directamente de [16-7]:

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_0\alpha + a_1, \quad c_2 = a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2, \ldots,$$
$$c_{m-1} = a_0\alpha^{m-1} + a_1\alpha^{m-2} + \ldots + a_{m-1},$$

y finalmente:

$$R = a_0\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\alpha + a_m.$$

De ahí el llamado *teorema del resto*:

El resto de la división del polinomio f(x) *por $x - \alpha$, es el valor* f(α) *que toma el polinomio para $x = \alpha$.*

Una demostración directa resulta de [16-2] aplicada a este caso: $f(x) \equiv (x - \alpha)\, Q(x) + R$, siendo ahora R una constante al ser un polinomio de grado < 1. Para $x = \alpha$, resulta $f(\alpha) = R$.

EJEMPLO: Dividir el polinomio

$$-2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{3} \text{ por } x + \frac{1}{2}.$$

El mismo esquema utilizado en § 4-11 es válido, y por lo tanto, resulta:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -2 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \hline & -2 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{array}$$

$$Q = 2x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2}, \quad R = \frac{1}{12}.$$

c) Si el polinomio f(x) se anula para $x = \alpha$, es decir: $f(\alpha) = 0$, el resto de la división por $x - \alpha$ es cero; luego, f(x) es el producto de $x - \alpha$ por un polinomio de grado $m - 1$, es decir: es divisible por $x - \alpha$. Recíprocamente, si f(x) es equivalente al producto $(x - \alpha) \times Q$, se anula para $x = \alpha$. Luego:

La condición necesaria y suficiente para que un polinomio, en el campo real o complejo, sea divisible por $x - \alpha$, es que se anule al dar a x el valor α.

6. División entera de dos polinomios de varias variables. — Consideremos, en el campo real o complejo, dos polinomios de variables x, y, z, ..., t, los cuales, ordenados según las potencias de x, podemos escribir así:

$$A(x, y, \ldots, t) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$
$$B(x, y, \ldots, t) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n,$$

conviniendo desde ahora en adelante en designar con letras mayúsculas las expresiones enteras que sólo contienen las letras y, z, ..., t.

a) Desde luego, podemos aplicarles la regla anterior de división; los coeficientes obtenidos en el cociente y en el resto serán expresiones *racionales respecto de* y, z, ..., t (pues se obtienen mediante las cuatro operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división), pero no serán *enteras* respecto de dichas letras, si exceptuamos los casos triviales, en que el primer coeficiente de cada dividendo parcial sea divisible por B_0.

EJEMPLO:

$(t^2+t)x^5 - t^2$	$x^4 \quad -t$	$x^3+(t-1)$	$x^2 \quad +2t^3$	$x+2$	$t^2x^3-(t-1)x-2$
	$+\frac{t^2-1}{t}$	$+\frac{2t+2}{t}$			$\frac{t+1}{t}x^2 - x - \frac{1}{t^3} = Q$
$-t^2$	$-\frac{1}{t}$	$+\frac{t^2+t+2}{t}$			
		$-t+1$	-2		
	$-\frac{1}{t}$	$\frac{2t+2}{t}$	$2t^3-2$		
			$-\frac{t-1}{t^3}$	$-\frac{2}{t^3}$	

$$R = \frac{2t+2}{t}x^2 + \frac{2t^6-2t^3-t+1}{t^3}x + \frac{2t^3-2}{t^3}.$$

b) Es preciso, pues, plantear de modo distinto el problema, para que el cociente y el resto resulten enteros.

La división entera de un polinomio A $(x, y, \ldots, t)$ por otro B $(x, y, \ldots, t)$, *consiste en hallar un factor conveniente*, H, *que sólo contenga las letras* y, z, ..., t, *y otros dos polinomios*, Q $(x, y, \ldots, t)$ y R $(x, y, \ldots, t)$, *que satisfagan a las condiciones:*

1ª $H.A(x, y, \ldots, t) \equiv B(x, y, \ldots, t).Q(x, y, \ldots, t) + R(x, y, \ldots, t)$.

2ª *Grado de* R *respecto de* x, *inferior al grado de* B.

Como interesa que el factor H no sea complicado, y que la operación sea breve, procederemos de este modo: Si el primer coeficiente A_0 no es divisible por B_0, o no es breve reconocer si lo es, multiplicaremos todo el dividendo por un factor H_0, conveniente para que esta división sea exacta (a lo sumo, será $H_0 = B_0$), y la igualdad [16-3] se transforma en ésta:

[16-8] $H_0 . A(x, y, \ldots, t) \equiv B(x, y, \ldots, t) . Q_0 . x^{m-n} + A'(x, y, \ldots, t)$.

Análogamente, multiplicaremos el segundo dividendo parcial A' $(x, y, \ldots, t)$ por un factor conveniente H_1, para que el primer coeficiente de A' $(x, y, \ldots, t)$ sea divisible por B_0; y la igualdad [16-4] se transforma en ésta:

[16-9] $H_1 . A'(x, y, \ldots, t) \equiv B(x, y, \ldots, t) . Q_1 . x^{m-n-p} + A''(x, y, \ldots, t)$.

Análogamente, en vez de [16-5] obtenemos :

[16-10] $H_2 . A''(x, y, \ldots, t) \equiv B(x, y, \ldots, t) . Q_2 . x^{m-n-p-q} + A'''(x, y, \ldots, t)$.

Por último, al llegar a un polinomio R de grado menor que n, resulta:

[16-11] $H_i . A^{(i)}(x, y, \ldots, t) \equiv B(x, y, \ldots, t) . Q_i . x^{m-n-\cdots-s} + R(x, y, \ldots, t)$.

Multiplicando [16-8] por $H_1 H_2 \dots H_i$; [16-9] por $H_2 \dots H_i$, etc., y sumando, obtenemos, llamando $H = H_0 . H_1 . H_2 \dots H_i$ para abreviar:

$$H . A(x, y, \dots, t) \equiv$$
$$\equiv B(x, y, \dots, t)\, [H_1 H_2 \dots H_i Q_0 x^{m-n} + H_2 \dots H_i Q_1 x^{m-n-p} + \cdots +$$
$$+ Q_i x^{m-n-\dots-s}] + R(x, y, \dots, t).$$

Obtenemos, pues, un polinomio R $(x, y, \dots, t)$, resto de la división entera, mientras que el resto propiamente dicho, hallado según la regla (a), sería R/H, como resulta de la igualdad anterior dividiendo por H. En cambio, el cociente sufre modificación más complicada, como se aprecia en dicha igualdad. Por esto, la división entera de polinomios de varias variables se utiliza principalmente cuando sólo interesa el resto, como sucederá en el § 17.

ESCOLIO: Obsérvese que el grado de R, respecto de las letras y, z, ..., t, puede ser superior al de B. Nótese, además, que si ordenamos respecto de otra letra en vez de x, el cociente y el resto obtenidos serán, en general, distintos de los anteriores.

7. Método de los coeficientes indeterminados. — Este método, que constituye una de las más importantes aplicaciones del principio de identidad, resuelve el problema siguiente: hallar una o varias expresiones literales, de grado y forma prefijados, que, sometidas a ciertas operaciones, den un resultado conocido.

Para resolverlo, se designan con letras, a, b, c, ..., los coeficientes desconocidos, y después de efectuar con las expresiones incógnitas dichas operaciones, obtenemos como coeficientes ciertas funciones de a, b, c, ... Expresando que estos coeficientes han de ser iguales a los de la expresión que deba resultar, tenemos un conjunto de condiciones o ecuaciones que, si son suficientes y se saben resolver, determinan los únicos valores posibles de los coeficientes desconocidos a, b, c, ...; pero es necesario que éstos satisfagan a *todas* las ecuaciones.

Así puede procederse, por ejemplo, para hallar el cociente y el resto de la división de dos polinomios, la potencia de un binomio, etc.

EJEMPLO: Transformar $x^4 + 3/4$ en diferencia de cuadrados de dos trinomios:

$$(x^2 + a\,x + b)^2 - (x^2 + a'\,x + b')^2.$$

Desarrollando e identificando los dos miembros de la igualdad, resulta el siguiente cuadro de condiciones:

Coeficientes de	x^3	$2\,(a - a') = 0$	$a = a'$
—	x^2	$a^2 + 2\,b - a'^2 - 2\,b' = 1$	$b - b' = 1/2$
—	x^1	$2\,(a\,b - a'\,b') = 0$	$a(b - b') = 0$
—	x^0	$b^2 - b'^2 = 3/4$	$(b - b')\,(b + b') = 3/4$

De la tercera ecuación se deduce $a = 0$, por ser $b - b' \neq 0$; de la primera sale $a' = 0$; sustituyendo $b - b' = 1/2$ en la cuarta, se deduce $b + b' = 3/2$; conocida la suma $b + b'$, y la diferencia $b - b'$, resulta $b = 1$, $b' = 1/2$.

Solución única:

$$x^4 + 3/4 \equiv (x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1/2)^2.$$

Ejercicios

1. Comprobar que $x^2 - 1 = 0$ (mód. 15) tiene 4 ceros. Comparar con § 16-1, a y explicar por qué en el sistema de enteros (mód. 15) puede ocurrir tal cosa.

2. Demostrar que en el cuerpo de enteros (mód. 2) hay sólo cuatro expresiones enteras tales que cada una no sea equivalente a ninguna otra. Formularlas y escribir sus tablas de adición y multiplicación.

3. ¿Es el anillo (§ 5-12) de las cuatro expresiones anteriores, isomorfo (§ 3-5) con el de enteros (§ 5-12) mód. 4?

4. Hallar el número de expresiones enteras en dos variables x, y, tales que cada una no sea equivalente a ninguna otra en el cuerpo de enteros (mód. 2).

5. Hallar el polinomio cuyo cuadrado es $x^4 - 10x^3 + m x^2 - 50x + n$, determinando adecuadamente m y n.

6. Dividir $3x^2 - 2x^4 + x^5 - x^3 - 2x + k$ por $x^2 - 5 - 4x$, y determinar k para que la división sea exacta.

7. Dividir $x^7 + 2$ por $x^2 - 2$.

8. Valor de m para que $x^4 + m x^2 - 5x + 1$ sea divisible por $x - 1$.

9. Dividir por la regla de Ruffini $25x^6 - x^4 - 2x^3 - 8x^2$ por $5x^3 - 4x^2$.

10. Discutir la divisibilidad de $x^m \pm y^m$ por $x \pm y$ para m natural.

11. ¿Para cuáles valores naturales de m es divisible $(x + y + z)^m - x^m - y^m - z^m$ por $(x + y)(y + z)(z + x)$?

12. Efectuar la división entera de los polinomios del ejemplo del § 16-6, a, ordenando primero según las potencias de x y luego de t. Comparar los resultados.

§ 17. Divisibilidad algebraica

1. **Concepto de irreducibilidad en un campo racional.** — a) Vimos (§ 6-4) que en el campo de los números racionales, *las cuatro operaciones racionales de adición, sustracción, multiplicación y división de divisor no-nulo, son siempre posibles, con resultado que pertenece al campo.* El conjunto de números del tipo $a + b\sqrt{2}$, donde a y b son números racionales cualesquiera, tiene la misma propiedad anterior. En particular, el recíproco de $a + b\sqrt{2}$ es $a\,(a^2 - 2b^2)^{-1} - b\,(a^2 - 2b^2)^{-1}\sqrt{2}$, siempre existente, a menos que $a = b = 0$, porque $a^2 - 2b^2 \neq 0$ para números racionales a y b no simultáneamente nulos, al no poder expresarse racionalmente $\sqrt{2}$ (§ 7-1, a).

Para el estudio de la importante y delicada cuestión de la divisibilidad algebraica es fundamental la siguiente definición:

Llamaremos *cuerpo numérico* o *campo de racionalidad* a todo conjunto de números reales o complejos tales que, efectuando en él un número finito de operaciones racionales cualesquiera, se obtiene siempre un resultado perteneciente al mismo conjunto. [Ésta es la idea esencial, que ya dimos, del mismo

concepto (§ 5-12, *d*), referido a los entes abstractos más generales].

Puede obtenerse cualquier número racional a partir de 1, mediante un número finito de operaciones racionales; por eso se dice que 1 forma una *base* del campo de racionalidad formado por los números racionales que indicaremos por $C_{(1)}$.

Suponiendo que todo cuerpo de números contiene un número n distinto de cero (para que sea posible la división de divisor no-nulo), contiene también $n/n = 1$. Si 1 pertenece al cuerpo, pertenecerá a él todo número racional, es decir, $C_{(1)}$ está contenido en todo campo de racionalidad. El campo $C_{(1)}$ de los números racionales se llama *cuerpo mínimo* o *campo absoluto de racionalidad.*

Si añadimos a un cuerpo C un número α que no pertenece a él, el conjunto así ampliado no forma aún cuerpo si no agregamos todavía todos los números que pueden obtenerse de α y de los elementos de C por un número finito de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de divisor no-nulo. Así se forma un nuevo campo $C_{(\alpha)}$, que comprende al C y se dice obtenido de éste por *adjunción* de α.

EJEMPLOS: 1. Por adjunción de $\sqrt{2}$ al campo absoluto $C_{(1)}$ obtenemos el campo $C_{(1, \sqrt{2})}$, formado por los números del tipo $a + b\sqrt{2}$ con a y b números racionales. Dicho campo tiene por base $1, \sqrt{2}$. Otra base sería $1, 1 + \sqrt{2}$, pero no un par de números racionales.

2. Por adjunción de $i = \sqrt{-1}$ al campo absoluto $C_{(1)}$ se obtiene el campo $C_{(1, i)}$, de *racionales complejos*, que comprende todos los números del tipo $a + b\,i$ con a y b números racionales. Una base de dicho campo es $1, i$.

El conjunto de todos los números reales (§ 7-5), y también el de todos los complejos (§ 9-5, *e*), forman campos de racionalidad (llamados respectivamente *campo real* y *campo complejo*), pero se distinguen esencialmente de los anteriores por ser de *base infinita*, es decir, no existe en ellos un número *finito* de números a partir de los cuales pueda obtenerse cualquier otro número del campo, mediante un número finito de operaciones racionales.

Además de los cuerpos numéricos, si se consideran r números indeterminados reales o complejos, $x_1, x_2, \ldots, x_r$, y un cuerpo numérico C, el conjunto de todas las expresiones racionales (§ 15-1, *a*), de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ con coeficientes de C, se llama *cuerpo o campo* Γ *de* r *variables independientes*, y se indica con $\Gamma = C\,(x_1, x_2, \ldots, x_r)$. También se llama a éste *cuerpo variable*, y si no contiene ningún x, se dice que es un *cuerpo constante.*

Con mayor abstracción se consideran, en Álgebra superior, cuerpos en que $x_1, x_2, \ldots, x_r$ son elementos *indeterminados cualesquiera.*

Se dice que una o más variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *pertenecen* a un cuerpo numérico C, si suponemos que asumen solamente valores pertenecientes

a C; mientras que una expresión racional de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *pertenece* a C si sus coeficientes son números de C, aunque no se especifique el conjunto de valores a que se refieran sus variables.

b) DEF.: *Diremos que un polinomio, en una o más variables* $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *cuyos coeficientes pertenezcan a un cuerpo* C, *es reducible o irreducible en* C, *según que sea o no producto de dos o más expresiones enteras no constantes, cuyos coeficientes pertenezcan a* C.

Un polinomio o expresión entera irreducible se llama también *primo* (§ 17-2, a_5).

La noción de reducibilidad e irreducibilidad es, pues, un concepto *relativo* a un cierto campo de racionalidad previamente definido; carece entonces de sentido afirmar que una expresión entera es o no reducible, si no se indica con respecto a qué cuerpo numérico debe entenderse dicha propiedad.

EJEMPLOS: La función $x^2 - 3y^2$, que en el campo de los números racionales es prima, pues no admite ningún divisor literal de coeficientes racionales, no es prima en el campo de los números reales, pues se descompone en $(x + \sqrt{3}\,y)(x - \sqrt{3}\,y)$. Aun en este campo más amplio, es prima $x^2 + 3y^2$, pero deja de serlo si se admiten coeficientes complejos, pues se descompone en $(x + i\sqrt{3}\,y)(x - i\sqrt{3}\,y)$. Aun en el campo de los números complejos ordinarios, es prima la función $x^2 + y^2 + z^2 + 1$, y en cambio se descompone del siguiente modo en el campo de los números complejos de cuatro unidades, llamados *cuaternios* (Cap. II, nota III):

$$(1 + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\ (1 - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}).$$

Sin embargo, se dice que un polinomio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es *simplemente reducible* o *irreducible*, si lo es en el campo de racionalidad que tenga por base los coeficientes de f.

La reducibilidad o irreducibilidad se estudia comúnmente respecto al campo complejo, y por eso algunos autores llaman absolutamente irreducibles a las expresiones enteras irreducibles en el campo complejo. Nosotros no lo haremos, por no dar lugar a confundirlas con las irreducibles en el campo absoluto o cuerpo numérico $C_{(1)}$.

2. **Teoremas fundamentales de la divisibilidad algebraica entre polinomios de una o más variables.** — *a*) *Propiedades primeras.* — En el campo de racionalidad C se dice que la función entera F $(x, y, \ldots, t)$, es *divisible* por la función entera $f(x, y, \ldots, t)$, o que f es un *divisor* de F, o que **f** *divide* a F, si existe un monomio o un polinomio $\varphi\ (x, y, \ldots, t)$, de coeficientes pertenecientes a C, que satisface a la identidad

$$F\ (x, y, \ldots, t) \equiv f(x, y, \ldots, t) \cdot \varphi(x, y, \ldots, t).$$

Se emplea también la notación f | F para indicar que f divide a F.

a_1) *Dos expresiones enteras* f *y* g *se llaman asociadas si se verifica a la vez* **f | g** *y* **g | f**. *Se llama unidad a un asociado de* 1.

Si dos expresiones enteras $f(x, y, \ldots, t)$, $g(x, y, \ldots, t)$ son asociadas, es decir, si $f \equiv g \cdot \varphi$ y $g \equiv f \cdot \psi$, multiplicando estas identidades y aplicando la ley cancelativa (§ 6-2, *b*) y el principio de identidad (§ 16-2, *b*) resulta

$$1 \equiv \varphi \cdot \psi,$$

por lo que será cero el grado de las expresiones enteras φ y ψ (§16-3, b_3) ; por lo tanto:

a_2) *Dos expresiones enteras son asociadas en un campo de racionalidad* C *cuando, y sólo cuando, cada una se deduce de la otra mediante su producto por una constante no nula perteneciente a* C.

En particular, *las unidades son las constantes no nulas pertenecientes a* C. Además, se cumple:

a_3) *Toda función entera* $F(x, y, \ldots, t)$ *es divisible por toda constante no nula* k.

a_4) *Si* $F(x, y, \ldots, t)$ *es divisible por* $f(x, y, \ldots, t)$, *también es divisible por* $k.f(x, y, \ldots, t)$, *cualquiera sea la constante* $k \neq 0$.

La relación que liga a las expresiones enteras asociadas es una relación de equivalencia (§ 1-5) (verifíquese), y emplear una u otra en la teoría de la divisibilidad algebraica significa considerar o prescindir de un factor constante, es decir, de una unidad en el campo C.

a_5) *Una expresión entera irreducible en el campo* C *no admite otros divisores que sus expresiones asociadas o las constantes de* C. Por eso la hemos llamado prima (§ 17-1, *b*).

Dos o más expresiones enteras no asociadas que no tengan divisores comunes no-constantes, se llaman *primas entre sí.*

b) De estas definiciones se deduce:

b_1) *Toda función lineal* $a\,x + b\,y + \ldots + l\,t$ *es prima.*

Porque si admitiera un divisor no-constante, y un cociente no-constante, el producto de ambos sería por lo menos de segundo grado (§ 16-3, b_1).

De aquí resulta que *un polinomio no-constante admite siempre un divisor primo no-constante*, pues si el polinomio no es primo, será igual al producto de dos expresiones enteras no-constantes, cada una de grado *no nulo menor* al del polinomio dado; reiterando la descomposición, habremos de llegar a una expresión lineal, si todas las anteriores van resultando reducibles.

b_2) *Si una función prima* P *no divide a otra función entera* A, *es prima con ella.*

Porque el único divisor literal que ambas pueden tener común, es la misma expresión P, con un factor constante; pero entonces sería A divisible por P, contra la hipótesis.

b_3) *Si* f *divide a* F, *divide a* $F\,\Phi$, *cualquiera que sea la función entera* Φ.

b_4) *Si* f *divide a* F *y a* Φ, *divide a su suma y a su diferencia.*

b_5) *Si* f *divide a* F, *y* φ *divide a* Φ, *el producto* f φ *divide al producto* F Φ.

De la definición de divisibilidad resulta que un monomio sólo admite divisores monomios; porque el producto de polinomios, o de un monomio por un polinomio, es también un polinomio (§ 16-3, b_2):

b_6) *La condición necesaria y suficiente para que un monomio sea divisible por otro, es que contenga todas las letras de éste, con iguales o mayores exponentes.*

Dados varios monomios, entre sus divisores comunes hay, por lo tanto, uno solo (a menos de un factor constante, cfr. a) de grado máximo, al cual se llama *máximo común divisor*, y entre los múltiplos comunes hay uno solo (salvo factor constante) que tiene grado mínimo; se llama *mínimo común múltiplo*. El problema de hallar los divisores de un monomio o el m.c.d. de varios monomios se resuelve, pues, lo mismo que el de los números descompuestos en factores primos (§ 5-9).

EJEMPLO: Hallar todos los divisores comunes a los monomios:

$$-\frac{3}{5}x^3 y z^4 t^3, \qquad 5x^4 y z^2, \qquad -\frac{3}{2}x^3 z^4 t.$$

$$\text{m. c. d.} = k x^3 z^2, \qquad \text{m. c. m.} = k x^4 y z^4 t^3.$$

Todos los divisores comunes, son:

$$\begin{array}{cccc} 1, & x, & x^2, & x^3 \\ z, & x z, & x^2 z, & x^3 z \\ z^2, & x z^2, & x^2 z^2, & x^3 z^2 \end{array}$$

multiplicados por constantes arbitrarias.

3. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de los polinomios de una variable. — a) Para los polinomios de *una* variable subsiste un teorema análogo al fundamental de la divisibilidad numérica (§ 5-3). Sea una expresión entera A(x) con coeficientes pertenecientes a un campo de racionalidad C y llamemos *múltiplo* de A(x) a todo producto $\varphi(x)$A(x), donde $\varphi(x)$ es una expresión entera cualquiera de coeficientes pertenecientes a C. Aquí también, no sólo la suma o diferencia de dos múltiplos de A(x) es un múltiplo de A(x), es decir, la clase de los múltiplos de A(x) contiene con dos de sus elementos, su suma o diferencia, sino que se cumple también la propiedad recíproca, es decir que todo conjunto B de expresiones enteras que contenga la suma o diferencia de múltiplos de dos de sus elementos, está formado, ya sea por 0 solamente, ya por el conjunto de múltiplos de una expresión entera no nula B(x), de grado mínimo en B.

Un conjunto B de expresiones enteras cuyos coeficientes pertenecen a un campo de racionalidad C se dice forman un *ideal* en C si contiene la suma o diferencia de dos cualesquiera de sus elementos, así como todos los múltiplos $\varphi(x)$.F(x) de cualquier expresión entera F(x) de B, con cualquier factor entero $\varphi(x)$ de coeficientes pertenecientes a C.

Entonces, el teorema mencionado dice:

TEOR.: *Todo ideal* B *en* C *de expresiones enteras de una variable está formado por los múltiplos de uno de sus elementos* $B(x) \in B$, *de grado mínimo en* B *o se reduce al solo elemento idénticamente nulo.*

En efecto, si no se da este último caso, B contiene una expresión entera $B(x)$ no idénticamente nula de *mínimo* grado (§ 2-7), y con $B(x)$, todos sus múltiplos $q(x)\ B(x)$. Cualquier otra expresión entera $A(x) \in B$ es también múltiplo de $B(x)$, pues efectuando la división entera de $A(x)$ y $B(x)$ (§ 16-4), puede escribirse $R(x) \equiv A(x) - q(x) . B(x)$, es decir, $R(x)$ de grado inferior a $B(x)$ pertenecería a B, y al no poder tener por hipótesis menor grado que $B(x)$ si no se reduce idénticamente a cero, queda probado que $A(x) \equiv q(x) . B(x)$, como queríamos demostrar.

b) Análogamente a lo establecido en el § 5-5, *a*), dadas dos expresiones enteras, $A(x)$ y $B(x)$, no idénticamente nulas, todas las expresiones de la forma $\sigma(x) . A(x) + \tau(x) . B(x)$, con $\sigma(x)$ y $\tau(x)$ expresiones enteras cualesquiera de coeficientes pertenecientes al cuerpo C a que pertenecen los de $A(x)$ y $B(x)$, forman un ideal D tal que todos sus elementos, y en particular $A(x)$ y $B(x)$, son, según (*a*), múltiplos de una expresión entera no idénticamente nula $D(x)$, de grado mínimo en D. Dicha expresión entera, dividida por su primer coeficiente, se designa por $A(x) \frown B(x)$; es divisor común de $A(x)$ y $B(x)$, y al existir $s(x)$ y $t(x)$, tales que:

$$[17\text{-}1] \qquad A(x) \frown B(x) \equiv s(x) . A(x) + t(x) . B(x),$$

todo divisor común de $A(x)$ y $B(x)$ lo es de $A(x) \frown B(x)$ (§ 17-2, b_3, b_1).

Asimismo, el conjunto de expresiones enteras que son múltiplos comunes de $A(x)$ y $B(x)$ no idénticamente nulas forman también un ideal M (pruébese), y todas ellas son, según (*a*), múltiplos de una expresión entera no idénticamente nula $M(x)$, de grado mínimo en M.

Dicha expresión entera, dividida por su primer coeficiente, se designa por $A(x) \smile B(x)$, es múltiplo común de $A(x)$ y $B(x)$ y, además, dividirá a todo otro múltiplo común de $A(x)$ y $B(x)$.

c) Así se introducen las nociones de *máximo común divisor* (m. c. d.) *y mínimo común múltiplo* (m. c. m.) de dos expresiones enteras respecto de un cuerpo C que contenga sus coeficientes, mediante las definiciones:

Una expresión entera $D(x)$ *es un* m. c. d. *de las expresiones enteras* $A(x)$ *y* $B(x)$ *si verifica las condiciones*:

D1) $D(x)$ *es un divisor común de* $A(x)$ *y* $B(x)$;

D2) *Cualquier divisor común de* $A(x)$ *y* $B(x)$ *es divisor de* $D(x)$.

Una expresión entera $M(x)$ *es un* m. c. m. *de las expresiones enteras* $A(x)$ *y* $B(x)$ *si verifica las condiciones*:

M1) $M(x)$ *es un múltiplo común de* $A(x)$ *y* $B(x)$;

M2) *Cualquier múltiplo común de* $A(x)$ *y* $B(x)$ *es múltiplo de* $M(x)$.

Según estas definiciones, dos distintos m. c. d. de $A(x)$ y $B(x)$ *deben ser asociados* (§ 17-2, a_1), y por lo tanto, difieren sólo en un factor constante (§ 17-2, a_2). Lo mismo ocurre en el caso del m. c. m.

De (*b*) y lo anterior se deduce:

Respecto a dos expresiones enteras $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$, *cuyos coeficientes pertenezcan a un cuerpo* C, *existe siempre un único* m. c. d., $A(x) \frown B(x)$, *cuyo término de mayor grado tenga coeficiente* $+1$, *y los demás coeficientes pertenezcan a* C, *tal que puede expresarse por la "combinación lineal"* [17-1] *con factores* $s(x)$ *y* $t(x)$, *cuyos coeficientes pertenezcan a* C.	*Respecto a dos expresiones enteras* $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$ *cuyos coeficientes pertenezcan a un cuerpo* C, *existe siempre un único* m. c. m., $A(x) \smile B(x)$, *cuyo término de mayor grado tenga coeficiente* $+1$, *y los demás coeficientes pertenezcan a* C.

d) Según (*c*), para que dos expresiones enteras $A(x)$ y $B(x)$ sean primas entre sí, (§ 17-2, a_6), es necesario y suficiente que $A(x) \frown B(x) \equiv 1$, y entonces, y sólo entonces, se verifica:

[17-2] $$1 \equiv s(x) \,.\, A(x) + t(x) \,.\, B(x).$$

Si además B (x) divide al producto A (x) . V (x), al ser prima con $A(x)$, de [17-2], deducimos que:

$$V(x) \equiv s(x) \,.\, [A(x) \,.\, V(x)] + t(x) \,.\, V(x) \,.\, B(x),$$

con lo que $B(x)$ divide a cada término del segundo miembro y entonces (por § 17-2, b_4), dividirá a $V(x)$, es decir :

d_1) *Si una expresión entera* $B(x)$ *divide al producto de dos expresiones enteras* $A(x) \,.\, V(x)$, *y es prima con una de ellas*, $A(x)$, *entonces divide a la otra*, $V(x)$.

e) Podemos aplicar también aquí el algoritmo de EUCLIDES (§ 5-6, *a*). Se apoya en el teorema:

e_1) *Si* R (x) *es el resto de dividir* A (x) *por* B (x), *los polinomios* A (x) *y* B (x) *tienen los mismos divisores comunes que los* $B(x)$ *y* $R(x)$.

En efecto, de la identidad (§ 16-4)

$$A \equiv B\,Q + R,$$

resulta que todo divisor de A y B lo es de A y B Q (§ 17-2, b_3) ; luego, también divide a su diferencia, R (§ 17-2, b_4). Recíprocamente, todo divisor de B y de R lo es de B Q y de R; luego, también de su suma A.

e_2) Apliquemos a A y B el algoritmo de EUCLIDES:

	Q_1	Q_2	Q_{m+1}
A	B	R_1 . . . R_{m-1}	R_m
R_1	R_2	0	

Esto quiere decir (cfr. § 5-6) que si A no es múltiplo de $B \neq 0$ (grado de A $\geqslant$ grado de B), pueden efectuarse las divisiones enteras (§ 16-4) :

$$\begin{array}{lll}
A = BQ_1 + R_1 & ; \text{ grado de } R_1 < \text{grado de } B & ; \\
B = R_1Q_2 + R_2 & ; \text{ grado de } R_2 < \text{grado de } R_1 & ; \\
R_1 = R_2Q_3 + R_3 & ; \text{ grado de } R_3 < \text{grado de } R_2 & ; \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
R_{m-2} = R_{m-1}\, Q_m + R_m & ; \text{ grado de } R_m < \text{grado de } R_{m-1} & ; \\
R_{m-1} = R_m Q_{m+1} . & &
\end{array}$$

Como el grado de los restos sucesivos va disminuyendo, debe llegarse a un resto de grado cero, es decir, una constante. Si ésta no es cero, al dividir por ella resulta un resto cero. Sea, pues, R_m el último divisor, es decir, el que hace exacta la división.

Los divisores comunes de A *y* B son los comunes a B y R_1, a R_1 y R_2, . . ., a R_{m-1} y R_m, o sea *son los divisores de* R_m por ser el mismo R_m divisor de R_{m-1}.

Si R_m es una constante, A y B no admiten, pues, ningún divisor común literal, es decir, A y B son *primos entre sí.*

Si R_m *no es constante,* la función de mayor grado, entre sus divisores, es ella misma, o ella multiplicada por una constante cualquiera.

Por lo tanto: R_m *es un* m.c.d. *de* A *y* B, *el que dividido por el coeficiente del término de mayor grado en* R_m, *dará* el A ⌢ B, *así obtenido por operaciones racionales.*

Si A es múltiplo de B, es A ⌢ B = B; si B es idénticamente nulo, es A ⌢ B = A.

Si los coeficientes pertenecen al campo de racionalidad $C_{(1)}$ (es decir, son números racionales), podemos operar siempre con números enteros multiplicando cada polinomio por el m. c. m. de los denominadores de sus coeficientes, y también se puede multiplicar cualquier dividendo parcial por el número conveniente, para evitar coeficientes fraccionarios en el cociente. También puede suprimirse cualquier factor numérico común a todos los términos de un dividendo.

Ejemplo: Hallar el m. c. d. de $x^3 + 2x^2 - x - 2$ y $x^4 + 2x^2 - 3$.

$$\begin{array}{r|r|l}
 & x - 2 & x + 2 \\
x^4 \qquad + 2x^2 \qquad - 3 & x^3 + 2x^2 - x - 2 & x^2 - 1 \\
-2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 & 2x^2 \qquad - 2 & \qquad \text{m. c. d.} = x^2 - 1. \\
7x^2 \qquad - 7 & 0 &
\end{array}$$

El mismo algoritmo de Euclides prueba como en § 5-6, *b*:

e_8) *Si dos expresiones enteras* A *y* B, *se multiplican por cualquier expresión entera* H, *o si ambas se dividen por un divisor común, el máximo común divisor queda multiplicado o dividido por* H. *En particular, los cocientes de dividir* A *y* B *por su* m. c. d. *son primos entre sí.*

f) Exactamente como en § 5-6, *a*, se demuestra que:

El mínimo común múltiplo de dos expresiones enteras se

obtiene dividiendo su producto por el máximo común divisor de ambas. Si éstas son primas entre sí, el m. c. m. *es su producto.*

g) Para el caso de tratar los divisores y múltiplos comunes de más de dos expresiones enteras, se repiten palabra por palabra los razonamientos y conclusiones expuestos (§ 5-7) para la divisibilidad numérica.

4. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de los polinomios de varias variables. — *a*) La teoría de la divisibilidad de polinomios de varias variables es esencialmente distinta de la antes expuesta para el caso de una sola, porque la definición de división entera dada en § 16-4 no es aplicable ya, habiendo sido preciso sustituirla por otra más amplia (§ 16-6), mediante la admisión de factores que no contienen la letra ordenatriz.

El teorema fundamental (de § 17-3, *a*) tampoco subsiste. Por ejemplo, en el campo absoluto de racionalidad $C_{(1)}$, consideremos el ideal B que se obtenga a partir de x^2 y de xy por suma o diferencia de dos de sus elementos, o producto por una expresión entera $q(x, y)$ cualquiera de coeficientes racionales, en número finito de veces. Dicho ideal B está formado por todas las expresiones enteras de coeficientes racionales que no tengan ni términos independientes de x ni términos lineales. Los elementos del ideal B no idénticamente nulos de grado mínimo son de segundo grado, y es evidente que $x^2 \varepsilon$ B, $xy \varepsilon$ B no tienen divisor común de segundo grado.

Tampoco subsiste la fórmula [17-2], pues por ejemplo $A(x, y) \equiv x$, $(x, y) \equiv y^2 + x$, son expresiones enteras primas entre sí, y sin embargo no hay expresiones enteras, $s(x, y)$, $t(x, y)$, tales que:

[17-3] $$x \cdot s(x, y) + (y^2 + x) \cdot t(x, y) \equiv 1;$$

pues el primer miembro no tendrá nunca término constante no nulo. Obsérvese que si solo nos preocupamos de que las expresiones sean enteras respecto de x, considerando a y como un parámetro no nulo, es decir, tomamos como coeficientes los del cuerpo $C_{(1)}(y)$, se cumple [17-3] para $s = -1/y^2$, $t = 1/y^2$. Exigir aquí que los coeficientes de x sean también expresiones enteras respecto de y, sería análogo a considerar, en el caso de una variable x, sólo expresiones enteras con coeficientes enteros, y entonces, tampoco subsisten los teoremas de § 17-3. Así, $x \wedge 2 = 1$ en $C_{(1)}$, y no existen expresiones enteras, $s(x)$, $t(x)$, con coeficientes *enteros* que cumplan $x \cdot s(x) + 2 \cdot t(x) = 1$.

Sin embargo, en el caso de varias variables, también puede formularse:

a_1) *Teorema fundamental. — Entre los divisores literales comunes a varios polinomios, hay uno de grado máximo, al cual dividen todos los demás; este polinomio único (salvo un factor constante) se llama* máximo común divisor.

a_2) *Teorema fundamental. — Si varios polinomios se multiplican por cualquier expresión entera* H, *o si todos se dividen por un divisor común* H, *el máximo común divisor queda multiplicado o dividido por* H.

De este teorema se deduce inmediatamente:

a_3) Corolario: *Si una expresión entera* B *divide al producto* A H *de dos polinomios, y es prima con* A, *divide a* H.

Porque siendo m. c. d. (A, B) = Const., se deduce:

$$\text{m. c. d. } (A H, B H) = H,$$

y el divisor común B de A H y B H lo es del máximo común divisor H.

La fórmula [17-1] tampoco subsiste. Por ejemplo, $x^2 \wedge xy = x$ en $C_{(1)}$,

y sin embargo, no podrán existir expresiones enteras, $s(x,y)$, $t(x,y)$, tales que:

$$x \equiv x^2.s(x,y) + x\,y.t(x,y),$$

pues el segundo miembro no tiene términos lineales.

b) Supongamos ya estudiada la divisibilidad de polinomios de h variables, y establecidos para ellos los dos teoremas fundamentales a_1 y a_2, que hemos demostrado ya para $h = 1$ (§ 17-3).

Pasando ya al estudio de los polinomios de $h+1$ variables $(x, y, \ldots, t)$, los escribiremos ordenados según las potencias de una de ellas, del siguiente modo:

[17-4] $A\ (x, y, \ldots, t) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$

conviniendo en que cada letra mayúscula designe una expresión entera de variables $y, z, \ldots, t$, con coeficientes pertenecientes a un cuerpo numérico C.

Estudiaremos separadamente los divisores independientes de x, y los que contienen esta letra.

DEFINICIÓN: Se dice que un polinomio es *primitivo* respecto de una letra x, si no admite ningún divisor literal independiente de x.

La definición análoga, para expresiones enteras de una sola variable x con coeficientes numéricos *enteros*, es llamar primitiva a la expresión cuyos coeficientes enteros no tengan otros divisores comunes que ± 1. Por ejemplo, $9 - 4x^2$ es primitiva (aunque no prima), mientras que no lo es $9 + 3x^2$.

b_1) Como suponemos ya resuelto el problema de hallar el m. c. d. de polinomios de h variables, es fácil hallar los divisores de $A\ (x, y, \ldots, t)$ que sólo contengan las variables $(y, z, \ldots, t)$; pues si A" es uno de ellos, debe verificarse

[17-5] $A\ (x, y, \ldots, t) \equiv A'' . (A'_0 x^n + A'_1 x^{n-1} + \ldots + A'_n),$

y en virtud del principio de identidad respecto de la variable x, debe ser:

[17-6] $A_0 \equiv A'' A'_0, \quad A_1 \equiv A'' A'_1, \ldots, A_n \equiv A'' A'_n;$

luego A" debe ser divisor de $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Y como, recíprocamente, todo divisor de los coeficientes lo es del polinomio, resulta:

Se obtienen todos los divisores del polinomio $A\ (x, y, \ldots, t)$ *que sólo contienen las variables* $(y, z, \ldots, t)$, *hallando los divisores comunes a los coeficientes* $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

b_2) En particular, si hallamos el m. c. d. $(A_0, A_1, \ldots, A_n) = A''$, y dividimos por él, los coeficientes del polinomio obtenido $A'_0 x^n + A'_1 x^{n-1} + \ldots + A'_n$ son primos entre sí (teorema a_2), y por lo tanto, este polinomio no admite ningún divisor literal independiente de x; es decir, es primitivo. Recíprocamente, si el polinomio cociente es primitivo, y por lo tanto son primos entre sí sus coeficientes, es A" m. c. d. de los coeficientes del polinomio dado. Por lo tanto:

Un polinomio $A\ (x, y, \ldots, t)$ *de* $h+1$ *variables, admite una descomposición única de la forma* $A'' . A'(x, y, \ldots, t)$, *siendo* $A'(x, y, \ldots, t)$ *primitivo respecto de* x, *y* A" *independiente de* x, *única si se consideran como equivalentes las expresiones asociadas* (§ 17-2, a_4).

A esta descomposición la llamamos *normal.*

b_3) Según (b_1), todo divisor de $A\ (x, y, \ldots, t)$ independiente de x debe dividir a los coeficientes [17-6], y por lo tanto, a su m. c. d. A"; luego:

Descompuesto el polinomio $A\ (x, y, \ldots, t)$ *en su forma normal* $A''\, A'(x, y, \ldots, t)$, *todo divisor suyo independiente de* x *es divisor de* A"; *y recíprocamente.*

c) *Divisores primitivos de los polinomios de varias variables.* — c_1) *El producto de dos polinomios primitivos es un polinomio primitivo.*

Sean los dos polinomios primitivos:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_h x^{n-h} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$
$$B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_k x^{m-k} + \ldots + B_{m-1} x + B_m,$$

siendo, por lo tanto:

$$\text{m. c. d. } (A_0, A_1, \ldots, A_n) = \text{const.}$$
$$\text{m. c. d. } (B_0, B_1, \ldots, B_m) = \text{const.}$$

Supongamos que los coeficientes del producto admitan un divisor primo común P, y como éste no puede dividir a todas las A_i ni a todas las B_i, sean A_h y B_k el primer coeficiente de cada polinomio que no sea divisible por P. En el polinomio producto, el coeficiente de $x^{m+n-h-k}$, es:

$$A_h B_k + A_{h-1} B_{k+1} + A_{h-2} B_{k+2} + \ldots + A_0 B_{h+k} +$$
$$+ A_{h+1} B_{k-1} + A_{h+2} B_{k-2} + \ldots + A_{h+k} B_0,$$

cuyos términos todos (excepto $A_h \,.\, B_k$), son divisibles por P, puesto que contiene cada uno un factor múltiplo de P; luego, también debe dividir P a $A_h \,.\, B_k$, y siendo P primo, o divide a uno de los dos factores o es primo con él (§ 17-2, b_2), y entonces, en virtud del corolario del teorema fundamental a_2), divide al otro. En ambos casos llegamos a una contradicción; luego, la hipótesis es falsa.

c_3) *Descompuesto* A $(x, y, \ldots, t)$ *en su forma normal* $A'' \,.\, A' (x, y, \ldots, t)$, *todo divisor* $D' (x, y, \ldots, t)$ *primitivo respecto de* x, *es divisor de* $A' (x, y, \ldots, t)$, *y recíprocamente.*

Porque si al cociente $Q (x, y, \ldots, t)$ de $A (x, y, \ldots, t)$ por $D' (x, y, \ldots, t)$ lo ponemos en su forma normal, tendremos:

$$A (x, y, \ldots, t) \equiv Q'' \,.\, Q' (x, y, \ldots, t) \,.\, D' (x, y, \ldots, t),$$

y como el producto de Q' por D' es también primitivo, en virtud de (b_3) debe ser $Q' \,.\, D'$ la parte primitiva de A. Es decir:

$$A' (x, y, \ldots, t) \equiv Q' (x, y, \ldots, t) \,.\, D' (x, y, \ldots, t) \times \text{const.}$$

c_4) *El dividendo y el divisor de una división entera tienen los mismos divisores primitivos comunes que el divisor y el resto.*

Sea $A (x, y, \ldots, t)$ el dividendo, y H el factor por el que se ha multiplicado para que el cociente resulte entero; es decir:

$$H \,.\, A (x, y, \ldots, t) \equiv B (x, y, \ldots, t) \,.\, Q (x, y, \ldots, t) + R (x, y, \ldots, t).$$

Todo divisor de $A (x, y, \ldots, t)$ y de $B (x, y, \ldots, t)$ lo es de $H \,.\, A (x, y, \ldots, t)$ y de $B (x, y, \ldots, t) \,.\, Q (x, y, \ldots, t)$; luego, también del resto R (§ 17-2, b_4).

Todo divisor P de B y de R divide a H . A; pero siendo P primitivo, en virtud de (a_2) divide a la parte primitiva de H . A, que es la parte primitiva de A, luego divide a A.

d) *Algoritmo de* EUCLIDES. — Dados los polinomios $A (x, y, \ldots, t)$ y $B (x, y, \ldots, t)$, apliquémosles el algoritmo de EUCLIDES de las divisiones sucesivas, previas las multiplicaciones convenientes de cada dividendo, por factores independientes de x para que el cociente resulte entero. He aquí el esquema del cálculo:

	Q_1		Q_2		Q_3		Q_{m+1}
$H_1 A$	B;	$H_2 B$	R_1;	$H_3 R_1$	R_2 ...	$H_{m+1} R_{m-1}$	R_m
R_1		R_2		R_3		0	

El grado respecto de x de los restos sucesivos $R_1, R_2, \ldots$, va disminuyendo; luego, debe llegarse a un resto R_m que carece de dicha letra, el cual hace exacta la división por él; o bien se llega a una división entera, conteniendo R_m las letras $(x, y, \ldots, t)$.

Los divisores primitivos comunes a $A (x, y, \ldots, t)$ y $B (x, y, \ldots, t)$ son los divisores primitivos de $R_m (x, y, \ldots, t)$; luego, entre ellos hay uno de grado máximo, que es su factor primitivo, obtenido por la regla (b_2); lo llamamos *máximo común divisor primitivo.*

Al pasar cada resto a divisor puede suprimirse todo factor indepen-

diente de x, y así se simplifica el cálculo. Análoga supresión puede hacerse en los dividendos. Estas modificaciones alteran solamente el factor independiente de x, y por lo tanto, no modifican la parte primitiva de R_m.

e) Resueltos ya los dos problemas anteriores, es inmediata la obtención del m. c. d. de dos o más polinomios de $h+1$ variables, pues descompuestos en su forma normal:

$$A\ (x, y, \ldots, t) \equiv A'' \,.\, A'\ (x, y, \ldots, t),$$
$$B\ (x, y, \ldots, t) \equiv B'' \,.\, B'\ (x, y, \ldots, t), \ldots,$$
$$L\ (x, y, \ldots, t) \equiv L'' \,.\, L'\ (x, y, \ldots, t),$$

para lo cual basta calcular el m. c. d. de los coeficientes de cada polinomio (que son expresiones de h letras), todo divisor común $D\ (x, y, \ldots, t) = D'' \,.\, D'\ (x, y, \ldots, t)$ ha de tener el factor D'', divisor de A'', B'', $\ldots$, L'' (b_5); y el factor $D'\ (x, y, \ldots, t)$ ha de ser divisor de $A'\ (x, y, \ldots, t)$, de $B'\ (x, y, \ldots, t)$, $\ldots$, y de $L'\ (x, y, \ldots, t)$ (c_3); luego, entre todos los divisores comunes buscados, el de grado máximo es:

[17-7] $\quad$ m. c. d. $(A'', B'', \ldots, L'') \times$ m. c. d. $(A', B', \ldots, L')$,

y cualquier otro, por tener el factor D'' divisor del primer m. c. d., y el factor D' que divide al segundo, es un divisor de [17-7].

Queda, por lo tanto, generalizado para los polinomios de $h+1$ variables, el teorema fundamental (a_1) de existencia del m. c. d., y dada la regla para calcularlo:

Para obtener el m. c. d. *de varios polinomios de* $h+1$ *variables,* $(x, y, \ldots, t)$, *se ordenan respecto de una de ellas,* x, *y se determina el* m. c. d. *de los coeficientes de cada uno de los polinomios (que son expresiones enteras en* h *letras), sacándolo factor común en cada uno de ellos. Se calcula el* m. c. d. *de estos factores dependientes de* h *letras, y el* m. c. d. *primitivo respecto de* x *de los segundos factores primitivos respecto de* x *que han quedado en cada polinomio. El* m. c. d. *buscado es el producto* [17-7] *de dichos dos* m. c. d.; *así obtenido por sólo operaciones racionales.*

f) Si los polinomios dados se multiplican por una expresión entera arbitraria $H\ (x, y, \ldots, t) = H'' \,.\, H'\ (x, y, \ldots, t)$, el primer factor de [17-7] queda multiplicado por H'' y el segundo por $H'\ (x, y, \ldots, t)$; luego, el m. c. d. queda multiplicado por $H\ (x, y, \ldots, t)$. Queda así generalizado para $h+1$ letras el segundo teorema fundamental (a_2), y por lo tanto su corolario, también llamado *teorema de* LEFEBURE DE FOURCY.

g) *Si el polinomio* $A\ (x, y, \ldots, u, v, \ldots, t)$ *es reducible en el cuerpo variable* $C\ (v, \ldots, t)$ (§ 17-1, *a*), *también lo es en* C.

En efecto, hemos supuesto que $A\ (x, y, \ldots, u, v, \ldots, t)$, como expresión entera en $x, y, \ldots, u$, es producto $A \equiv f \,.\, \varphi$ de las expresiones f y φ, enteras en $x, y, \ldots, u$ de grado no nulo en ellas, con coeficientes racionales en $v, \ldots, t$. Reducidos dichos coeficientes a un mismo denominador, multiplicando por él se obtiene:

[17-8] $\quad \theta(v, \ldots, t) \,.\, A(x, y, \ldots, t) \equiv f_1(x, \ldots, u, v, \ldots, t) \,.\, \varphi_1(x, \ldots, u, v, \ldots, t),$

en que $\theta\ (v, \ldots, t)$ es una expresión entera en $v, \ldots, t$, y f_1 y φ_1 son expresiones enteras en $x, \ldots, u, v, \ldots, t$, efectivamente dependientes de alguna de las letras $x, \ldots, u$. Efectuada la descomposición normal (b_2) de $f_1 \equiv f'_1 \,.\, f''_1$, y de $\varphi_1 \equiv \varphi'_1 \,.\, \varphi''_1$ respecto de una de las letras $x, y, \ldots, u$ de que efectiva y respectivamente dependan, θ que es independiente de $x, y, \ldots, u$ será primo con $f''_1\, \varphi''_1$, por lo que según (a_3) dividirá al otro factor $f'_1\, \varphi'_1$. Si simplificamos ambos miembros de [17-8] del factor común θ, queda A igual al producto de factores no constantes de coeficientes en C, como queríamos demostrar.

g_1) Particularizando para una variable y el campo absoluto de racionalidad, el teorema anterior dice: *Si el polinomio* $A(x)$ *de coeficientes enteros es reducible en el campo absoluto de racionalidad* $C_{(1)}$, ***también lo es con factores de coeficientes enteros.*** Éste es el teorema (§ 7-1, *b*) que ha servido de introducción a la teoría del número real.

g_2) Además, vemos que *si una expresión entera* A $(x, \ldots, u, v, \ldots, t)$ *es prima en el cuerpo* C, *también lo es en el cuerpo variable* C $(v, \ldots, t)$ *de cualesquiera* $v, \ldots, t$ *elegidas entre las* $x, y, \ldots, u, v, \ldots, t$. Es decir, si A es irreducible en C, no admite tampoco divisores no-constantes y no asociados a A que tengan por coeficientes expresiones racionales en $v, \ldots, t$. El recíproco (o mejor, el contrario del directo) es evidentemente cierto. Sin embargo, no debe interpretarse equivocadamente el significado de este teorema. El polinomio A $(x, y, \ldots, u, v, \ldots, t)$, *irreducible* en el cuerpo C, puede ser *reducible* en el mismo cuerpo cuando $v, \ldots, t$ se consideran como *parámetros*, aun conservándose *irreducible* en el cuerpo variable C $(v, \ldots, t)$. Así, por ejemplo: $A \equiv u^2 - v$ es irreducible como binomio en u, v, incluso en el campo complejo C, pero $A \equiv (u - \sqrt{v})\ (u + \sqrt{v})$ es reducible, si v se considera como parámetro, pues es producto de expresiones enteras no constantes en u con coeficientes *irracionales* en v; no obstante, A continúa siendo irreducible en el cuerpo variable C(v).

h) El mínimo común múltiplo de dos o más polinomios de varias variables es el polinomio de grado mínimo divisible por cada uno de los polinomios dados. Como en el § 17-3, *f*, *el* m. c. m. *de dos polinomios se obtiene dividiendo su producto por su* m. c. d. *El* m. c. m. *de tres polinomios se obtiene calculando el* m. c. m. *de dos de ellos y el de éste con el tercer polinomio*; y así sucesivamente (§ 17-3, *g*). Así, pues, *el cálculo del* m. c. m. *de varios polinomios de varias variables se efectúa con operaciones racionales.*

i) *Fracciones algebraicas irreducibles.* — Una fracción algebraica P/Q se llama *irreducible* si las expresiones enteras P y Q son primas entre sí. Para hacer irreducible una fracción basta, pues, dividir ambos términos por su m. c. d. Esto completa el resultado § 15-1, c_2, pues permite transformar cualquier expresión racional en otra equivalente de la forma *más sencilla.*

Si la fracción irreducible P/Q contiene una sola variable x, no pueden anularse P y Q para un mismo valor $x = \alpha$, pues entonces serían ambas divisibles por $x - \alpha$ (§ 16-5, *c*). Por lo tanto, para hallar el verdadero valor de una expresión racional de una sola variable, acudiremos a la fracción irreducible equivalente.

5. **Descomposición en factores primos de un polinomio de una o más variables: teorema fundamental** — *a*) El teorema fundamental de la descomposición en factores primos de un número entero (§ 5-8, *b*) se conserva y tiene la misma trascendencia en la divisibilidad algebraica. Demostremos que:

Una expresión entera no constante A *de una o más variables con coeficientes pertenecientes a un campo de racionalidad* C, *se puede descomponer en factores primos en* C. *La descomposición es única, salvo el orden de los factores y la equivalencia de expresiones asociadas* (§ 17-2, a_4).

En efecto, si A no es irreducible, tiene por lo menos (§ 17-2, b_1) un divisor primo: a_1. Sea A_1 el cociente de A por a_1, de grado menor que A. Si A_1 es primo, la descomposición está hecha; en otro caso, A_1 tendrá otro divisor primo no constante, a_2, que puede ser o no asociado al a_1. Así siguiendo, se descompone A en un producto

$$[17\text{-}9] \qquad A \equiv a_1^{\alpha_1}\, a_2^{\alpha_2} \ldots a_r^{\alpha_r},$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ son números naturales, que indican la llamada *multiplicidad* de cada factor primo de A, mientras que $a_1, a_2, \ldots, a_r$ son expresiones enteras no constantes, irreducibles en C y no asociadas dos

a dos. Si $n_1, n_2, \ldots, n_r$ son los grados de $a_1, a_2, \ldots, a_r$, y n es el grado de A, se tiene:

[17-10] $$n = n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + \ldots + n_r \alpha_r.$$

La descomposición [17-9] es única. En efecto, todo factor primo b de A divide al producto $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_r^{\alpha_r}$, lo que implica (§ 17-4, a_3; § 17-2, b_2) que b divide por lo menos a uno de los factores; por lo tanto (§ 17-2, a_6), será asociado a uno de ellos, por ejemplo, al a_1. Tampoco A puede ser divisible por una potencia β_1 de a_1 mayor a la α_1 obtenida anteriormente, porque la expresión entera $A : a_1^{\alpha_1}$ debería ser divisible por a_1, lo que es imposible, por haber supuesto que $a_2, \ldots, a_r$ no son asociadas a a_1.

EJEMPLO: Recordemos que la descomposición en factores primos se efectúa respecto a un determinado campo de racionalidad C de los coeficientes del polinomio dado. Sea $A(x) \equiv 4x^6 + 4x^5 + x^4 - 8x^2 - 8x - 2$ que admite la descomposición

$$A(x) \equiv (4x^4 - 8)(x + \tfrac{1}{2})^2 \equiv (2x+1)^2 \cdot (x^4 - 2);$$

el segundo y tercer miembro representan la misma descomposición, pues, salvo el orden, los factores son respectivamente asociados. En el campo absoluto de racionalidad $C_{(1)}$, los factores primos de $A(x)$ son $x^4 - 2$ con multiplicidad 1, y $x + \frac{1}{2}$ con multiplicidad 2. La descomposición de $A(x)$ en factores primos del campo real es:

$$A(x) \equiv 4(x^2 + \sqrt{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - \sqrt[4]{2})(x + \tfrac{1}{2})^2,$$

mientras que en el campo complejo es:

$$A(x) \equiv 4(x + i\sqrt[4]{2})(x - i\sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - \sqrt[4]{2})(x + \tfrac{1}{2})^2.$$

b) La efectiva descomposición de un polinomio de una o más variables en sus factores primos ofrece dificultad mucho mayor que la obtención del m. c. d. o m. c. m. de varios polinomios. Problema no tan difícil es el de reconocer si un polinomio es o no irreducible, pues ello puede hacerse por operaciones racionales, y saber también en cuántos factores primos se descompone. De todos modos, en muchas cuestiones basta saber que existe una descomposición en factores primos de un polinomio dado, aun cuando no se sepa realizarla efectivamente.

c) Las aplicaciones del teorema fundamental de descomposición en factores primos de un entero (§ 5-9) subsisten en la descomposición algebraica. En particular, *el* m. c. d. *de varios polinomios, de una o más variables, es el producto de los factores primos comunes a todos ellos, tomados con la multiplicidad mínima con que figura en cada uno; mientras que el* m. c. m. *es el producto de los factores primos, comunes y no comunes, de todos los polinomios, tomados con la multiplicidad máxima con que figura en cada uno.*

Sin embargo, el método de las divisiones sucesivas permite calcular el m. c. d. y m. c. m. de varios polinomios sin conocer sus factores primos, *mediante operaciones racionales;* en cambio, la descomposición de un polinomio en sus factores primos implica generalmente efectuar operaciones irracionales.

Ejercicios

1. Demostrar que los números fraccionarios (racionales no enteros) no forman campo de racionalidad.

2. Hallar cuáles de los polinomios siguientes son reducibles en el campo absoluto, en el campo real y en el campo complejo: *a*) $x^4 + x^2 + 1$; *b*) $x^3 + x - 1$; *c*) $x^2 + x + 1$.

3. 1º) Encontrar cuerpos mínimos de base finita sobre el campo absoluto en el que sean reducibles cada uno de los polinomios anteriores; 2º) Hallar un solo elemento cuya adjunción al campo absoluto hace reducibles a todos ellos.

4. Demostrar que si $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ es irreducible, también lo es $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

5. Escribir *todos* los polinomios asociados al $x^3 + 2x - 1$ en el cuerpo de coeficientes formado por los enteros (mód. 5).

6. ¿En qué cuerpo de coeficientes enteros mód. n es $x^3 + x^2 + x + 1$ divisible por $x^2 + 3x + 2$?

7. Hallar en $C_{(1)}$ el m. c. d. de $15x^6 + 71x^4 + 60x^2 - 56$ y $3x^6 - 17x^4 - 20x^2 + 84$, y expresarlo en la forma [17-1].

8. Hallar en $C_{(1)}$ el m. c. d. y el m. c. m. de $16x^2 - 1$, $x - 4x^2$ $1 - 8x + 16x^2$, por operaciones racionales y por descomposición en factores primos.

9. Hallar el m. c. d. de $3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 - 2y^3$, $4x^2 - 7xy + 3y^2$.

10. Demostrar, por reducción al absurdo y aplicación de § 17-4, g_1, que $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ es irreducible en el campo absoluto de racionalidad si se cumple que los enteros $a_1, a_2, \dots, a_n$, pero no el a_0, son divisibles por un número primo p, y además, que a_n no es divisible por p^2 (F. G. Eisenstein).

11. Mediante el cambio $x = y + 1$, demostrar que para p primo es $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ irreducible en el campo absoluto de racionalidad.

12. Simplificar: 1º)

$$\frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} - 2}{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + 2}; \qquad 2º)\ \frac{(x + y)^5 - x^5 - y^5}{(x + y)^3 - x^3 - y^3}.$$

§ 18. Ceros de los polinomios de una variable

1. **Teorema fundamental del álgebra.** — Una *ecuación algebraica en una incógnita* z es una condición (§ 15-2, a) del tipo

$$[18\text{-}1] \quad f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0, \ (a_0 \neq 0),$$

obtenida igualando a cero un monomio o polinomio $f(z)$ de grado n en z, de coeficientes reales o complejos. El valor o los valores de z que verifican la ecuación, dependen de los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$, y aun solamente de las razones de n de estos coeficientes al restante, supuesto no nulo, pues para resolver [18-1], basta sacar a éste factor común y anular el polinomio que quede. Para $n \geqq 2$, las soluciones de [18-1] no pueden expresarse racionalmente en función de los coeficien-

tes, fuera de casos particulares. Si la ecuación [18-1] es del tipo binómico, $a_0 z^n + a_n = 0$, sus soluciones vienen dadas por la obtención de las n raíces n-ésimas (§ 10-2) de $-a_n/a_0$. Por extensión, se llaman *raíces* a las *soluciones* de [18-1], es decir, a los valores reales o complejos de z que la verifican. Dichas raíces son los *ceros del polinomio* que constituye el primer miembro de la ecuación [18-1], entendiendo por cero del polinomio a un valor de z (nulo o no) que anule a dicho polinomio. Por § 16-5, *c* sabemos que la condición necesaria y suficiente para que α sea raíz de [18-1] es que el primer miembro de [18-1] sea divisible por $z - \alpha$.

Si α pertenece al campo de racionalidad en que se consideren los coeficientes de la ecuación (§ 17-1), ello significa que su primer miembro será reducible en dicho campo. Por lo tanto, *una ecuación algebraica irreducible en una incógnita, no tiene raíces en el campo de racionalidad a que se refiera su irreducibilidad* (se entiende de su primer miembro, siendo nulo el segundo). Por ejemplo, la ecuación $z^2 + 1 = 0$ es irreducible en el campo real, y precisamente para hacerla reducible se ha ampliado dicho campo real al complejo, por adjunción de i (§ 17-1, *a*). Sin embargo, el campo complejo es ya suficientemente amplio como para que en él hallen solución todas las ecuaciones algebraicas, según afirma el siguiente

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: *Toda ecuación algebraica* [18-1] *en una incógnita z de grado $n \geqq 1$, con coeficientes reales o complejos tiene por lo menos una raíz (real o compleja).*

Probaremos primero que existe un valor $z = \zeta_1$, para el que $|f(z)|$ alcanza un valor mínimo $\gamma = |f(\zeta_1)|$, es decir, tal que para todo otro z es $|f(z)| \geqq |f(\zeta_1)| = \gamma$. El teorema quedará demostrado si luego se prueba que ha de ser $\gamma = 0$.

Definamos en el campo real la siguiente cortadura (§ 7-6, *d*): pertenece a la clase superior todo número real c' para el cual existe algún punto complejo z, tal que $c' \geqq |f(z)|$; en cambio, si para todo valor en el plano complejo de z es $c < |f(z)|$, entonces c pertenece a la clase inferior; por ejemplo, los números negativos. El elemento de separación $\gamma \geqq 0$ de dicha cortadura (siempre existente) se llama *extremo inferior* del conjunto $|f(z)|$ (§ 23-14); vamos a demostrar que dicho extremo inferior γ es accesible o mínimo (§ 23-14).

Sea $\alpha = \text{máx.}\,(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|, \gamma + 1)$, y tomemos $R > 2n\alpha/|a_0|$. Entonces, para $|z| \geqq R > 1$ es:

$$\left|\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right| \leqq \frac{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|}{R} \leqq \frac{n\alpha}{R} < \frac{|a_0|}{2},$$

y por lo tanto:

$$[18\text{-}2] \quad |f(z)| = \left|z^n\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right)\right| \geqq$$

$$\geqq |z|^n \left(|a_0| - \left|\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right|\right) > \tfrac{1}{2}|a_0|\,R^n > \gamma + 1.$$

En el plano complejo z, fuera del cuadrado Q_1, de lados paralelos a los ejes coordenados, centro 0 y semilado R, los valores de $|f(z)|$ cumplen [18-2], y por lo tanto el conjunto $|f(z)|$, para las z pertenecientes a Q_1 tiene γ por extremo inferior. Subdividamos Q_1 en cuatro cuadrados

congruentes entre sí, por medio de paralelas a sus lados. Por lo menos a uno de estos cuadrados, tomados con sus perímetros, tiene que corresponder un conjunto $|f(z)|$ que tenga γ por extremo inferior. Si hay más de uno, escojamos el primero que se presente por abajo primero y por la izquierda después: llamémoslo Q_3. Si con Q_3 se procede como con Q_1, obtendremos otro cuadrado: Q_4, cuarta parte de Q_3, al que tomado con su perímetro corresponde un conjunto $|f(z)|$ que tiene γ por extremo inferior. Continuando indefinidamente este proceso, vemos que las proyecciones de los cuadrados Q_ν sobre los ejes coordenados forman encajes de intervalos (§ 7-4) que determinan la parte real y parte imaginaria del número complejo ζ_1 tal que su afijo está contenido en todos los Q_ν. Vamos a ver que entonces ha de ser $|f(\zeta_1)| = \gamma$, pues si fuese $|f(\zeta_1)| - \gamma = \mu > 0$, vamos a llegar a una contradicción. En efecto, para cualquier valor complejo z fijo, consideremos un incremento complejo h, y para calcular $f(z+h)$ podemos aplicar (§ 12-1) la potencia del binomio $(z+h)^\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, dando:

[18-3] $f(z+h) = f(z) + b_1 h + b_2 h^2 + \ldots + b_{n-1} h^{n-1} + b_n h^n,$

donde $b_n = a_0 \neq 0$, con $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, dependientes sólo de z, pero no de h. Sea:

[18-4] $$m = \text{máx.}\ (|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n|),$$

y tomemos $z = \zeta_1$. Todos los puntos de un cuadrado Q_ν con ν suficientemente grande, son de la forma $\zeta_1 + h$, con h complejo tal que $|h| \leqq \mu/(2mn+\mu)$, y entonces es:

$$||f(\zeta_1+h)| - |f(\zeta_1)|| \leqq |f(\zeta_1+h) - f(\zeta_1)| <$$
$$< (|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|)\,|h| < \tfrac{1}{2}\mu,$$

es decir:

$$f(\zeta_1+h)| > |f(\zeta_1)| - \tfrac{1}{2}\mu = \gamma + \tfrac{1}{2}\mu,$$

y los valores de $|f(z)|$ correspondientes a los puntos de Q_ν no podrían tener γ por extremo inferior, contra lo supuesto. Por lo tanto, $\mu = 0$, siendo $|f(\zeta_1)| = \gamma$.

Probemos, finalmente, que $\gamma = 0$. Para ello bastará ver que si fuera $\gamma = |f(\zeta_1)| > 0$, existiría siempre otro valor, $\zeta_1 + h$, para el que $|f(\zeta_1+h)| < |f(\zeta_1)| = \gamma$, lo que es absurdo, por la definición de γ como extremo inferior del conjunto de los $|f(z)|$. En [18-3] habrá una primera $b_s \neq 0$. Tomemos h tal que

$$|h| = \text{mín.}\left(\frac{|b_s|}{nm}, \frac{\gamma}{|b_s|}\right); \quad \text{Arg}\,(b_s h^s) = \text{Arg}\,[f(\zeta_1)] + \pi.$$

en que m viene dado por [18-4], y al ser también $|b_s h^s| < |f(\zeta_1)|$, el afijo de $f(\zeta_1) + b_s h^s$ estará alineado con 0 y $f(\zeta_1)$ y entre ellos, es decir:

$$|f(\zeta_1) + b_s h^s| = |f(\zeta_1)| - |b_s h^s|.$$

Entonces, es:

$$f(\zeta_1+h) = f(\zeta_1) + b_s h^s + b_{s+1} h^{s+1} + \ldots + b_n h^n, \ (b_s \neq 0);$$
$$|b_{s+1} h^{s+1} + \ldots + b_n h^n| < |h^s| \cdot |h| \cdot (|b_{s+1}| + \ldots + |b_n|) <$$
$$< |b_s h^s|;$$
$$|f(\zeta_1+h)| \leqq |f(\zeta_1) + b_s h^s| + |b_{s+1} h^{s+1} + \ldots + b_n h^n| <$$
$$< |f(\zeta_1)| - |b_s h^s| + |b_s h^s| = |f(\zeta_1)| = \gamma,$$

que como habíamos afirmado, era absurdo suponer. Por lo tanto, $\gamma = 0$, y el teorema fundamental del álgebra queda demostrado.

2. Descomposición factorial. Relaciones entre las raíces y los coeficientes. — Hallado por el teorema fundamental del álgebra un valor que anule $f(z)$, si se aplica el teorema del resto y regla de RUFFINI (§ 16-5), queda:

$$f(z) \equiv (z - \zeta_1)\, f_1(z),$$

donde $f_1(z)$ es de grado $n - 1$. Volviendo a aplicar el teorema fundamental del álgebra:

$$f_1(z) \equiv (z - \zeta_2)\ f_2(z),$$

y así sucesivamente, de donde obtenemos la *descomposición factorial* del polinomio [18-1]:

[18-5] $$f(z) \equiv a_0(z - \zeta_1)\ (z - \zeta_2)\ \ldots\ (z - \zeta_n).$$

No puede haber más de n raíces distintas en el campo real o complejo, por el principio de identidad (§ 16-1, a). En cambio, algunas de esas raíces pueden coincidir, y entonces:

[18-6] $$f(z) \equiv a_0\ (z - \zeta_1)^{k1}\ (z - \zeta_2)^{k2}\ \ldots\ (z - \zeta_j)^{kj},$$

donde $k_1 + k_2\ \ldots + k_j = n$, llamándose a k_i *orden de multiplicidad de la raíz* ζ_i. No son posibles dos descomposiciones [18-6] distintas:

$$a_0(z - \zeta_1)^{k1}\ \ldots\ (z - \zeta_j)^{kj} \equiv a_0\ (z - \zeta_1)^{k'1}\ \ldots\ (z - \zeta_j)^{k'_j}$$

ya que si $k_1 > k'_1$, dividiendo por $(z - \zeta_1)^{k'1}$, en:

$$a_0(z - \zeta_1)^{k1-k'1}\ \ldots\ (z - \zeta_j)^{kj} \equiv a_0\ \ldots\ (z - \zeta_j)^{k'j}$$

el primer miembro se anularía para $z = \zeta_1$, y el segundo no; análogamente, $k_2 = k_2'$, ..., $k_j = k_j'$.

Así, pues, en el campo complejo, un polinomio de una variable de grado $n > 1$ no es nunca primo. Vemos también que *en el campo complejo, un polinomio de una variable de grado n tiene siempre n factores primos (lineales), contándose cada uno tantas veces como indique la multiplicidad del cero correspondiente*; es decir: *una ecuación* [18-1] *de grado n tiene precisamente n raíces distintas o coincidentes.*

Si los coeficientes a_r de [18-1] son *reales*, para valores z y $\bar{z}$ conjugados (§ 9-4, d) serán $a_r z^{n-r}$ y $a_r \bar{z}^{n-r}$ conjugados (§§ 9-5, b, y 10-1), con vectores representativos simétricos respecto del eje real. Por tanto, sus sumas respectivas ($r = 0, 1, 2, \ldots, n$) darán vectores (§ 9-5, a) también simétricos respecto del eje real. En definitiva, como las operaciones enteras hechas con números imaginarios conjugados dan resultados imaginarios conjugados (§ 9-4, d), los valores tomados por un polinomio de coeficientes *reales* para números z y $\bar{z}$ imaginarios conjugados, son imaginarios conjugados, es decir:

[18-7] $$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

Por ser 0 el conjugado de 0, deducimos que *las raíces imaginarias de una ecuación algebraica de coeficientes reales se presentan a pares imaginarios conjugados; en consecuencia, si la ecuación es de grado impar, tiene al menos una raíz real.* Además, por la forma de ir obteniendo (§ 16-5, a), los cocientes sucesivos, $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., vemos que *las raíces imaginarias conjugadas tienen en una ecuación algebraica de coeficientes reales el mismo orden de multiplicidad.*

Si en la descomposición factorial [18-5] de un polinomio de coeficientes reales agrupamos el factor correspondiente a una raíz $\xi + i\eta$, con el de su conjugada $\xi - i\eta$, obtenemos un trinomio de segundo grado de coeficientes *reales*:

[18-8] $$[z-(\xi+i\eta)]\cdot[z-(\xi-i\eta)] \equiv (z-\xi)^2+\eta^2 \equiv z^2+pz+q,$$
$$(p = -2\xi,\ q = \xi^2 + \eta^2)$$

Aplicado esto, con el orden de multiplicidad que corresponda, en [18-6], podemos afirmar que *en el campo real, todo polinomio de una variable de grado $n \geqq 1$ con coeficientes reales se descompone de un modo único en factores primos, tales que unos son binomios reales del tipo $z - \alpha$, y otros trinomios reales del tipo $(z-\xi)^2 + \eta^2 \equiv z^2 + pz + q$, $(p = -2\xi,\ q = \xi^2 + \eta^2)$, pudiendo ser unos u otros distintos o repetidos.*

De la fórmula [18-5], al efectuar el producto e igualar coeficientes, se obtiene:

[18-9] $$\begin{cases} -\dfrac{a_1}{a_0} = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n = \sum\limits_i \zeta_i, \\ +\dfrac{a_2}{a_0} = \zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \ldots + \zeta_{n-1}\zeta_n = \sum\limits_{<j} \zeta_i\zeta_j, \\ -\dfrac{a_3}{a_0} = \zeta_1\zeta_2\zeta_3 + \ldots + \zeta_{n-2}\zeta_{n-1}\zeta_n = \sum\limits_{i<j<h} \zeta_i\zeta_j\zeta_h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} = \zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n. \end{cases}$$

Para formar los sumandos se toman las combinaciones (§ 11-3, *b*) de 1, 2, 3, ..., n elementos entre las n raíces. En las fórmulas [18-9] se expresan las raíces, acaso iguales, separadamente, es decir, acaso sea $\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots$.

En particular, para $n = 2$ se obtienen las conocidas relaciones entre raíces y coeficientes de la ecuación de segundo grado:

[18-10] $$\zeta_1 + \zeta_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \zeta_1\zeta_2 = \frac{a_2}{a_0}.$$

De la última [18-9] se deduce que si $|a_n/a_0| < \varepsilon^n$, existe alguna raíz con $|\zeta_i| < \varepsilon$, y del mismo modo, si $|a_0/a_n| < 1/\mathrm{K}^n$, existe alguna raíz con $|\zeta_j| > \mathrm{K}$; lo primero quiere decir que *para $|a_n|$ suficientemente pequeño respecto de $|a_0|$, alguna raíz tiende a cero* (§ 24-1); lo segundo se expresa diciendo "intuitivamente", que *si una ecuación de grado n se reduce a grado $n-1$, envía una de sus raíces al infinito.* Del mismo modo se demuestra que si las razones de los h últimos coeficientes al primero tienden a cero (§ 24-1), hay h raíces que tienden a cero, y si las razones de los h primeros coeficientes al último tienden a cero, hay h raíces que tienden a infinito (§ 24-5).

Ejercicios

1. Suponiendo que la ecuación [18-1] tiene sus raíces en progresión aritmética, calcular éstas.

2. *a*) ¿Qué valor debe tener q, para que las tres raíces de la ecuación $x^3 - 3x^2 + 6x + q = 0$ estén en progresión aritmética? Calcúlense las raíces. *b*) Lo mismo para $x^3 - 147x^2 + 3234x + r = 0$.

3. Resolver las ecuaciones anteriores, suponiendo que las raíces estén en progresión geométrica.

4. La ecuación $x^3 + 3x^2 + qx + 3q = 0$ tiene dos raíces cuya suma es cero. Calcúlese el coeficiente q y hállense las raíces.

5. La condición necesaria y suficiente para que las raíces de la ecuación $A_0 z^4 + 4A_1 z^3 + 6A_2 z^2 + 4A_3 z + A_4 = 0$ formen una cuaterna armónica, es decir, $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = -1$, es la anulación del determinante

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}.$$

§ 19. Resolución elemental de ecuaciones por radicales

1. Ecuación de segundo grado. — *a*) *Resolución y discusión.* — La ecuación más general de segundo grado con coeficientes complejos, después de hechas las transformaciones explicadas en el § 15-2, se reduce al tipo

[19-1] $$a x^2 + b x + c = 0 \quad a \neq 0.$$

Multiplicando [19-1] por $4a$, resulta la ecuación equivalente:

$$4a^2 x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

y observando que $4abx$ es el duplo del producto de $2ax$ por b, podemos completar el cuadrado de $2ax + b$, sumando b^2 y restándolo al mismo tiempo, para que no sufra alteración. Resulta, pues:

[19-2] $$(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0.$$

El número $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* de la ecuación, y la naturaleza de las raíces depende del valor de este número *.

Recordando que el producto de la suma de dos números por su diferencia es la diferencia de sus cuadrados, y que el cuadrado de $\sqrt{\Delta}$ es Δ, la ecuación [19-2] puede escribirse así:

$$(2ax + b + \sqrt{\Delta})\,(2ax + b - \sqrt{\Delta}) = 0.$$

Los valores que la satisfacen son los que anulan a uno de los dos factores, es decir, los que cumplen la condición

* No se confundan el discriminante $b^2 - 4ac$ de la ecuación [19-1], con el discriminante $4ac - b^2$ de la forma $ax^2 + bxy + cy^2$.

$$2ax + b + \sqrt{\Delta} = 0, \text{ de donde } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

o la

$$2ax + b - \sqrt{\Delta} = 0, \text{ de donde } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};$$

luego, la ecuación tiene dos raíces, y sólo dos, que están expresadas por la fórmula doble:

[19-3] $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

a la cual conviene, a veces, darle la forma

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

La diferencia entre las dos raíces es:

$$x_2 - x_1 = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \neq 0, \quad \text{si es } \Delta \neq 0,$$

y si en la fórmula [19-3] suponemos $\Delta = 0$, resulta el valor único:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Obtenemos, pues, este resultado general:

La ecuación de segundo grado tiene dos raíces, reales o imaginarias, que son distintas si es $\Delta \neq 0$, y se confunden si es $\Delta = 0$.

Cuando los coeficientes son reales, el caso más frecuente, las dos raíces son reales si es $\Delta > 0$, y son imaginarias si es $\Delta < 0$, pues entonces las dos raíces cuadradas de $\Delta = -\Delta'$ son $\pm i\sqrt{\Delta'}$.

Ejemplos: 1. Sea la ecuación $2x^2+3x-2=0$; por ser $\Delta=9+4.2.2>0$, admite dos raíces reales y distintas, que son:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-3-5}{4} = -2. \end{cases}$$

2. La ecuación $9x^2 + 12x + 4 = 0$ tiene una raíz doble, por ser

$$\Delta = 12^2 - 4.9.4 = 4\ (6^2 - 36) = 0;$$

esta raíz única es

$$x = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}.$$

3. Las raíces de la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ son:

$$-1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i.$$

4. Raíces de la ecuación $x^2 + (2 - i)\, x - (3 + 3\, i) = 0$:

$$x = \frac{-2 + i \pm \sqrt{15 + 8\, i}}{2} = \frac{-2 + i \pm (4 + i)}{2} \begin{cases} x_1 = 1 + i; \\ x_2 = -3. \end{cases}$$

b_1) *Suma y producto de las raíces.* — Sumando las dos raíces dadas por la fórmula [19-3], se tiene:

[19-4] $$x_1 + x_2 = \frac{-2\, b}{2\, a} = -\frac{b}{a},$$

y multiplicándolas:

[19-5]

$$x_1\, x_2 = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})\ (-b-\sqrt{\Delta})}{4\, a_2} = \frac{b^2 - \Delta}{4\, a^2} = \frac{4\, ac}{4\, a^2} = \frac{c}{a}.$$

La suma de las raíces es el cociente del 2º coeficiente, cambiado de signo, por el 1º. El producto de las raíces es el cociente del 3º por el 1º, como ya sabíamos por [18-10].

b_2) Esta propiedad permite resolver elegantemente el problema: *hallar dos números, conocida su suma s y su producto p.*

Basta, en efecto, formar la ecuación de segundo grado:

[19-6] $$x^2 - s\, x + p = 0,$$

y sus dos raíces, cuando existen, cumplen la condición impuesta.

Recíprocamente: si x_1, x_2 son los números buscados, la ecuación

$$(x - x_1)\ (x - x_2) = 0, \text{ o sea } x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1\, x_2 = 0,$$

tiene estos dos números como raíces. Pero esta ecuación es la misma [19-6]; luego, las raíces de [19-6] son los *únicos* números que resuelven el problema.

c) *Variación del trinomio real de segundo grado.* — Dado un trinomio de coeficientes reales: $T = a\, x^2 + b\, x + c$ para estudiar su valor numérico al dar a x valores reales cualesquiera, distinguiremos tres casos:

PRIMER CASO: Si $\Delta = b^2 - 4\, a\, c > 0$, hay dos valores reales $x_1 < x_2$ que lo anulan, y entonces se tiene idénticamente (§ 18-2):

$$a\, x^2 + b\, x + c \equiv a\, (x - x_1)\ (x - x_2)\,.$$

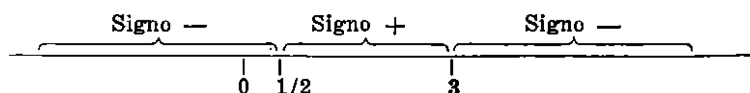
Si hacemos recorrer a x todos los valores reales posibles, resulta:

c_1) Mientras x se conserva menor que x_1 y que x_2, las diferencias $x - x_1$ y $x - x_2$ son negativas; luego, el trinomio T *tiene el mismo signo del coeficiente a.*

c_2) Mientras x toma un valor intermedio entre x_1 y x_2, una diferencia es positiva y la otra negativa; luego T *tiene signo opuesto al de a.*

c_3) Al tomar x valores mayores que x_1 y que x_2, ambas diferencias son positivas, y por lo tanto, *tiene* T *el mismo signo de* a.

EJEMPLO 5: El trinomio: $-2x^2 + 7x - 3$ se anula para los valores $x_1 = 1/2$, $x_2 = 3$; luego, toma los signos que indica el esquema siguiente:



SEGUNDO CASO: Si es $\Delta = 0$, hay un valor real único x_1 que anula a T, y se tiene:

$$T \equiv a(x - x_1)^2,$$

y como $(x - x_1)^2$ es siempre positivo, *para cualquier valor de x distinto de x_1 tiene* T *el mismo signo de* a.

Por ejemplo: $-4x^2 + 12x - 9$ es siempre negativo, excepto para el valor único $\frac{3}{2}$, que lo anula.

TERCER CASO: Si es $\Delta < 0$, como las raíces son imaginarias conjugadas:

$$x_1 = \alpha + \beta i, \quad x_2 = \alpha - \beta i,$$

será:

$$T \equiv a(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) \equiv a[(x - \alpha)^2 + \beta^2];$$

luego, T *tiene el mismo signo que* a.

Resulta, pues, que los únicos casos en que el trinomio conserva signo constante, son el 2º y el 3º. La diferencia estriba en que en el 2º caso hay un valor que lo anula, y ninguno en el 3º.

d) *Inecuaciones de segundo grado.* — El estudio precedente nos permite resolver fácilmente una inecuación cualquiera de segundo grado, *con coeficientes reales;* porque después de hechas las reducciones convenientes, se transforma en uno de los dos tipos siguientes:

$$a x^2 + b x + c > 0, \quad \text{o bien:} \quad a x^2 + b x + c < 0.$$

Fijándonos, por ejemplo, en el primer tipo (al cual puede reducirse también el otro cambiando de signo a, b y c), comenzaremos por hallar los valores de x que anulen al trinomio, es decir, resolveremos previamente la ecuación

[19-7] $$a x^2 + b x + c = 0.$$

Si ésta tiene dos raíces, $x_1 < x_2$, los valores que satisfacen a la inecuación son todos los *comprendidos* en el intervalo $x_1 < x < x_2$ si es $a < 0$; y las soluciones serán todos los valores *excluídos* por dicho intervalo, es decir, todos los números $x < x_1$ y los $x > x_2$, si es $a > 0$.

Si la ecuación [19-7] tiene una sola raíz real x_1, todo valor $x \neq x_1$ satisface a la inecuación, si es $a > 0$; y ningún valor si es $a < 0$.

Si la ecuación [19-7] carece de raíces reales, satisfacen a la inecuación todos los valores de x, si es $a > 0$; y ninguno si es $a < 0$.

Ejemplos: 6. Hallar los valores de x que satisfagan a la inecuación

$$2x^2 + x - 15 < 0.$$

Soluciones:

$$-3 < x < \frac{5}{2}.$$

7. **Resolver** la inecuación $2x^2 - 1{,}12x - 0{,}213 > 0$.

Soluciones:

$$x < -0{,}15 \quad \text{y} \quad x > 0{,}71.$$

8. Resolver la inecuación $5x^2 + 2x + 0{,}2 > 0$.

Soluciones: Todos los números, excepto el valor $x = -0{,}2$.

9. Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2 - \frac{1}{4}x + 3 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \\ -2x + 3 < 0 \end{array}\right\} \qquad \textit{Soluciones}: \frac{3}{2} < x < 2.$$

10. Hallar los valores de α tales que la ecuación

$$x^2 + \alpha x - \alpha + \frac{5}{4} = 0$$

tenga raíces reales.

Soluciones:

$$\alpha \leqq -5, \qquad \alpha \geqslant 1.$$

e) Resolución trigonométrica de la ecuación de segundo grado. — Cuando los coeficientes de una ecuación

[19-8] $$x^2 + bx + c = 0$$

son números decimales de varias cifras, y sobre todo cuando vienen dados por sus logaritmos, es muy práctica la resolución por medio de tablas trigonométricas.

Ante todo, se reconoce inmediatamente la naturaleza de las raíces si se observan los coeficientes. Si es $c < 0$, las dos raíces son reales de signos contrarios. Si es $c > 0$ y comparamos $4c$ con b^2, es decir, $2\sqrt{c}$ con $|b|$, según que se verifique:

$$\frac{1}{2}\lg c + 0{,}30103 \lesseqqgtr \lg |b|,$$

las raíces son reales distintas, reales iguales, o imaginarias conjugadas.

Primer caso: $c = -c' < 0$. (Raíces reales de signos contrarios): $b > 0$.

Calculemos un arco β tal que

[19-9] $$\frac{2\sqrt{c'}}{b} = \operatorname{tg}\beta$$

y las raíces de [19-8] son:

$$-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = -\frac{b}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4c}{b^2}}\right) =$$

$$= -\frac{b}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\cos\beta}\right) = -b\,\frac{\cos\beta \mp 1}{2\cos\beta},$$

que transformada en producto, y sustituyendo b por su expresión sacada de [19-9], da los valores

$$\frac{2\sqrt{c'}}{\operatorname{tg}\beta}\,\frac{\operatorname{sen}^2(\beta/2)}{\cos\beta}, \qquad -\frac{2\sqrt{c'}}{\operatorname{tg}\beta}\,\frac{\cos^2(\beta/2)}{\cos\beta}.$$

En resumen, obtenemos las fórmulas prácticas:

$$x_1 = +\sqrt{c'}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \qquad x_2 = -\sqrt{c'}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

Segundo caso: $c > 0$, $b > 0$ y $2\sqrt{c} < b$. (Raíces reales negativas). Calculemos un arco β tal que

[19-10] $$\frac{2\sqrt{c}}{b} = \operatorname{sen}\beta,$$

y las raíces de la ecuación son:

$$-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = -\frac{b}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4c}{b^2}}\right) = -b\,\frac{1 \mp \cos\beta}{2};$$

sustituyendo b por su valor sacado de [19-10], y pasando al arco mitad, obtenemos:

$$-\frac{2\sqrt{c}}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}, \qquad -\frac{2\sqrt{c}}{\operatorname{sen}\beta}\cos^2\frac{\beta}{2},$$

y simplificando resultan las fórmulas prácticas:

$$x_1 = -\sqrt{c}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \qquad x_2 = -\sqrt{c}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

Tercer caso: $c > 0$, $b > 0$, $2\sqrt{c} > b$. (Raíces imaginarias).

Como el módulo de ambas es $\sqrt{c}$, la expresión de las raíces es:

[19-11] $$x = \sqrt{c}\,(\cos\alpha \pm i \operatorname{sen}\alpha), \quad \textit{siendo } \cos\alpha = -\frac{b}{2\sqrt{c}}.$$

Escolio: Hemos supuesto $b > 0$; si fuese $b < 0$, bastaría cambiar x por $-x$ en la ecuación [19-8], y ver en cuál de los dos casos queda ésta incluída; al final basta cambiar el signo de las raíces.

2. Ecuaciones reducibles a cuadráticas. — a) ***Ecuación bicuadrada.*** — Entre las ecuaciones de grado superior que se reducen al segundo grado, mediante una sustitución conveniente, está la *bicuadrada*

[19-12] $$a x^4 + b x^2 + c = 0.$$

Poniendo $y = x^2$, se transforma en

[19-13] $$a y^2 + b y + c = 0,$$

y calculadas las raíces y_1, y_2, de ésta, las de la primera son:

$$x_1 = +\sqrt{y_1},\ x_2 = -\sqrt{y_1},\ x_3 = +\sqrt{y_2},\ x_4 = -\sqrt{y_2},$$

las cuales están dadas por la fórmula cuádruple

[19-14] $$\pm\sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}}.$$

Discusión: He aquí todos los casos posibles:

Raíces de [19-13]	*Raíces de* [19-12]
Dos reales positivas.	Cuatro reales distintas.
Una real positiva doble.	Dos reales dobles.
Una real positiva y otra negativa.	Dos reales y dos imaginarias conjugadas.
Una negativa doble.	Dos imaginarias conjugadas dobles.
Dos negativas.	Dos pares de imaginarias conjug.
Dos imaginarias.	Dos pares de imaginarias (conjugadas si a, b, c son reales).

EJEMPLO 1:

$$x^4 - 11\,x^2 + 16 = 0.$$

Soluciones:

$$x = \pm \sqrt{\frac{11 \pm \sqrt{57}}{2}}$$

$$x_1 = 3{,}05\ \ldots,\ x_2 = -3{,}05\ \ldots,\ x_3 = 1{,}31\ \ldots,\ x_4 = -1{,}31\ \ldots$$

b) *Transformación de un radical doble en simples.* — b_1) Obsérvese que el radical doble que aparece en la fórmula [19-14] es del tipo $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, y conviene averiguar si es posible transformarlo en suma o diferencia de dos radicales sencillos, es decir, en la forma

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2}.$$

Elevando al cuadrado, ha de ser:

$$A \pm \sqrt{B} = x_1 + x_2 \pm 2\sqrt{x_1\,x_2},$$

y para que esta igualdad se verifique, *es suficiente* * que sea

$$A = x_1 + x_2, \quad B = 4\,x_1\,x_2;$$

luego (§ 19-1, b_2), x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación

$$x^2 - A\,x + \frac{B}{4} = 0,$$

de donde:

$$x_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \qquad x_2 = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Resulta, pues, la identidad

$$[19\text{-}15] \quad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

donde se han de tomar al mismo tiempo los dos signos + ó los dos —, y los radicales en su valor aritmético, es decir, ambos

* Se demuestra sencillamente este recíproco: si es $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$, siendo a, b, c y d números *reales racionales*, y ni b ni d cuadrados perfectos, debe ser $a = c$ y $b = d$, porque de lo contrario, llamando $a - c = e$, y elevando al cuadrado, resultaría $e^2 + b + 2\,e\,\sqrt{b} = d$; es decir, un número racional sería igual a uno irracional.

positivos. Esta transformación tendrá, pues, ventaja, y resuelve el problema, *si* $A^2 - B$ *es un cuadrado perfecto.*

b_2) Aplicando esta transformación a la fórmula [19-14], se tiene:

$$A = -\frac{b}{2a}, \quad B = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}, \quad A^2 - B = \frac{c}{a};$$

luego, tiene ventaja *si c/a es un cuadrado perfecto.* Sea, por ejemplo, la misma ecuación $x^4 - 11x^2 + 16 = 0$; aplicando [19-15], resulta:

$$A = \frac{11}{2}, \quad A^2 - B = 16;$$

luego:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{(11/2)+4}{2}} \pm \sqrt{\frac{(11/2)-4}{2}} = \frac{\sqrt{19}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

que sólo exige el cálculo de las raíces $\sqrt{19}$, $\sqrt{3}$, mientras que el método ordinario exige calcular $\sqrt{57}$, $\sqrt{9{,}275}$ y $\sqrt{1{,}725}$

Obsérvese que la fórmula (§ 10-3) no es sino ésta [19-15], en el caso $A^2 - B = a^2 + b^2 = r^2$.

c) *Ecuaciones recíprocas.* — Prescindiendo de las bicuadradas y de aquellas ecuaciones en que se observa la existencia de raíces racionales α (por ejemplo, $+1$ ó -1), las cuales se rebajan de grado dividiendo por el binomio $x - \alpha$, las más sencillas son las de cuarto grado, llamadas *recíprocas*:

[19-16] $$a x^4 + b x^3 + c x^2 + b x + a = 0,$$

que tienen iguales los dos coeficientes extremos, y también iguales los dos contiguos.

Después de dividir por x^2, se transforma en ésta:

[19-17] $$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0,$$

y llamando

$$x + \frac{1}{x} = z, \text{ de donde } x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2,$$

la ecuación [19-17] se transforma en ésta:

[19-18] $$a z^2 + b z + c - 2a = 0,$$

y resuelta [19-18] cada una de sus raíces, da un par de raíces de [19-16], resolviendo la ecuación en x:

[19-19] $$x^2 - z x + 1 = 0.$$

EJEMPLO 2: Sea la ecuación $x^4 - 2x^3 - 2x + 1 = 0$.
La ecuación transformada [19-18] es:

$$z^2 - 2z - 2 = 0, \quad z = 1 \pm \sqrt{3},$$

y sustituyendo en [19-19], obtenemos las cuatro soluciones:

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{12}), \quad x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{12}\, i).$$

d) *Otras ecuaciones que se reducen a cuadráticas.* — He aquí algunos ejemplos de otras ecuaciones que también se reducen a cuadráticas, las cuales pueden servir de tipo para la resolución de ecuaciones análogas.

d_1) $2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x = 0$ se puede escribir así:

$$x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2\right) = 0,$$

y poniendo $x^{\frac{1}{3}} = y$, resulta $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$; luego, las soluciones son:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 0.$$

d_2) $$\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + x = 0.$$

Separando el factor $\sqrt{x}$, queda $\sqrt[4]{x} - 2 + \sqrt{x} = 0$, y poniendo $\sqrt[4]{x} = y$, basta resolver $y^2 + y - 2 = 0$, que da: $y_1 = 1$, $y_2 = -2$.

Soluciones: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. *Solución extraña*: $x_2 = 16$.

d_3) $$\frac{(x^3 - a)^4 + 1}{(x^3 - a)^2} = m.$$

Poniendo $(x^3 - a)^2 = y$, resulta $y^2 - my + 1 = 0$, $y = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}$

$$x^3 = a \pm \sqrt{y} = a \pm \sqrt{\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2 - 4}{4}}} = a \pm \frac{1}{2}\sqrt{m + 2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m - 2},$$

fórmula que da cuatro valores. Sus raíces cúbicas son las raíces de la ecuación d_3.

e) *Sistemas cuadráticos de ecuaciones.* — **Dado un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, entre las cuales hay una de segundo grado y las demás lineales, se resuelve el sistema formado por éstas despejando $n - 1$ de las incógnitas en función de la restante, y sustituídas en la ecuación de segundo grado, se obtiene una ecuación cuadrática con una sola incógnita. Resuelta ésta, basta sustituir sus valores en las fórmulas antes halladas.**

EJEMPLO 3: Sea el sistema

$$\left.\begin{aligned} (y + z)^2 + (z + x)^2 + (x + y)^2 &= 1 \\ 2(y + z) &= x + z \\ 5(x + z) &= 2(x + y) \end{aligned}\right\}$$

Las dos últimas ecuaciones pueden escribirse así:

$$\left\{\begin{aligned} 2y + z &= x \\ 2y - 5z &= 3x, \end{aligned}\right. \qquad \text{de donde} \qquad \left\{\begin{aligned} y &= \frac{-8x}{-12} = \frac{2}{3}x \\ z &= \frac{4x}{-12} = -\frac{1}{3}x \end{aligned}\right.$$

y sustituyendo en la primera, resulta: $\dfrac{30}{9}x^2 = 1$, $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{30}}$, y finalmente:

$$x = \pm \frac{3}{\sqrt{30}}, \quad y = \pm \frac{2}{\sqrt{30}}, \quad z = \mp \frac{1}{\sqrt{30}},$$

con *dos* soluciones correspondientes a las ternas de signos superiores e inferiores, respectivamente.

Cuando existe cierta simetría, como en este sistema, multitud de artificios permiten simplificar la resolución. Basta deducir ecuaciones sencillas que sean consecuencias del sistema; de este modo pueden introducirse soluciones extrañas, y habrá que comprobar si los valores hallados satisfacen a las ecuaciones dadas. En el ejemplo anterior podemos escribir así el sistema

$$\left.\begin{array}{c} (y + z)^2 + (z + x)^2 + (x + y)^2 = 1 \\ \dfrac{y+z}{1} = \dfrac{z+x}{2} = \dfrac{x+y}{5} \end{array}\right\};$$

elevando al cuadrado las últimas, y sumando numeradores y denominadores, resulta, teniendo en cuenta la primera:

$$\frac{(y+z)^2}{1} = \frac{(z+x)^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{25} = \frac{1}{30};$$

luego,

$$y + z = \pm \frac{1}{\sqrt{30}}, \quad z + x = \pm \frac{2}{\sqrt{30}}, \quad x + y = \pm \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

Sumando las tres, sale:

$$x + y + z = \pm \frac{4}{\sqrt{30}},$$

y restando de ésta cada una de las anteriores, obtenemos las mismas dos ternas de valores que antes.

3. **Ecuación cúbica.** — *a*) La ecuación general de tercer grado, reducido su primer coeficiente a_0 a 1 (para lo cual basta dividir por a_0 todos los términos), es:

[19-20] $$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

y poniendo $x = x' - \frac{a_1}{3}$, el coeficiente de x^2 se anula, obteniendo una ecuación sin segundo término, cuyas raíces son las de la primera, incrementadas en $\frac{a_1}{3}$. Bastará, pues, estudiar las ecuaciones del tipo:

[19-21] $$x^3 + p x + q = 0.$$

Poniendo $x = u + v$, y agrupando los términos convenientemente, la ecuación se transforma en:

$$u^3 + v^3 + 3 u v (u + v) + p (u + v) + q =$$
$$= u^3 + v^3 + (3 u v + p)(u + v) + q = 0,$$

la cual queda satisfecha por los valores que cumplan las condiciones:

[19-22] $\begin{cases} 3\,u\,v = -p \\ u^3 + v^3 = -q, \end{cases}$ de donde: [19-23]; $\begin{cases} u^3\,v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$

luego, u^3 y v^3 son las raíces de la ecuación cuadrática:

[19-24] $$y^2 + q\,y - \frac{p^3}{27} = 0,$$

llamada *resolvente* de [19-21] *. Resultan así los valores:

[19-25] $$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},\ v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

y extrayendo la raíz cúbica, obtenemos 3 valores de u y 3 de v, que dan 9 *pares de valores;* pero aunque todos satisfacen a [19-23], no todos cumplen las condiciones [19-22], pues la elevación al cubo ha introducido soluciones extrañas; debemos elegir *solamente aquellos que satisfacen a la condición*:

[19-26] $$u\,v = -\frac{p}{3}.$$

Con esta restricción, las tres raíces (§ 18-2) de la ecuación vienen dadas por la fórmula debida a SCIPION DEL FERRO, que suele llamarse de TARTAGLIA o de CARDANO:

$$x = \sqrt[3]{\left(\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)\right)} + \sqrt[3]{\left(\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)\right)}$$

b) *Discusión.* — Fijándonos especialmente en el caso en que los coeficientes sean *reales*, bastará elegir aquellos valores de u y v que dan al producto $u.v$ valor real; distinguiremos tres casos:

PRIMER CASO: $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} > 0$. Entonces son reales las dos expresiones [19-25]; llamando u_1 y v_1 a sus raíces cúbicas *reales*, los tres valores de u y v son:

$$u_1,\quad u_1 \,.\, \varepsilon,\quad u_1 \,.\, \bar{\varepsilon}\ ;\quad v_1,\quad v_1 \,.\, \varepsilon,\quad v_1 \,.\, \bar{\varepsilon},$$

siendo ε y $\bar{\varepsilon}$ las raíces cúbicas imaginarias de 1:

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\ ;\ \bar{\varepsilon} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Las únicas combinaciones posibles que satisfacen a [19-26] nos dan las tres raíces de la ecuación; a saber:

$$\underset{\text{(real)}}{x_1 = u_1 + v_1},\quad \underbrace{x_2 = u_1\,\varepsilon + v_1\,\bar{\varepsilon},\quad x_3 = u_1\,\bar{\varepsilon} + v_1\,\varepsilon.}_{\text{(imaginarias conjugadas)}}$$

* El número $27\,q^2 + 4\,p^3$ se llama *discriminante* de la ecuación cúbica.

SEGUNDO CASO: $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$. Entonces resulta $u_1 = v_1$, y las raíces son:

$$x_1 = 2\,u_1, \quad x_2 = x_3 = u_1\,(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) = -u_1.$$
(real) (reales iguales)

TERCER CASO: $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Entonces son imaginarias conjugadas las expresiones [19-25]. Pongamos:

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \rho\,(\cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

calculándose cómodamente ρ y θ por las fórmulas:

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \qquad \cos\theta = -\frac{q}{2\rho},$$

y los tres valores de u y v serán:

$$\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{3}\right), \qquad \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{3}\right),$$

$$\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+2\pi}{3}\right), \quad \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$

$$\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+4\pi}{3}\right), \quad \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+4\pi}{3}\right),$$

para que cumplan la condición [19-26] debe aparearse cada uno con el que tiene enfrente, y obtenemos así las tres raíces reales y distintas:

$$x_1 = 2\,\rho^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3}, \quad x_2 = 2\,\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3} + 120^\circ\right), \quad x_3 = 2\,\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3} + 240^\circ\right).$$

Éste es el caso llamado *irreducible*, porque el cálculo de los tres valores a que se reduce la expresión compleja, es preciso hacerlo trigonométricamente.

EJEMPLOS: 1. Sea la ecuación:

$$x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 4 = 0.$$

Pondremos $x = x' - \frac{2}{3}$, y resulta la transformada:

$$x'^3 + \frac{5}{3}\,x' + \frac{70}{27} = 0$$

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{35^2}{27^2} + \frac{5^3}{9^3} = \frac{2.3^3.5^3}{3^6} > 0$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-35 \pm 15\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-35 \pm 36{,}74235}$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{1{,}74235} = \frac{1}{3} \cdot 1{,}20331 = 0{,}40110 \\ v_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-71{,}7424} = -\frac{1}{3} \cdot 4{,}15520 = -1{,}38507 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 - \frac{2}{3} = -1{,}65063 \\ x_2 = \left(-\frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} - \frac{2}{3}\right) + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,(u_1 - v_1) = -0{,}17468 + i.1{,}54687 \\ x_3 = \left(-\frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} - \frac{2}{3}\right) - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,(u_1 - v_1) = -0{,}17468 - i.1{,}54687 \end{cases}$$

2. $x^3 - 1{,}74\,x^2 - 2{,}52\,x + 3{,}97 = 0.$

Pondremos $x = x' + 0{,}58$, y resulta la transformada:

$$x'^3 - 3{,}5292\,x' + 2{,}118176 = 0 \qquad \left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0\right)$$

$\lg(-p)$	$= 0{,}547676$	$\lg q$	$= 0{,}325962$
$\lg(-p^3)$	$= 1{,}643028$	$\lg \rho$	$= 0{,}105832$
$\lg 27$	$= 1{,}431364$	$\lg 2$	$= 0{,}301030$
	$0{,}211664$	$\lg(-\cos\theta)$	$= \bar{1}{,}919100$
$\lg \rho$	$= 0{,}105832$	$\theta = 180° - (33°53'50'') = 146°6'10''$	

$\lg \cos 48°\ 42'\ 3''\ 3 = \bar{1}{,}819537$
$\lg \cos 11°\ 17'\ 56''\ 7 = \bar{1}{,}991500$
$\lg \cos 71°\ 17'\ 56''\ 7 = \bar{1}{,}506002$

$\lg\ x'_1 = 0{,}155844$	$x'_1 = 1{,}43168$	$x_1 = +2{,}01168$
$\lg(-x'_2) = 0{,}327808$	$x'_2 = -2{,}12720$	$x_2 = -1{,}54720$
$\lg\ x'_3 = \bar{1}{,}842309$	$x'_3 = 0{,}69552$	$x_3 = +1{,}27552$

4. **Ecuación cuártica.** — Si en la ecuación cuártica general (previa la división por el primer coeficiente):

[19-27] $$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

efectuamos la sustitución $x = x' - \frac{a_1}{4}$, obtenemos otra ecuación sin segundo término, del tipo:

[19-28] $$x^4 + p\,x^2 + q\,x + r = 0.$$

Procediendo como en la ecuación cúbica, pongamos $x = u + v + w$, igualdad que, elevada al cuadrado, puede escribirse así:

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2\,(u\,v + v\,w + w\,u)\,.$$

Elevando de nuevo al cuadrado,

$$x^4 - 2\,(u^2 + v^2 + w^2)\,x^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = \\ = 4\,(u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2) + 8\,u\,v\,w\,(u + v + w),$$

o bien:

$$x^4 - 2\,(u^2 + v^2 + w^2)\,x^2 - 8\,u\,v\,w\,x + (u^2 + v^2 + w^2)^2 - \\ - 4\,(u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2) = 0,$$

y la ecuación [19-28] queda satisfecha si obtenemos valores de u, v, w, que satisfagan a las condiciones:

[19-29] $$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -p/2 \\ u\,v\,w = -q/8 \\ (u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4\,(u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2) = r \end{cases}$$

Elevando al cuadrado la segunda, y combinando primera con tercera, resulta:

[19-30] $$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -p/2 \\ u^2 v^2 w^2 = q^2/64 \\ u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2 = (p^2 - 4\,r)/16; \end{cases}$$

luego, u^2, v^2, w^2 son raíces de la ecuación:

[19-31]

$$(y-u^2)\,(y-v^2)\,(y-w^2) = y^3 + \frac{p}{2}\,y^2 + \frac{p^2 - 4\,r}{16}\,y - \frac{q^2}{64} = 0,$$

llamada *resolvente* de [19-28]. Resolviendo esta ecuación [19-31] obtendremos tres valores y_1, y_2, y_3, y extrayendo sus raíces cuadradas resultan los valores $\pm\sqrt{y_1}$ para u; los valores $\pm\sqrt{y_2}$ para v, y los valores $\pm\sqrt{y_3}$ para w; los ocho productos $u\,v\,w$ que pueden formarse son dos a dos opuestos, siendo cuatro de ellos iguales a $-q/8$ y los otros cuatro iguales a $+q/8$; prescindiendo de estas soluciones extrañas introducidas por la elevación al cuadrado, elegiremos las cuatro ternas de valores que cumplen la condición [19-29], o sea $u\,v\,w = -q/8$, y así resulta la fórmula

[19-32] $$x = \pm\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3},$$

que da las cuatro raíces de la ecuación, debiendo calcularse $y_1\,y_2\,y_3$ como raíces de la ecuación resolvente [19-31], por la regla de TARTAGLIA o por otro método de resolución.

DISCUSIÓN: Si los coeficientes son reales, y prescindimos del caso $q = 0$ de la ecuación bicuadrada, ya estudiado en § 19-2, *a*, como el producto de las tres raíces de la resolvente [19-31] es positivo, caben tres casos:

1º Las tres raíces $y_1\ y_2\ y_3$ son reales positivas; 2º Una positiva y dos negativas; 3º Una positiva y dos imaginarias conjugadas.

PRIMER CASO: Siendo reales positivas las tres raíces $y_1\,y_2\,y_3$, son reales sus raíces cuadradas, y las ternas $u\,v\,w$ que cumplen la condición [19-29] dan las siguientes raíces:

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}\ ; & \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}\ ; \\ -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}\ ; & -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} \end{matrix}\right\}\text{si es } q < 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\,; & -\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}\,; \\ +\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}\,; & +\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3} \end{array}\right\} \text{si es } q > 0$$

La ecuación [19-28] *tiene, pues, cuatro raíces reales, que son todas distintas si lo son* y_1, y_2, y_3; *pero habrá dos iguales, o tres, si la ecuación* [19-31] *tiene dos raíces iguales o lo son las tres.*

SEGUNDO CASO: Sea $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, $y_3 < 0$; las raíces cuadradas de y_2, y_3 son entonces de la forma $\pm\alpha i$, $\pm\beta i$, $(\alpha > 0, \beta > 0)$ y las mismas fórmulas anteriores nos dan las raíces:

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{y_1}+(\alpha+\beta)\,i, & \sqrt{y_1}-(\alpha+\beta)\,i; \\ -\sqrt{y_1}+(\alpha-\beta)\,i, & -\sqrt{y_1}+(\beta-\alpha)\,i \end{array}\right\} \text{si es } q > 0,$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\sqrt{y_1}+(\alpha+\beta)\,i, & -\sqrt{y_1}-(\alpha+\beta)\,i \\ \sqrt{y_1}+(\alpha-\beta)\,i, & \sqrt{y_1}+(\beta-\alpha)\,i; \end{array}\right\} \text{si es } q < 0,$$

que *son imaginarias conjugadas dos a dos, si* $\alpha \neq \beta$; *pero si* $\alpha = \beta$, *hay dos reales iguales y dos imaginarias conjugadas.*

TERCER CASO: Sea $y_1 > 0$; y_2 e y_3 imaginarias conjugadas. Las raíces cuadradas de estas últimas serán de la forma $\pm(\alpha + i\beta)$, $\pm(\alpha - i\beta)$, y obtenemos como raíces:

$$-\sqrt{y_1}+2\alpha; -\sqrt{y_1}-2\alpha; \quad \sqrt{y_1}+2i\beta; \quad \sqrt{y_1}-2i\beta, \text{ si es } q > 0,$$

$$\sqrt{y_1}+2\alpha; \quad \sqrt{y_1}-2\alpha; -\sqrt{y_1}+2i\beta; -\sqrt{y_1}-2i\beta, \text{ si es } q < 0,$$

luego, *hay dos raíces reales desiguales y dos imaginarias conjugadas.*

NOTA: La importancia teórica de la fórmula [19-32] estriba en que con ella queda resuelta la ecuación general de 4º grado, por medio de una expresión algebraica irracional respecto de los coeficientes; pero su valor práctico es casi nulo; por eso no ponemos ejemplos numéricos.

EJERCICIOS

1. Dos trenes parten a la vez de A y B. Al cruzarse, el tren de A ha recorrido 20 km más que el otro, y llega a B 45 minutos después, mientras que el otro tarda aún $1^h\,20^m$ en llegar a A. ¿Qué distancia hay entre A y B?

2. Un recipiente de 750 litros puede ser llenado por un grifo en un cierto tiempo. Si se agrega otro que arroja 200 litros por hora, se necesita una hora menos. Se pide: *a*) Cuánto arroja por hora el primer grifo y cuánto tiempo tardará en llenar el recipiente; *b*) Dar una interpretación física de la solución extraña que aparece en la ecuación resolvente.

3. Obtener la relación que debe existir entre los coeficientes de la ecuación [19-1] para que una raíz sea doble de la otra.

4. ¿Para qué valores de x los puntos de la recta $y = 2x + 3$ distan menos del eje x que los de la recta $y = 6 - x$? Gráfica.

5. Resolver $8x^{-6} + 999x^{-3} = 125$.

6. Resolver $\sqrt{x-2} + \sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 1}$.

7. Resolver $10x^6 - 19x^5 + 11x^4 - 28x^3 + 11x^2 - 19x + 10 = 0$.

8. Resolver: *a*) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$;

$$b) \quad \left(\frac{27}{8}\right)^{1+x} + \left(\frac{27}{8}\right)^{1-x} = \frac{117}{16}.$$

9. Resolver el sistema: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$; $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$.

10. Resolver el sistema:

$$\frac{-x+y+z}{a} = \frac{x-y+z}{b} = \frac{x+y-z}{c}; \quad xyz = m^3.$$

11. Un rectángulo de 34 dm de perímetro gira alrededor de su mínima mediatriz y engendra un cilindro de 550 dm³ de volumen. Calcular las longitudes de los lados del rectángulo, tomando $\pi = 22/7$.

12. Para resolver la ecuación cuártica $x^4 = ax^2 + bx + c$, basta determinar un número z tal que el segundo miembro de $(x^2 + z)^2 = (a + 2z)x^2 + bx + (c + z^2)$ sea un cuadrado perfecto en x. Así se obtiene una ecuación cúbica para z cuyas soluciones permiten hallar las de la ecuación dada. Hágase el desarrollo completo y discusión.

Notas al Capítulo IV

1. **Números algebraicos y trascendentes.** — *a*) *Definiciones. Teorema de* CANTOR. — Como un número racional, $x = p/q$, es raíz de una ecuación $qx - p = 0$, es natural generalizar el concepto de número racional, llamando *número algebraico* a todo número real o complejo x, raíz de una ecuación algebraica (§ 18-1):

$$[\text{IV-1}] \quad f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (n \geqq 1,\ a_0 \neq 0),$$

de coeficientes a_k *enteros.* Son números algebraicos: 3, 2/5, $\sqrt{2}$, $3 + i\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{2} - \sqrt{2}$, ..., y también otros que no pueden expresarse mediante radicales (cfr. § 23-8).

Es inmediato, por sencillo cambio de incógnita en [IV-1], que tanto el recíproco como la potencia de exponente entero de un número algebraico es algebraico. Puede demostrarse fácilmente, utilizando la teoría de la eliminación (§ 42), que las raíces de una ecuación algebraica con coeficientes algebraicos son también números algebraicos. De ahí se deduce que las operaciones de suma, diferencia, producto, cociente, potenciación entera y radicación en número finito de veces entre números algebraicos, dan como resultado un número algebraico.

Los números no algebraicos se llaman *trascendentes*, pues "trascienden la potencia de los métodos algebraicos" (EULER). Que tales números efectivamente existen en el campo real, resulta del siguiente teorema de CANTOR:

El conjunto de los números algebraicos es numerable.

En efecto, si llamamos "*altura*" de la ecuación [IV-1] al número natural

$$h = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| + n - 1;$$

entonces, para cada número natural h hay sólo un número *finito* de ecua-

ciones de altura h, y como cada una tiene sólo un número *finito* de raíces (§ 16-1, a), hay sólo un número *finito* de números algebraicos correspondientes a ecuaciones de altura h. En consecuencia, podemos ordenar los números algebraicos en una sucesión, comenzando por los de ecuaciones de altura 1, luego de altura 2 no considerados antes, etc.

b) *Teorema de* LIOUVILLE. — Diremos que un número algebraico x es *de grado* n, si es raíz de una ecuación [IV-1] de grado n, pero no de ninguna otra de grado menor con coeficientes enteros. Si $n > 1$ el número es irracional, pero si es real puede aproximarse tanto como se quiera por números racionales p/q (§§ 6-6 y 7-4). El siguiente teorema de LIOUVILLE (que luego utilizaremos para la construcción efectiva de números trascendentes) muestra que la exactitud de esta aproximación queda acotada en la siguiente forma:

Para todo número real algebraico x de grado $n > 1$, cualquier sucesión p_ν/q_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) de sus aproximaciones racionales cumple la desigualdad:

[IV-2] $$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{n+1}},$$

desde un valor de q suficientemente grande en adelante.

Supongamos, en efecto, que x es raíz de [IV-1], y sea $r = p/q$; se tiene:

$$\mathrm{f}(r) = \mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(x) = a_{n-1}(r - x) + a_{n-2}(r^2 - x^2) + \ldots + a_0(r^n - x^n),$$

de donde resulta, dividiendo por $r - x$:

$$\frac{\mathrm{f}(r)}{r - x} = a_{n-1} + a_{n-2}(r + x) + \ldots + a_0(r^{n-1} + r^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}).$$

Si $r = p/q$ difiere de x en menos de 1, se tiene entonces:

$$\left| \frac{\mathrm{f}(r)}{r - x} \right| < |a_{n-1}| + 2\,|a_{n-2}|\,(|x| + 1) + \ldots + \\ + n\,|a_0|\,(|x| + 1)^{n-1} = \mathrm{M},$$

y si ahora suponemos que el denominador q es mayor que este número fijo M, tendremos:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{|\mathrm{f}(r)|}{\mathrm{M}} > \frac{|\mathrm{f}(r)|}{q}.$$

Por ser $a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} p + \ldots + a_0 p^n$ entero y distinto de cero (pues en caso contrario $\mathrm{f}(r) = 0$ implicaría que $\mathrm{f}(x)$ es divisible (§ 16-5, c), por $x - r$, y entonces x sería raíz de una ecuación de grado menor que n), se tiene:

$$|\mathrm{f}(r)| = \left| \frac{a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} p + \ldots + a_0 p^n}{q^n} \right| > \frac{1}{q^n}.$$

Así, pues, para cualquier $q > \mathrm{M}$, donde M depende sólo de x, ha de cumplirse

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q^{n+1}}.$$

como queríamos demostrar.

c) *Números de* LIOUVILLE. — Por el teorema de CANTOR (a) hemos visto que existen números trascendentes sin necesidad de construir ninguno, pero antes que CANTOR demostró J. LIOUVILLE (1809-1882), basándose en el teorema (b), que es trascendente todo número (llamado de LIOUVILLE) de la forma:

[IV-3] $$x = \frac{d_1}{10^{1!}} + \frac{d_2}{10^{2!}} + \frac{d_3}{10^{3!}} + \ldots + \frac{d_k}{10^{k!}} + \frac{d_{k+1}}{10^{(k+1)!}} \ldots = \\ = 0{,}\ d_1 d_2 0\ 00 d_3\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 00 d_4\ 000\ 000\ \ldots.$$

donde d_i son dígitos cualesquiera, de los cuales hay infinitos no nulos. En efecto, sea r_k la fracción decimal obtenida tomando las cifras de x hasta $d_k 10^{-k!}$; entonces,

[IV-4] $$|x - r_k| < 10.10^{-(k+1)!},$$

y si fuera x algebraico de grado n, poniendo en [IV-2] $p/q = r_k = p/10^{k!}$, tendríamos para k suficientemente grande

$$|x - r_k| > 10^{-k!(n+1)},$$

que conjuntamente con [IV-4] nos daría la desigualdad $k!(n+1) > > (k+1)! - 1$, falsa para k suficientemente grande. Por consiguiente, x es trascendente.

ESCOLIO: El conjunto de los números trascendentes tiene en virtud del teorema de CANTOR (a) la potencia del continuo (Cap. II, nota II). La misma potencia tiene el conjunto de los números de LIOUVILLE [IV-3], pues se pueden poner éstos en correspondencia biunívoca con *todos* los números reales de (0,1] asociando a [IV-3] el número 0, $d_1 d_2 d_3 \ldots$, y observando que todo número real de (0.1] puede escribirse de una sola manera con infinitas cifras (por ejemplo $0{,}35 = 0{,}34999\ldots$).

d) *Resultados recientes sobre números trascendentes.* — El estudio de la aproximación de irracionales algebraicos por números racionales se ha proseguido recientemente. El noruego A. THUE probó que en el teorema de LIOUVILLE (b), el exponente $n+1$ puede reemplazarse por $\frac{1}{2}n+1$, y posteriormente, el matemático alemán C. L. SIEGEL logró reemplazarlo por $2\sqrt{n}$, lo que da un resultado más preciso para n grande.

Pero los problemas más interesantes consisten en probar el carácter algebraico o trascendente de ciertos números tales como π (razón de la circunferencia al diámetro), e (§ 8-8, c_1) y los expresados de ciertas maneras tales como $2^{\sqrt{2}}$. En 1873, CH. HERMITE (1822-1905) probó que el número e es trascendente, y en 1882, por una generalización del método de HERMITE, logró F. LINDEMANN probar la trascendencia de π, resolviendo así, en sentido negativo, la cuestión secular de la posibilidad de *cuadrar el círculo* con regla y compás, es decir, de construir el lado de un cuadrado equivalente a un círculo dado (cfr. nota II, e). Además, LINDEMANN estableció la trascendencia de e^x para todo $x \neq 0$ algebraico (de donde resulta la trascendencia de π, por ser $e^{i\pi} = -1$ (§ 45) algebraico, así como la trascendencia de $\ln x$ para $x \neq 1$ algebraico).

En 1900, el célebre matemático alemán D. HILBERT presentó al Congreso Internacional de Matemática de París 23 problemas de formulación sencilla, pero ninguno inmediatamente accesible con la técnica matemática de entonces (Göttingen Nachr., 1900). Gran parte de los "problemas de HILBERT" han sido resueltos, entre ellos el siguiente: Probar que $2^{\sqrt{2}}$ es trascendente, o aun que es irracional. En 1930, R. KUZMIN y C. L. SIEGEL demostraron, independientemente, que más generalmente, es trascendente $a^{\sqrt{n}}$ si $a \neq 0$ y $\neq 1$ es algebraico y n un número natural no cuadrado. El ruso A. GELFOND descubrió métodos para probar la trascendencia de otros números, tales como $2^{\sqrt{2}}$, al probar en 1934 (*Sur le septième problème de* D. HILBERT: Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. de l'URSS, (II), *2*, p. 1-6) la trascendencia de todo número de la forma a^b con $a \neq 0$ y $\neq 1$ algebraico y b irracional algebraico. De aquí se deduce que *también los logaritmos decimales* de los números naturales que no sean potencias de 10 son trascendentes [Que son irracionales, puede verse fácilmente demostrado en el ejercicio 15 del § 45].

Posterior y recientemente, la escuela de GELFOND continúa publicando resultados que generalizan y amplían los indicados.

II. Problemas clásicos del álgebra. — a) La ecuación de primer grado se resuelve por operaciones racionales; si sólo se admite esta clase de operaciones racionales, la ecuación general de segundo grado resultaría

irresoluble (§ 19-1, a). Si se admiten raíces cuadradas, se puede resolver la ecuación de segundo grado, pero no la de tercero, pues ésta exige raíces cúbicas (§ 19-3, a), es decir, la resolución de una ecuación binómica auxiliar. Se ha visto (§ 19-4) cómo se logra la resolución de la ecuación de cuarto grado con radicales de segundo y tercer grados, no siendo extraño que no aparezcan raíces de cuarto grado, pues éstas se reducen a dos extracciones de raíces cuadradas.

Parecía natural, pues, que las ecuaciones de quinto grado fueran solubles con radicales de segundo, tercero y quinto grados, y las de sexto con radicales de segundo y tercer grados, etc.; tal fué el problema que se propusieron los algebristas de los siglos XVI, XVII y XVIII, fracasando en su empeño. Todos ellos admitían únicamente como ecuaciones auxiliares, para la resolución de cualquier otra, las ecuaciones binomias de la forma

[IV-5] $$z^n = a.$$

por considerarse $\sqrt[n]{a}$ como una operación aritmética simple; de aquí el nombre de *raíces* que se aplica a las soluciones de toda ecuación, aunque no sean expresables por radicales. Así planteado el problema, la resolución por radicales de las ecuaciones generales de grado superior al cuarto es imposible, como RUFFINI reconoció a fines del siglo XVIII. Pero esta solución negativa al problema central del Álgebra durante tres siglos dejó, como sucede siempre en la ciencia, planteados otros problemas igualmente importantes, como son éstos:

a_1) Ya que no es posible obtener una sola función de los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formada por radicales que satisfagan a toda ecuación de grado n, ¿no será acaso posible lograr, para *cada* ecuación numérica de grado n, una expresión formada por radicales numéricos que la satisfaga, aunque sea distinta en cada ecuación? He aquí un problema que no resolvió RUFFINI, y que también tiene contestación negativa, dada por ABEL.

a_2) Ya que no es posible esta solución *general*, ¿cuáles son las ecuaciones de todos los grados resolubles por radicales? Esta cuestión queda contestada cumplidamente por la teoría de GALOIS, una de las más geniales, fecundas y profundas de la Matemática; su autor, después de una agitada y tempestuosa juventud, murió en un duelo, a la temprana edad de 21 años.

a_3) Entre las ecuaciones resolubles por radicales (como son, por ejemplo, todas las de tercero y cuarto grados), ¿cuáles serán resolubles por radicales cuadráticos exclusivamente?

b) He aquí un tema algebraico importante, por dejar resuelto con toda claridad el clásico problema griego de las construcciones geométricas que pueden realizarse con regla y compás. En efecto: si llamamos *irracional cuadrático* a toda expresión que resulta de combinar las cuatro operaciones racionales con la raíz cuadrada un *número finito* de veces, y entendemos que utilizar la regla y el compás significa efectuar un número finito de veces las siguientes construcciones geométricas: 1º) Trazar la recta que una dos puntos ya determinados o arbitrarios; 2º) Trazar circunferencias de centro y radio ya determinados o arbitrarios; 3º) Hallar la intersección de rectas y circunferencias ya trazadas; entonces puede afirmarse que:

La condición necesaria y suficiente para que un problema geométrico sea soluble con la regla y el compás, es que la incógnita pueda expresarse en función de los datos, por medio de una expresión racional o irracional cuadrática.

En efecto, las tres condiciones indicadas son precisamente las utilizadas en Geometría métrica y en Geometría analítica elemental o cuadrática, en donde los coeficientes de la ecuación de la recta o de la circunferencia se obtienen *racionalmente* de los datos (coordenadas de los puntos y radio) y la intersección de una recta y una circunferencia, o de dos circunferencias, se expresa por medio de *raíces cuadradas* de los

coeficientes. Por lo tanto, el segmento final, resultado de una serie de construcciones gráficas cualesquiera, efectuadas con los segmentos a_1, a_2, a_3, ..., sin otros instrumentos que la regla y el compás, vendrá dado por una expresión $x = f(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, en la que sólo intervienen las cuatro operaciones racionales más la extracción de raíces cuadradas. Recíprocamente, toda expresión $x = f(a_1, a_2, \ldots)$, resultado de aplicar a los segmentos dados, a_1, a_2, ..., las cuatro operaciones racionales más la extracción de la raíz cuadrada en número finito de veces, se puede hallar geométricamente, mediante un número finito de construcciones efectuadas sobre los segmentos a_1, a_2, ... con la regla y el compás (construcción de terceras, medias y cuartas proporcionales, etc.).

Hemos insistido sobre la condición de que el número de construcciones sea finito, porque toda incógnita real puede siempre *aproximarse* como *límite* de operaciones racionales, mediante desarrollos en series u otros algoritmos indefinidos o infinitos. Esto hace que el interés de tales problemas sea *exclusivamente teórico,* ya que se puede siempre dar una construcción aproximada con error teórico muy inferior al inherente a todo dibujo. Hemos precisado también lo que debe entenderse por construcción con regla y compás, ya que empleando escuadras, los dos bordes de la regla, haciendo marcas en ésta. etc., se amplía grandemente el campo de soluciones.

c) La mayoría de los problemas de construcción con regla y compás, en los que fracasaron los matemáticos de la antigüedad, son de tercer grado: la causa del fracaso está en que *una ecuación de tercer grado con coeficientes racionales, que carece de raíces racionales, no es resoluble por medio de irracionales cuadráticos.* (Véase, por ejemplo, la demostración en las *Lecciones de Álgebra,* de J. REY PASTOR; citado en nota III-3).

El famoso problema de la duplicación del cubo, o problema de Delos, es éste: "Dada la arista de un cubo, construir mediante la regla y el compás la arista del cubo que tiene volumen doble". Según cuentan, el problema se originó porque sufriendo los de Delos una terrible peste (cinco siglos antes de J. C.), el oráculo les ordenó doblar cierto cubo que oficiaba de altar. Adoptando la arista dada como unidad de segmentos, el problema algebraico equivalente es el de resolver por medio de radicales cuadráticos la ecuación $x^3 = 2$, lo que no es posible, según el teorema enunciado anteriormente; por lo tanto, *no puede efectuarse la duplicación de ningún cubo con la regla y el compás.*

Otro problema clásico es el de la trisección del ángulo: dado un ángulo φ, medido por el arco A B sobre la circunferencia de radio O A =

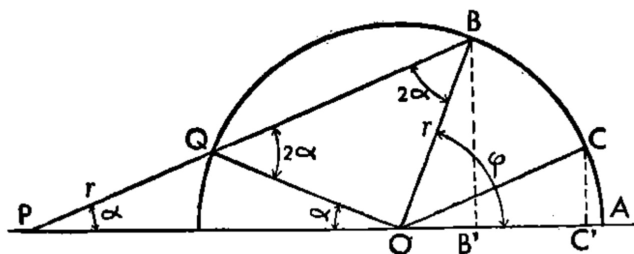


Fig. 36.

$= r = 1$ (fig. 36), quedará determinado $\varphi/3 = AC$ si conocemos la proyección C' del punto incógnito C. El problema equivale, pues, a construir $\overline{OC'} = \cos(\varphi/3)$ conociendo $\overline{OB'} = \cos\varphi = \beta$, y en que por las fórmulas trigonométricas sobre ángulos triples es: $\cos\varphi = 4\cos^3(\varphi/3) - 3\cos(\varphi/3)$; si llamamos $u = 2\cos(\varphi/3)$, la ecuación que determina C' es:

[IV-6] $$u^3 - 3u - 2\beta = 0.$$

Para φ arbitrario (es decir, β cualquiera), la ecuación [IV-6] carece de raíces racionales, y por lo tanto, *no puede haber una construcción general con regla y compás que efectúe la trisección del ángulo.*

Sin embargo, esto no impide que para infinitos valores particulares de β, tales como -1, 0, $-11/16$, ..., la ecuación [IV-6] tenga raíces racionales, y así, para los correspondientes valores de $\varphi = 180°$, $90°$, $133° \, 25' \, 42'' \, 9$, ..., la trisección sea posible con la regla y el compás. Por otra parte, y por otros procedimientos, los griegos ya dieron muchas soluciones prácticas al problema; una de las más ingeniosas es la siguiente, de ARQUÍMEDES: marquemos sobre el canto de la regla dos puntos: P y Q, a la distancia $PQ = r$; después, haciendo resbalar la regla sobre B, hagamos que los puntos P y Q tomen la posición de la figura 36; el ángulo α será el buscado, ya que $\alpha + (\pi - 4\alpha) + \varphi = \pi$, es decir, $\alpha = \varphi/3$. Esta construcción equivale a encontrar la intersección de la circunferencia A B Q con la concoide de NICOMEDES de polo B, base P O A e intervalo r. (Véase, por ejemplo, G. CASTELNUOVO: *Geometría analítica*, nº 65, ed. Mundo Científico, La Plata, 1943).

d) *La división de la circunferencia en partes iguales o la inscripción de un polígono regular en una circunferencia dada, mediante la regla y el compás, es también solamente posible en casos particulares*; GAUSS resolvió completamente el problema, y en particular, si el número de partes p, es *primo*, este número debe ser 2, ó bien de la forma:

[IV-7] $$p = 2^{2^{\lambda}} + 1.$$

Para $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ resultan los números primos $p = 3, 5, 17, 257, 65\,537$, que dan polígonos inscriptibles, aun cuando para $\lambda = 5, 6, 12, 23$ ya el número [IV-7] no es primo y debe aplicarse el teorema general de GAUSS, que dice:

La condición necesaria y suficiente para que la circunferencia pueda dividirse con regla y compás en n partes iguales, es que n admita una descomposición en factores primos del tipo

$$n = 2^{\mu} \, (2^{2^{\lambda_1}} + 1)\,(2^{2^{\lambda_2}} + 1) \ldots (2^{2^{\lambda_\nu}} + 1),$$

siendo desiguales todos los exponentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$. (Véase, por ejemplo, la demostración en *Lecciones de Álgebra*, de J. REY PASTOR; citado en nota III-3).

Así, resulta también que *los polígonos regulares de 7, 9, 11, 13, 15, etc., lados no pueden construirse sobre la circunferencia dada con la regla y el compás.* El teorema [IV-7] fué descubierto por GAUSS a los 17 años de edad, y siempre estuvo particularmente orgulloso de esta primera de sus grandes hazañas, la que le decidió a dedicarse a la investigación matemática, abandonando sus iniciados estudios filológicos; después de su muerte se honró su memoria en la Universidad de Göttingen, donde profesó toda su vida, erigiéndole una estatua de bronce sobre un pedestal en forma de polígono regular de 17 lados; la inscripción con regla y compás del triángulo y pentágono, ya era conocida por los griegos.

e) Otro problema clásico famoso, el de la *cuadratura del círculo, o rectificación de la circunferencia mediante la regla y el compás, es también imposible*, y ni tan sólo es de naturaleza algebraica, sino trascendente, por serlo π (cfr. nota I, *d*), y por lo tanto, no existe para π (que da a la escala r^2 ó r el área del círculo o la longitud de la semicircunferencia) una expresión racional o irracional cuadrática en función del radio r. Así, es imposible cuadrar el círculo o rectificar la circunferencia *con regla y compás* (*b*); insistir en el problema es como buscar un número *entero* cuyo duplo sea tres.

f) Modernamente, el concepto de resolución algebraica se ha ampliado, pues resulta injustificada, teórica y prácticamente, la importancia exclusiva atribuída antiguamente a las ecuaciones binómicas [IV-5]. En

efecto, el cálculo de raíces de números reales es una operación de tanteo, y por lo tanto, hay que proceder como para todas las ecuaciones numéricas. Por otra parte, no sólo las ecuaciones binómicas, sino también toda ecuación bien estudiada puede servir como ecuación auxiliar para la resolución de otras ecuaciones algebraicas: tales son, por ejemplo, las ecuaciones relacionadas con los movimientos de los poliedros regulares, útiles en muchas cuestiones.

Así como se ha ampliado el significado de la palabra *raíz* para designar las soluciones de toda ecuación, también se ha generalizado el método de buscar soluciones mediante una *resolvente*, y así, actualmente se considera que *resolver algebraicamente una ecuación es expresar sus raíces como funciones racionales de los coeficientes de la ecuación y de las raíces de otras ecuaciones auxiliares bien conocidas.* Por lo tanto, la cuestión planteada se reduce a estudiar las ecuaciones que sean solubles mediante otras ecuaciones auxiliares o adjuntas; esto significa que el método de estudio consiste en la *adjunción* de irracionales determinados al campo de racionalidad (§ 17-1, *a*) de los coeficientes de la ecuación.

III. **Bibliografía.** — 1. Sobre cuerpos variables y divisibilidad algebraica, recomendamos la consulta de las obras citadas en la bibliografía del Cap. I, en especial: G. BIRKHOFF y S. MAC LANE (Nota IV-5), B. L. VAN DER WAERDEN (Nota IV-7) y B. LEVI (Nota IV-8).

Particular atención a este tema dedica el volumen de la excelente obra

F. SEVERI: *Lezioni di Analisi* (vol. I, 2ª ed., Zanichelli, Bolonia, 1946; ción con G. SCORZA DRAGONI, vol. II, Zanichelli, Bolonia, 1944, traducción castellana, Labor, Barcelona, 1956; C. Zuffi, Bolonia, 4ª ed., 1955). Esta obra responde a los programas italianos de iniciación universitaria en Matemática, y está dirigida tanto a los estudiantes de Matemática pura como a los de propedéutica de la ingeniería, a cuyos mejores alumnos procura abrir horizontes y elevar de la común mediocridad. Moderna, ponderada, pedagógica, contiene valiosos complementos y ejercicios.
cicios.

Basados en los modernos conceptos algebraicos (§ 5-12, *b*, y § 17), en forma accesible y didáctica para tema tan abstracto están los pequeños volúmenes:

H. HASSE: *Höhere Algebra.* I. *Lineare Algebra* (3ª ed., 1951); II. *Gleichungen höheren Grades* (3ª ed., 1951); *Aufgabensammlung zur Höheren Algebra* (1934). (W. de Gruyter, Berlín).

Desarrollo sistemático de carácter puramente algebraico, extremadamente abstracto y de índole elevada, con deliberada y total ausencia de interpretación geométrica, incorporando los más recientes métodos e ideas, está:

C. CHEVALLEY: *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable.* (Math. Surv. VI, Amer. Math. Soc., Nueva York, 1951).

2. Sobre números algebraicos y trascendentes trata el último capítulo de la obra de O. PERRON (citada en Cap. II, nota IV-5). Puede también consultarse:

J. F. KOKSMA: *Diophantische Aproximationen* (Ergebnisse der Mathematik, IV, 4, Springer, Berlín, 1936; Chelsea, Nueva York).

H. POLLARD: *The theory of algebraic numbers.* (Carus Monograph Series, nº 9; Wiley. Nueva York, 1950).

C. L. SIEGEL: *Trascendental Numbers.* (*Annals of Mathematics Studies*; Princenton, Univ. Press, 1949).

3. Aunque en el capítulo X volvemos a tratar de las ecuaciones algebraicas, diremos ya que obras didácticas sobre las mismas, que contienen la teoría elemental y la aplicación de los grupos de sustituciones (Cap. III, nota I) a la teoría de GALOIS en forma muy asequible, son:

J. REY PASTOR: *Lecciones de Algebra.* (4ª ed., Madrid, 1957).

F. CAJORI: *An introduction to the modern .Theory of Equations.* (Macmillan, Nueva York, 1927).

Obra modélica en su género, por lo atrayente, informativa y bien ilustrada, sobre problemas famosos de la matemática, es:

H. TIETZE: *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit.* (2 vols., Biederstein Vlg., Munich, 1949).

La teoría algebraica de las construcciones puede estudiarse en la obra póstuma de

H. LEBESGUE: *Leçons sur les constructions géométriques.* (Gauthier-Villars, París, 1950).

. Desde L. MASCHERONI (1750-1800) se sabe que todo problema resoluble con regla y compás puede resolverse también únicamente con el compás. Una breve pero completa exposición de esta Geometría del compás aparece en nota 3 del Cap. VI de la obra:

J. REY PASTOR, L. A. SANTALÓ y M. BALANZAT: *Geometría analítica.* (Kapelusz, Bs. As., 1955).

Capítulo V

EL LÍMITE ARITMÉTICO

§ 20. Sucesiones de números reales

1. Límites finitos e infinitos. — Se dice que una sucesión indefinida (§ 7-2) de números reales:

[20-1] $$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots,$$

que indicaremos con $\{\alpha_n\}$, *tiende al límite* α, o *tiene el límite* α, o *converge* hacia α, si la diferencia $\alpha_n - \alpha$ llega a ser tan pequeña como se quiera en valor absoluto, tomando α_n bastante avanzado (cfr. § 7-2). En términos más precisos:

Se dice que α *es el límite de la sucesión* [20-1], *cuando para cada número positivo* ε, *existe un número* $\nu = \nu(\varepsilon)$ *tal, que*

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad n > \nu,$$

es decir: todos los términos α_n con $n > \nu$ quedan dentro del intervalo $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.

Si α es el límite de la sucesión [20-1], se dice también que es el *límite del número variable* α_n, y se escribe simbólicamente:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n, \quad \text{o también:} \quad \alpha_n \to \alpha.$$

Cuando la sucesión es $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots$, es decir, cuando todos sus términos son iguales a un mismo número, éste es su límite. Por eso diremos: *el límite de una constante es ella misma.*

Ejemplos: 1. La sucesión

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}: \; 1, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{1}{4}, \; \ldots, \; \frac{1}{n}, \; \ldots,$$

tiene por límite cero, porque la diferencia es $\frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} < \varepsilon$, tomando $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Por ejemplo, es $\frac{1}{n} < 0{,}01$ desde el término que ocupa el lugar 101 en adelante.

Escribiremos, pues: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. También tiene el límite 0 la sucesión $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, pues $\frac{1}{2^n} - 0 =$

— $\frac{1}{2^n}$ puede hacerse tan pequeño como se quiera; por ejemplo, será $\frac{1}{2^n} < 0{,}001$ desde el momento en que sea $2^n > 1000$, es decir, desde $n = 10$ en adelante. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

3. La sucesión

$$0{,}79, \quad 0{,}799, \quad 0{,}7999, \quad \ldots,$$

tiene por límite 0,8; pues la diferencia

$$0{,}8 - 0{,}79\overset{n}{\ldots}9 = 0{,}000\overset{n}{\ldots}1$$

puede hacerse menor que cualquier número positivo tomando n bastante grande.

4. La sucesión $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ tiene por límite 1, pues $\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$ puede hacerse menor que cualquier número positivo.

5. La sucesión

$$0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{5}, 0, \ldots, 0, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots,$$

tiene el límite 0; pero así como en los anteriores ejemplos los términos eran constantemente crecientes o decrecientes, en ésta oscilan a uno y a otro lado del 0, al cual se aproximan indefinidamente, creciendo y decreciendo, y alcanzan infinitas veces el mismo valor 0.

Si los términos de una sucesión llegan a conservarse superiores en valor absoluto a cualquier número positivo, es decir, si fijado cualquier número positivo A, existe un número $\nu = \nu(A)$ tal que:

[20-2] $$|\alpha_n| > A \quad \text{si} \quad n > \nu,$$

la sucesión no tiene límite según la definición anterior; pero generalizando el significado de esta palabra, diremos que tiene *límite infinito*, y escribiremos:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty, \quad \text{o bien:} \quad \alpha_n \to \infty,$$

sin que esto autorice a considerar el símbolo ∞ como un número, ni mucho menos a aplicarle las operaciones aritméticas.

Si desde un cierto término en adelante se verifica $\alpha_n > A$, diremos, precisando más, que el límite es $+\infty$. Si desde un cierto término son todos negativos, y se verifica [20-2], diremos que el límite es $-\infty$.

EJEMPLO 6:

$$\frac{5}{1}, \frac{2}{2}, -\frac{3}{3}, -\frac{10}{4}, -\frac{19}{5}, \ldots, \frac{6-n^2}{n}, \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{6-n^2}{n} = -\infty$$

$$\frac{7}{1}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \frac{22}{4}, \frac{31}{5}, \ldots, \frac{6+n^2}{n}, \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{6+n^2}{n} = +\infty.$$

$$-2, \; 4, \; -8, \; 16, \; -32, \ldots, (-2)^n, \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} (-2)^n = \infty.$$

Nótese que no basta el crecimiento infinito de α_n (es decir, que haya términos mayores que cualquier número A) para que la sucesión tenga límite infinito. Es preciso que sean mayores que A, *todos*, desde un valor de n en adelante.

EJERCICIO: En los ejemplos 3º, 4º y 5º de § 6-5, *c*), comprobar cuáles son las sucesiones que tienen límite infinito, con o sin signo determinado.

DEF.: Una sucesión que tiene límite finito se llama *convergente;* una que tiene límite infinito, *divergente;* las que carecen de límite, finito e infinito, se llaman *oscilantes.*

Algunos autores llaman divergentes a las sucesiones no convergentes a un límite finito. Nosotros seguiremos la nomenclatura más precisa que hemos expuesto.

2. Propiedades de los límites finitos. — TEOREMA FUNDAMENTAL. — *Si es* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, *desde un cierto valor de n en adelante, se conserva* α_n *superior a cualquier número menor que* α.

Porque si es $c < \alpha$, desde un valor de ν de n, se verifica:

$$\alpha - \alpha_n < \alpha - c,$$

de donde resulta $\alpha_n > c$. Análogamente, *desde un valor de n en adelante, se conserva* α_n *inferior a todo número mayor que* α; porque de la desigualdad $\alpha_n - \alpha < c' - \alpha$ resulta: $\alpha_n < c'$.

COROLARIO: *Desde un valor de n en adelante, tiene* α_n *el mismo signo que su límite* α, porque si es $0 < \alpha$, llegará a ser $\alpha_n > 0$; y si es $0 > \alpha$, llegará a ser $\alpha_n < 0$.

a) *Si dos sucesiones tienen límites distintos, los términos de la de mayor límite superan a los correspondientes de la otra desde un valor de n en adelante.*

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta, \quad (\alpha < \beta)$;

tomando un número c intermedio, tal que $\alpha < c < \beta$, desde un valor de n se verificará:

$$\alpha_n < c \quad \text{y} \quad \beta_n > c; \quad \text{luego,} \quad \alpha_n < \beta_n.$$

COROLARIO: *Si para todo valor de n es* $\alpha_n < \beta_n$, *y ambas sucesiones tienen límite,* es $\lim \alpha_n \leqq \lim \beta_n$. Porque si fuese: $\lim \alpha_n > \lim \beta_n$, llegaría a ser $\alpha_n > \beta_n$, contra la hipótesis.

Nótese que no excluímos la posibilidad de que los límites sean iguales, a pesar de que sea siempre $\alpha_n < \beta_n$. Por ejemplo, es constantemente $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n}$, y sin embargo, tienen el mismo límite 1.

b) *Una sucesión indefinida no puede tener más de un límite.*

Porque si fuese

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha'$, $(\alpha' > \alpha)$, llegaría a ser: $\alpha_n > \alpha_n$.

c) Toda variable constantemente comprendida entre otras dos que tienen igual límite, tiene este mismo límite.

Hipótesis:

$$\alpha_n < \gamma_n < \beta_n, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \alpha.$$

Cualquiera sea el número positivo ε, se verificará a la vez, desde un valor ν de n en adelante:

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon, \; \alpha - \varepsilon < \beta_n < \alpha + \varepsilon,$$

porque basta tomar para ν el mayor de los valores ν_α y ν_β, que correspondan respectivamente en las sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ a la aproximación ε prefijada; y como $\alpha_n < \gamma_n < \beta_n$, resulta: $\alpha - \varepsilon < \gamma_n < \alpha + \varepsilon$, o sea: $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \alpha$.

3. **Sucesiones contenidas en otra.** — DEF.: Diremos que una sucesión indefinida $\alpha_h, \alpha_k, \alpha_l, \ldots$, está contenida en la $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \ldots$, si cada uno de sus términos figura en ésta.

EJEMPLO 1: Dada la sucesión $\{1/n\}$, la sucesión

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}. \frac{1}{27}, \ldots \frac{1}{3^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^{n+1}}, \ldots,$$

está contenida en la primera.

a) Si una sucesión es convergente (divergente), toda sucesión contenida en ella tiene el mismo límite.

Si la sucesión total es convergente y es α su límite, desde un valor $n = \nu$ en adelante (es decir, para todos los términos que no sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}$), se verifica:

[20-3] $$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon;$$

luego, tomando en la sucesión $\alpha_h, \alpha_k, \alpha_l, \ldots$, un término α bastante avanzado como para que no haya posterior a él ninguno de los $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}$, para todos los términos posteriores a él se verifica [20-3], y por lo tanto, α es el límite de la sucesión $\alpha_h, \alpha_k, \alpha_l, \ldots$ El mismo razonamiento sirve para el caso de divergencia.

En el ejemplo 1, para $\varepsilon = 0{,}01$ se verifica [20-3] en la primera sucesión para $\nu = 101$ y en la contenida desde $n = 13$ en adelante, pues ninguno de los términos 1, ½, ..., 1/100 figuran ya en los términos que siguen al 1/64 en la segunda sucesión. En cambio, si en los lugares 100, 200, 300, ..., 100 m, ... de la sucesión contenida dada hubiéramos intercalado además los términos 1/5, 1/10, 1/15, ..., 1/5 m, ... respectivamente, entonces se habría tenido que ir en ella a $n = 2001$ en adelante, para que se cumpla [20-3].

Nótese que la recíproca no es cierta en general, pues la

sucesión más amplia puede carecer de límite, a pesar de ser convergentes algunas sucesiones contenidas en ella.

EJEMPLO 2: La sucesión oscilante 1, 2, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{4}$, ..., tiene contenidas las $\{1/n\}$ convergente y $\{n\}$ divergente.

b) Si se altera el orden de los términos de una sucesión, no varía su carácter ni su límite.

Es caso particular del teorema anterior, porque, por definición, cada una de las dos sucesiones está contenida en la otra.

4. Sucesiones monótonas de números reales. — Se presentan con frecuencia los siguientes casos, en que puede asegurarse la existencia de límite:

a) Toda sucesión monótona creciente, $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \ldots$, cuyos términos se conservan inferiores a un número fijo k, tiene un límite $\leqq k$.

DEM.: Dado un número racional cualquiera, caben dos casos: es $\leqq$ que algún término α_ν de la sucesión, o es mayor que todos. Es decir, o se verifica:

$$a \leqq \alpha_\nu \text{ para } un \text{ valor de } \nu,$$

o bien:

$$a' > \alpha_i \text{ para todo valor de } i.$$

Como hay enteros de la clase a' de cotas superiores (desde luego, todos los mayores que k), la clase a tendrá un *máximo* entero a_0 y será $a'_0 = a_0 + 1$ el mínimo entero de la clase a'; dividido el intervalo (a_0, a'_0) de longitud 1, en n partes iguales por números intermedios, sea a_1 el último que todavía pertenece a la clase a, y $a'_1 = a_1 + (1/n)$ el siguiente, que ya es de la a'; subdividido en n partes el intervalo (a_1, a'_1), de longitud $1/n$, se deduce, *análogamente, otro* (a_2, a'_2) contenido en él, etc. Las sucesiones monótonas:

$$a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a'_2 \leqq a'_1 \leqq a'_0$$

cumplen, además, la condición:

$$a'_i - a_i = 1/n^i < \varepsilon \text{ desde un cierto } n \geqq \nu;$$

luego, según § 7-4 definen un número real α, tal que:

$$a_i \leqq \alpha \leqq a'_i, \text{ de donde: } 0 < \alpha - a_i \leqq a'_i - a_i < \varepsilon \text{ desde } n \geqq \nu;$$

luego, α es el límite de la sucesión α_i, por ser $\alpha - \alpha_i \leqq \alpha - a'_i < \varepsilon$.

El límite α debe ser $\leqq k$, porque si fuese $k < \alpha$, desde un valor de n en adelante sería (§ 20-2) $\alpha_n > k$, contra lo supuesto.

Con razonamiento análogo, o cambiando α_i por $-\alpha_i$, resulta:

b) Toda sucesión monótona decreciente $\alpha'_1 \geqq \alpha'_2 \geqq \alpha'_3 \geqq \ldots$ cuyos términos se conservan superiores a un número fijo k' tiene un límite $\geqq k'$.

c) **Con frecuencia se presentan pares de sucesiones monótonas de términos reales (racionales o irracionales):**

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \ldots \leqq \alpha'_3 \leqq \alpha'_2 \leqq \alpha'_1,$$

que cumplen las tres condiciones de § 7-4; las llamaremos también *contiguas*, porque definen un número único α, que es elemento de separación y a la vez límite de ambas, según hemos visto (§ 7-6, *d*).

Para estos pares de sucesiones contiguas subsiste la relación de equivalencia [7-16].

Es decir: *La condición necesaria y suficiente para que sean iguales los números α y β, definidos por los pares de sucesiones contiguas de términos reales cualesquiera*:

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \ldots \leqq \alpha'_3 \leqq \alpha'_2 \leqq \alpha'_1$$
$$\beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \beta_3 \leqq \ldots \leqq \beta'_3 \leqq \beta'_2 \leqq \beta'_1,$$

es que todo número α_i sea no mayor que todo número β'_j, y que todo número β_i sea no mayor que todo número α'_j.

Desde luego, son necesarias estas condiciones. porque si es $\alpha = \beta$, todo número $\leqslant \alpha$ es inferior o igual a todo número $\geqslant \beta$. Recíprocamente, si tales condiciones se cumplen, es $\alpha = \beta$; porque si fuese, por ejemplo $\beta > \alpha$, podríamos tomar (§ 20-2) un elemento $\beta_i > \alpha$, y después un elemento $\alpha'_j < \beta_i$.

5. **Límites de oscilación de una sucesión.** — La definición de límite α de una sucesión $\{\alpha_n\}$ se reduce a esto: fijado cualquier número positivo ε, desde un valor de n en adelante, *todos* los números de la sucesión quedan dentro del intervalo $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Si la sucesión no es convergente, este punto α no existe, pero ocurre generalizar así:

Llamamos *límite de oscilación* (o de *indeterminación*) a todo número α que cumpla la condición de que en cada intervalo $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ haya *infinitos* números de la sucesión. Si entre los límites de oscilación hay uno máximo, $\bar{\alpha}$, se llama límite *superior*, y si hay uno mínimo, $\underline{\alpha}$, lo llamaremos límite *inferior*.

Estos límites superior e inferior de oscilación se representan así:

$$\bar{\alpha} = \text{lim sup } \alpha_n = \overline{\text{lim}}\ \alpha_n, \qquad \underline{\alpha} = \text{lim inf } \alpha_n = \underline{\text{lim}}\ \alpha_n,$$

y se verifica: a la derecha de $\bar{\alpha} + \varepsilon$, y a la izquierda de $\underline{\alpha} - \varepsilon$, hay un número finito de términos α_n.

Toda sucesión α_n cuyos términos se conservan acotados (es decir, inferiores en valor absoluto a un número fijo), tiene un límite superior y un límite inferior de oscilación.

En efecto, construyamos el límite inferior de oscilación $\underline{\alpha}$ mediante una sucesión de intervalos encajados, obtenida en la siguiente forma: Por hipótesis, existe un intervalo J_0, al que pertenecen todos los términos de la sucesión α_n. Dividamos J_0 en dos intervalos (*cerrados*) iguales, y tomemos como J_1 al *primero, empezando por la izquierda* que contenga infinitos términos de la sucesión dada. Por lo tanto, a la izquierda del extremo inferior de J_1 queda a lo más un número finito de términos. Volviendo a dividir J_1 en dos segmentos iguales, elijamos J_2 con el mismo criterio anterior, y sigamos así sucesivamente. La sucesión de intervalos encajados J_i de longitud $1/2^i$ tan pequeña como se quiera, define el número $\underline{\alpha}$ buscado. En efecto, en todo entorno $(\underline{\alpha} - \varepsilon, \underline{\alpha} + \varepsilon)$ habrá intervalos J_i (§ 7-5, *c*), y por lo tanto, infinitos términos de la sucesión α_n, es decir, $\underline{\alpha}$ es límite de oscilación de ésta. Además es el menor, porque si β es un número real inferior a $\underline{\alpha}$, existe algún intervalo $J_i = [a_i, a'_i]$ tal que sea $\beta < a_i$, y tomando $\varepsilon < a_i - \beta$, no puede haber en el entorno $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ un número infinito de términos de la sucesión, pues, por construcción, a la izquierda de todo intervalo J_i hay a lo más un número finito de ellos. Por lo tanto, β no puede ser límite de oscilación.

En forma análoga se construye el límite superior de oscilación $\overline{\alpha}$ (hágase).

Obsérvese que la sucesión 1, 2, 3, 4, ..., n, ..., está acotada inferiormente y *no tiene* límite inferior de oscilación finito. ¿Por qué no contradice esto el teorema anterior?

Efectuando una generalización análoga a la realizada con el concepto de límite infinito, diremos que una sucesión que no esté acotada inferiormente (superiormente) tiene $-\infty$ $(+\infty)$ como límite inferior (superior) de oscilación. Con ello, toda sucesión tiene siempre límites superior e inferior de oscilación; si por ejemplo, está acotada inferiormente y no tiene límite inferior de oscilación finito, existe límite único en $+\infty$, donde coinciden todos los límites de oscilación.

Es esencial distinguir el concepto de límite de oscilación de una sucesión (conjunto *ordenado*), del de punto de acumulación de un conjunto cualquiera (Cap. VI, nota II), y en el que un *mismo* punto no aparece repetidamente, como puede ocurrir en una sucesión para lugares distintos de su ordenación. También es preciso no confundir los límites superior o inferior de oscilación de una sucesión con los extremos de un conjunto (§ 23-14) o con los límites de oscilación de los puntos de acumulación de un conjunto (Cap. VI, nota II).

EJEMPLOS: 1. La sucesión $\alpha_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{12+2^n}{2^{n+1}} \cos \frac{n\pi}{2}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$, tiene -1, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+1$ como límites de oscilación. Sin embargo, -1 y $+1$ no son puntos de acumulación del conjunto puntual correspondiente, en el que se abstrae el orden y se considera que los términos repetidos en la sucesión dan *un solo punto*. Para este conjunto puntual, los extremos son -2, $+1$, y los límites de oscilación (menor y mayor de sus puntos de acumulación) son $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, aquí únicos puntos de acumulación del conjunto (Cap. VI, nota II).

2. La sucesión [2-20] de números fraccionarios positivos tiene 0 y $+\infty$ como límites inferior y superior de oscilación, y *todos* los números reales no-negativos son límites de oscilación de dicha sucesión. El conjunto puntual correspondiente tiene por puntos de acumulación los anteriores límites de oscilación. Éstos forman, paradójicamente, un conjunto no-numerable (Cap. II, nota II), aun cuando intuitivamente parece que los límites de oscilación de una *sucesión* han de ser más "escasos" que los términos de la sucesión.

6. Criterio general de convergencia. Sucesiones regulares. — *a) La condición necesaria y suficiente para que una sucesión* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, *de números reales tenga límite finito, es que para cada número positivo* ε *corresponda un valor* ν *de* n, *tal, que todas las diferencias* $\alpha_n - \alpha_{n+p}$, $(n > \nu,\ p > 0)$, *entre términos posteriores a* α_ν *se conserven en valor absoluto inferiores a* ε (BOLZANO-CAUCHY).

La importancia de este criterio general de convergencia radica en el hecho de que nos permite asegurar el carácter convergente de una sucesión, aun sin conocer el valor del límite. Por ejemplo, si a partir de $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ introducimos sucesivamente $\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2})$, podemos afirmar que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es convergente, pues es $\alpha_{n+1} - \alpha_n = (-1)^n/2^n$, y, evidentemente, se conserva $|\alpha_n - \alpha_{n+p}| < 1/2^n$ para cualquier valor de p. Aquí no es muy difícil hallar el límite (2/3), pero siempre resulta un problema distinto que el de asegurar la convergencia de la sucesión.

Demostremos el criterio dado:

La condición es necesaria; porque si es lím $\alpha_n = \alpha$, se verifica que desde un cierto valor $n = \nu$ en adelante, todos los términos α_n quedan dentro del intervalo $(\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon, \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon)$, y por lo tanto, la diferencia entre dos términos cualesquiera de índices mayores que ν es menor que ε.

Recíprocamente: si se verifican las condiciones $|\alpha_n - \alpha_{n+p}| < \varepsilon$, todos los términos se conservan acotados, pues quedan dentro del intervalo $(\alpha_n - \varepsilon, \alpha_n + \varepsilon)$; por lo tanto, son finitos (§ 20-5) el límite inferior $\underline{\alpha}$ y el superior $\overline{\alpha}$ de oscilación. Ambos deben coincidir, porque de lo contrario, tomando un número $\varepsilon < (\overline{\alpha} - \underline{\alpha}) : 3$, según la definición de límite superior e inferior, deberán existir elementos α_n y α_{n+p} de índices superiores a ν en los intervalos

$$\overline{\alpha} - \varepsilon < \alpha_n < \overline{\alpha} + \varepsilon, \qquad \underline{\alpha} - \varepsilon < \alpha_{n+p} < \underline{\alpha} + \varepsilon,$$

y restando de la primera desigualdad esta última invertida, resultaría:

$$\overline{\alpha} - \underline{\alpha} - 2\varepsilon < \alpha_n - \alpha_{n+p};$$

luego, la diferencia $\alpha_n - \alpha_{n+p}$ sería superior a ε, contra lo supuesto.

Por otra parte, *si los dos límites, superior e inferior, de oscilación coinciden,* $\overline{\alpha} = \underline{\alpha} = \alpha$, *la sucesión es convergente, y este límite* α *es su límite ordinario.* En efecto, dado un entorno cualquiera $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ de α, por ser $\alpha = \underline{\alpha}$, a la izquierda de $\alpha - \varepsilon$ hay a lo más un número finito de términos α_n, y por ser $\alpha = \overline{\alpha}$, a la derecha de $\alpha + \varepsilon$ hay a lo más un número finito de términos α_n (§ 20-5); luego, desde un valor de n en adelante, *todos* los términos de la sucesión quedan dentro del intervalo $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, como queríamos demostrar.

b) *Sucesiones regulares.* El criterio general de convergencia de CAUCHY es válido en el campo real, pero no en el campo de los números racionales, es decir, existen sucesiones de términos racionales que cumplen dicha condición general de convergencia y no tienen límite racional. Por ejemplo, las [8-10] que definen el número *e*.

DEF.: Una sucesión de números racionales $\{a_n\}$ se llama *regular* o *de* CAUCHY (o *fundamental*, según la nomenclatura inicial de G. CANTOR), si para todo número positivo ε corresponde un número ν_ε tal que:

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \text{ para todo } n > \nu_\varepsilon \text{ y cualquier } p.$$

Dos sucesiones regulares, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, se llaman *equivalentes*, si para todo número positivo ε corresponde un número ν_ε tal que $|a_n - b_n| < \varepsilon$ para $n > \nu_\varepsilon$, relación que es reflexiva, simétrica y transitiva (§ 1-5).

La *adición* de sucesiones regulares se define por:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\},$$

y la multiplicación por:

$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n b_n\},$$

dando sucesiones que también son regulares. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existen ν_a y ν_b tales que para $n > \nu_a$ y cualquier p es $|a_n - a_{n+p}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ y análogamente $|b_n - b_{n+r}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ para $n > \nu_b$; por tanto, si ν es el máximo de ν_a y ν_b, para $n > \nu$ y cualquier p es

$$|(a_n + b_n) - (a_{n+p} + b_{n+p})| \leqslant |a_n - a_{n+p}| + |b_n - b_{n+p}| < \varepsilon \quad ,$$

es decir $\{a_n + b_n\}$ es una sucesión regular. Análogamente se demuestra la ley uniforme, es decir, si

$$\{a_n\} = \{a'_n\} \quad \text{y} \quad \{b_n\} = \{b'_n\} \quad ,$$

entonces

$$\{a_n + b_n\} = \{a'_n + b'_n\}.$$

Para el producto, la regularidad de $\{a_n\}$ y de $\{b_n\}$ implica que existan cotas M_a y M_b tales que $|a_n| < M_a$ y $|b_n| < M_b$ para todo n. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existen ν_a y ν_b tales que si $n > \nu_a$ es $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon/(2M_b)$ y si $n > \nu_b$ es $|b_n - b_{n+p}| < \varepsilon/(2M_a)$ para cualquier p; por tanto, si ν es el máximo de ν_a y ν_b, para $n > \nu$ y cualquier p será

$$|a_n b_n - a_{n+p} b_{n+p}| \leqslant |a_n b_n - a_n b_{n+p}| + |a_n b_{n+p} - a_{n+p} b_{n+p}| \leqslant$$
$$\leqslant M_a \,.\, |b_n - b_{n+p}| + M_b \,.\, |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \quad ,$$

es decir, $\{a_n b_n\}$ es una sucesión regular. La ley uniforme se demuestra por el mismo método.

Según CH. MÈRAY y G. CANTOR, el sistema de números reales se compone de todas las sucesiones regulares de números racionales, respecto a las cuales se han definido la relación de equivalencia y las operaciones de adición y multiplicación, como antes. El conjunto de sucesiones regulares con límite racional resulta isomorfo (§ 3-5) al campo de racionalidad formado por estos límites, y también se cumplen las leyes formales (§ 6-2 y 5), como se demuestra más fácilmente aún que en los otros métodos de introducción del número real. En efecto, para la suma, las leyes asociativa y conmutativa son inmediatas. Tomando como módulo de la suma la sucesión de elementos todos nulos $\{0\}$, es inmediato ver se cumple la ley modular (§ 3-7). Dada una sucesión regular $\{a_n\}$ y definida la opuesta mediante la sucesión $\{-a_n\}$, se verifica inmediatamente la ley de inversión (§ 3-6) respecto de la suma. Por lo tanto (§ 5-12, *b*) el conjunto de sucesiones regulares de números racionales forma grupo abeliano respecto de la adición. Por otra parte, si de dicho conjunto se excluye el módulo de la adición, queda un grupo abeliano respecto de la multiplicación. En efecto, si $\{a_n\} \neq \{0\}$, entonces existe un número racional $\delta > 0$ y un número natural ν tal que para $n > \nu$ es $|a_n| > \delta$, pues en caso contrario, si para todo $\delta > 0$ y todo ν natural existiese un $m > \nu$ tal que $|a_m| \leqslant \delta$, tomando ν suficientemente grande, para todo $n > \nu$ sería también $|a_n - a_m| < \delta$ y por tanto $|a_n| < 2\delta$, dando $\{a_n\} = \{0\}$ contrariamente a la hipótesis. De aquí se deduce fácilmente que el producto de dos sucesiones regulares no nulas da un producto no-nulo. Las leyes asociativa y conmutativa del producto son inmediatas. Como módulo de la multiplicación tomaremos la sucesión $\{1\} \neq \{0\}$, que evidentemente cumple la ley modular de la multiplicación. Para la ley de inversión, si $\{a_n\} \neq \{0\}$ y es $|a_n| > \delta$ para $n > \nu$, entonces la sucesión $\{a_n^{-1}\}$ es regular, pues $|a_n^{-1} - a_{n+p}^{-1}| < \varepsilon/\delta^2$ para $n > \nu$, dando $\{a_n\} . \{a_n^{-1}\} = \{1\}$ con $\{a_n^{-1}\} \neq \{0\}$. Demostrado así (§ 5-12, *b*) que el conjunto que queda de las sucesiones regulares de números racionales al excluir $\{0\}$ forma grupo abeliano respecto de la multiplicación, como la demostración de la ley distributiva es inmediata, resultará que el conjunto de todas las sucesiones regulares de números racionales forma cuerpo conmutativo (§ 5-12, *d*) que además es ordenado (§ 6-5, *a*), modo condensado de decir que se cumplen las leyes formales mencionadas.

Aquí, la regla de los signos de la multiplicación se deduce como teorema y no entra artificialmente en la definición. Tampoco interviene en ésta el orden lineal, sino sólo la aproximación en valor absoluto, lo que da gran valor de generalización al método para ser aplicado en temas actuales de la Matemática superior, en particular a los *espacios completos* de FRÉCHET.

Sin embargo, la condición de CAUCHY que define una sucesión regular es poco intuitiva para ser captada fácilmente por el principiante.

EJERCICIOS

1. Determinar el menor valor de ν, para el que:
$$(1/n) + \{(-1)^n/n^2\} < 0{,}000\,001 \text{ desde } n \geqslant \nu.$$
2. Límite para $n \to \infty$ de las sucesiones siguientes:
$$\{\cos n\};\ \frac{1}{n + (-1)^n};\ \frac{n!}{n^n},$$
$$\{5^n + (-3)^n\};\ \{(-1)^{n-1} . n\};\ \{(-1)^n n - n^2\}.$$
3. Para $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, probar que $\lim a_n = 0$ para $n \to \infty$.

4. Demostrar que $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 1.$

5. Determinar el carácter de la sucesión $\{\alpha_n\}$, donde

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

6. Si $\{\alpha_n\}$ es monótona, lo es también en el mismo sentido la sucesión

$$r_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}.$$

7. Probar que el límite de la sucesión $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ...; *a*) existe; *b*) es igual a 2.

8. Dado $k > 0$ y $\alpha_1 > 0$ arbitrario, definamos por recurrencia las sucesiones $(n \geqslant 1)$: *a*) $\alpha_{n+1} = \sqrt{k + \alpha_n}$; *b*) $\alpha_{n+1} = k/(1 + \alpha_n)$. Demostrar que ambas son convergentes y tienden: en el caso *a*), monótonamente a la raíz positiva de $x^2 - x - k = 0$; y en el caso *b*), alternativamente, por la izquierda y la derecha, a la raíz positiva r de $x^2 + x - k = 0$.

9. Si $\nu(n)$ designa el número de factores primos distintos de n, probar que $\lim \nu(n)/n = 0$ para $n \to \infty$.

10. Si α_1 y α_2 son positivos, y $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n-1})$, $(n \geqslant 2)$, probar: *a*) que las sucesiones $\{\alpha_{2k-1}\}$ y $\{\alpha_{2k}\}$ son monótonas contiguas; *b*) que $\lim \alpha_n = (\alpha_1 + 2\alpha_2)/3$.

11. Límites de oscilación de $n^2[1 + (-1)^n]$; $(-1)^n n^2 + n$.

12. Si $\overline{\alpha}$, $\underline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\underline{\beta}$, son los límites superior e inferior de oscilación de las sucesiones $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, discutir en todos los casos posibles la posición de los límites de oscilación de las sucesiones: $\{-\alpha_n\}$, $\{1/\alpha_n\}$,

$$\{\alpha_n + \beta_n\}, \{\alpha_n - \beta_n\}, \{\alpha_n \cdot \beta_n\}, \{\alpha_n/\beta_n\}.$$

13. Demostrar las leyes formales de la Aritmética (§ 2-6 y 7-5) para los números reales definidos mediante sucesiones regulares (§ 20-6, *b*).

§ 21. CÁLCULO DE LÍMITES

1. Límites de las operaciones racionales. — Dada una variable x_n, es decir, una sucesión indefinida $x_1, x_2, x_3, \ldots$, la operación que consiste en hallar su límite se llama *paso al límite*. Las demás operaciones aritméticas hasta aquí estudiadas tienen un número finito de datos; esta nueva operación aritmética exige el conocimiento de infinitos números.

En aquéllas se puede asegurar, por la simple inspección de los datos, si la operación es posible o no; en cambio, no hay criterio sencillo para reconocer si una sucesión indefinida tiene límite o carece de él, y aun demostrada su existencia, no hay regla general que permita hallarlo.

Sin embargo, hay un tipo general de casos en que se puede hallar el límite de x_n; esto acontece cuando x_n es una combinación aritmética de otras variables, $\alpha_n, \beta_n, \ldots$, que tienen límites conocidos. Estudiaremos separadamente estos diversos casos. Empecemos por las operaciones racionales.

a) *Límite de una suma o diferencia.* — a_1) *Si α_n y β_n tienden a los límites finitos α y β, respectivamente, tiende $\alpha_n + \beta_n$ al límite $\alpha + \beta$ y $\alpha_n - \beta_n$ al límite $\alpha - \beta$.*

Por hipótesis, dado cualquier número positivo ε, desde un valor de n en adelante se verifica:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \alpha_n - \alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \quad -\frac{\varepsilon}{2} < \beta_n - \beta < \frac{\varepsilon}{2},$$

y sumando miembro a miembro:

$-\varepsilon < (\alpha_n + \beta_n) - (\alpha + \beta) < \varepsilon$; *es decir*: $\lim(\alpha_n+\beta_n) = \alpha+\beta$.

Análogamente, restando de la primera limitación la segunda invertida:

$-\varepsilon < (\alpha_n - \beta_n) - (\alpha - \beta) < \varepsilon$; *es decir*: $\lim (\alpha_n-\beta_n)=\alpha-\beta$.

Aplicando repetidamente estas propiedades, resulta:

Una suma algebraica de varios sumandos que tienen límites finitos, tiene como límite la suma algebraica análogamente formada con los límites de los sumandos.

Se sobrentiende que los varios sumandos aparecen en número determinado y finito. En otro caso, nada podrá afirmarse en general.

EJEMPLO 1: La suma de n sumandos iguales a $1/n$, cada uno de los cuales tiende a cero, se conserva igual a 1, que es por lo tanto el límite de dicha suma. La suma de n^2 sumandos iguales a $1/n$, tiende a $+\infty$; la de n sumandos iguales a $1/n^2$, tiende a cero. La suma de n sumandos iguales a $(-1)^n/n$, cada uno de los cuales tiende a cero, carece de límite.

a_2) *Si α_n tiene límite $+\infty$, $-\infty$ o ∞, y β_n se conserva en valor absoluto inferior a un número fijo k, la suma $\alpha_n + \beta_n$ tiene por límite $+\infty$, $-\infty$ ó ∞, respectivamente.*

Por hipótesis:

[21-1] $$-k < \beta_n < k.$$

Si es $\lim \alpha_n = +\infty$, dado cualquier número positivo A, será desde un valor de n en adelante, $\alpha_n > A + k$, y sumando con [21-1], resulta: $\alpha_n + \beta_n > A$; luego, $\lim (\alpha_n + \beta_n) = +\infty$.

Si es $\lim \alpha_n = -\infty$, desde un valor de n será: $\alpha_n < -A - k$, y sumando con [21-1], resulta: $\alpha_n + \beta_n < -A$; por consiguiente: $\lim (\alpha_n + \beta_n) = -\infty$.

El tercer caso resulta de reunir los dos anteriores.

a_3) *Si α_n y β_n tienden ambos a $+\infty$, o ambos a $-\infty$, también la suma tiene el mismo límite $+\infty$ ó $-\infty$.*

Porque para que sea $\alpha_n + \beta_n > A$, basta que sea:

$$\alpha_n > \frac{A}{2}, \quad \beta_n > \frac{A}{2},$$

y esto se verifica desde un valor de n en adelante, si α_n y β_n tienen límite $+\infty$. Análogamente en el otro caso.

ESCOLIO: Si α_n y β_n tienen límites $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente, o ambos tienen límite ∞ sin signo constante, nada puede asegurarse respecto de la suma, la cual puede tener límite

finito o carecer de él. Simbolizaremos este caso de indeterminación por $\infty - \infty$.

EJEMPLO 2: Tienen límites infinitos los dos términos de cada una de las expresiones:

$$\frac{n-1}{2} + \frac{1-n^2}{2n}, \quad n - \frac{1+n^2}{n} \quad (-2)^n + 2^n;$$

la primera tiende al límite $-1/2$; la segunda, a $-\infty$; la tercera carece de límite.

b) Límite de un producto. — Puede hallarse el límite de un producto $\alpha_n \beta_n$ de dos variables, en los casos siguientes:

b_1) *Si el factor α_n tiende al límite* 0, *y β_n se conserva finito, es decir, inferior en valor absoluto a un número fijo* K, *es* $\lim \alpha_n \beta_n = 0$.

En efecto, puesto que desde un valor de n en adelante es $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{K}$, el valor absoluto del producto será, desde dicho valor de n:

$$|\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon;$$

luego, $\lim \alpha_n \beta_n = 0.$

EJEMPLO 3: El límite de $(1/n) \cos n$ existe y es nulo, pues aunque $\cos n$ carezca de límite, se conserva acotado, y $1/n$ tiende a cero.

b_2) *Si el factor α_n tiene límite ∞, y β_n se conserva en valor absoluto superior a un número fijo $k > 0$, es* $\lim \alpha_n \beta_n = \infty$.

Porque, dado cualquier número positivo A, desde cierto valor de n en adelante se verifica $|\alpha_n| > \frac{A}{k}$; luego:

$$|\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| > \frac{A}{k} \cdot k = A;$$

es decir: $\lim \alpha_n \beta_n = \infty$.

b_3) *Si α_n y β_n tienden a los límites finitos α y β, respectivamente, el producto $\alpha_n \cdot \beta_n$ tiene por límite $\alpha \beta$.*

La diferencia $\alpha_n \beta_n - \alpha \beta$ puede escribirse del siguiente modo, a fin de que aparezcan las diferencias $\alpha_n - \alpha$ y $\beta_n - \beta$:

$$\alpha_n \beta_n - \alpha \beta = \alpha (\beta_n - \beta) + \beta_n (\alpha_n - \alpha).$$

En virtud de (b_1) podemos asegurar que

$$\lim \alpha (\beta_n - \beta) = 0, \quad \lim \beta_n (\alpha_n - \alpha) = 0;$$

luego, según (a_1),

$$\lim (\alpha_n \beta_n - \alpha \beta) = 0,$$

es decir:

$$\lim \alpha_n \beta_n = \alpha \beta.$$

Escolio: Si α_n tiene límite cero, y β_n tiene límite infinito con o sin signo determinado, nada puede afirmarse, en general, respecto del producto que puede tener límite finito o infinito, o carecer de él. Simbolizaremos este caso de indeterminación por $0 \cdot \infty$.

Ejemplo 4: En cada uno de los productos siguientes, el primer factor tiende a cero y el segundo a $+\infty$:

$$\frac{a}{n} \cdot n; \quad \frac{1}{n^2} \cdot n; \quad \frac{1}{n} \cdot n^3; \quad \frac{(-1)^n}{n} \cdot n.$$

Los tres primeros tienen límites a, 0 $+\infty$, y el cuarto carece de él.

c) Límite de un cociente. — c_1) Si α_n y β_n tienden a límites finitos α y β respectivamente, siendo $\beta \neq 0$, el cociente $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ tiende al límite $\frac{\alpha}{\beta}$.

En primer lugar se tiene: $\lim \frac{1}{\beta_n} = \frac{1}{\beta}$. En efecto:

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_n} = \frac{\beta_n - \beta}{\beta_n \cdot \beta} = (\beta_n - \beta) \frac{1}{\beta_n \cdot \beta}.$$

Si es, por ejemplo, $\beta > 0$, y elegimos un número positivo $\delta < \beta$, desde un valor de n en adelante será $\beta_n > \delta$; luego, la fracción $1/\beta_n \beta$ se conserva inferior al número fijo $1/\delta\beta$; y como el primer factor $\beta_n - \beta$ tiende a cero (b_1), también el producto.

Resuelto el caso anterior, tenemos en general:

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim \left(\alpha_n \cdot \frac{1}{\beta_n} \right) = (\lim \alpha_n) \left(\lim \frac{1}{\beta_n} \right) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

c_2) Si el denominador β_n tiene límite ∞ y el numerador α_n se conserva finito (es decir, inferior en valor absoluto a un número K), el cociente $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ tiene por límite cero.

Porque cualquiera que sea ε, desde un valor de n en adelante es:

$$|\beta_n| > \frac{K}{\varepsilon} \text{ ; luego, } \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| = \frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|} < \frac{K}{K/\varepsilon} = \varepsilon.$$

c_3) Si el denominador β_n tiene por límite cero, y el numerador se conserva en valor absoluto superior a un número fijo k, el cociente $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ tiene límite infinito.

En efecto, cualquiera sea el número positivo A, se verifica desde un valor de n en adelante:

$$|\beta_n| < \frac{k}{A}; \quad \text{luego,} \quad \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| = \frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|} > \frac{k}{k/A} = A.$$

c_4) Si el denominador se conserva finito y el numerador tiene límite infinito, el cociente tiene límite infinito.

Porque conservándose $|\beta_n| < K$, y siendo desde un valor de n en adelante $|\alpha_n| > K A$, se verifica desde dicho valor de n:

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| = \frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|} > \frac{K A}{K} = A.$$

ESCOLIO: Si α_n y β_n tienen ambos límite cero, o ambos límite infinito, nada puede afirmarse en general respecto del cociente α_n/β_n, que puede tener límite finito o infinito, o carecer de él. Simbolizaremos cada uno de estos dos casos de indeterminación por $0/0$ e ∞/∞.

EJEMPLO 5: De las igualdades siguientes, los primeros miembros ilustran el caso ∞/∞, y los segundos el caso $0/0$:

$$\frac{a\,n}{b\,n} = \frac{a/n}{b/n}; \quad \frac{n}{n^2} = \frac{1/n^2}{1/n}; \quad \frac{n^2}{n} = \frac{1/n}{1/n^2}; \quad \frac{(-1)^n \cdot n}{n} = \frac{(-1)^n/n}{1/n}.$$

En el primer caso existe límite finito a/b; en el segundo, límite cero; en el tercero, límite $+\infty$; en el cuarto no hay límite.

2. **Límite de los logaritmos y potencias.** — Estudiados los casos elementales en el § 8, tiene interés el teorema general:

a) Si β_n tiende al límite finito y positivo β, se verifica:

$$\lim (\log_\alpha \beta_n) = \log_\alpha \beta.$$

Esto equivale a demostrar que desde un valor de n en adelante es:

[21-2] $$-\varepsilon < \log_\alpha \beta_n - \log_\alpha \beta < \varepsilon.$$

Si suponemos, para fijar las ideas, $\alpha > 1$, es $\alpha^\varepsilon > 1$ y $\alpha^{-\varepsilon} < 1$; como $\lim (\beta/\beta_n) = 1$, desde un cierto valor de n se verificará (§ 20-2):

$$\alpha^{-\varepsilon} < \frac{\beta_n}{\beta} < \alpha^\varepsilon,$$

de donde, tomando logaritmos, resulta [21-2].

b) Si α es un número positivo cualquiera, y λ_n tiende al límite finito λ (positivo, negativo o nulo), se verifica:

$$\lim \alpha^{\lambda_n} = \alpha^\lambda.$$

En efecto,

$$\alpha^{\lambda_n} - \alpha^\lambda = \alpha^\lambda (\alpha^{\lambda_n - \lambda} - 1)$$
$$|\alpha^{\lambda_n} - \alpha^\lambda| = \alpha^\lambda |\alpha^{\lambda_n - \lambda} - 1|,$$

y como, tomando $\lambda_n - \lambda$ suficientemente pequeño, el valor absoluto de la diferencia $\alpha^{\lambda_n - \lambda} - 1$ se hace $< \varepsilon$ (§ 8-5, b), su producto por α^λ tiende a cero.

c) Si α_n tiende al límite finito y positivo α, y λ_n tiende al límite finito λ (positivo, negativo o nulo) se verifica:

$$\lim \alpha_n^{\lambda_n} = \alpha^\lambda.$$

Tomando logaritmos en un sistema de base cualquiera, $b > 1$, $\log \alpha_n^{\lambda_n} = \lambda_n . \log \alpha_n$; de donde: $\alpha_n^{\lambda_n} = b^{\lambda_n \log \alpha_n}$; luego, según ($a$) y ($b$):

$$\lim \alpha_n^{\lambda_n} = b^{\lim (\lambda_n . \log \alpha_n)} = b^{\lambda \log \alpha} = (b^{\log \alpha})^{\lambda} = \alpha^{\lambda}.$$

EJEMPLO:

$$\lim \left(\sqrt{\frac{1-n}{1-2n}} \right)^{\frac{2n-1}{1+3n}} = \lim \left(\frac{1-n}{1-2n} \right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{1+3n}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

3. **Límites de potencias en los casos singulares.** — Al tratar de la suma, la diferencia, producto, cociente y logaritmo, hemos considerado no solamente los casos *normales* en que los datos tengan límites finitos, sino también los casos *singulares*, en que las reglas generales dejan de ser aplicables. Aunque en la potenciación se puede seguir la misma marcha, es más sencillo reducirlos a los anteriores, tomando logaritmos en un sistema cualquiera, por ejemplo, de base $b > 1$; como hemos hecho en § 21-2, c, se obtiene:

[21-3] $$\alpha_n^{\lambda_n} = b^{\lambda_n . \log_b \alpha_n}, \qquad (b > 1),$$

y basta aplicar al segundo miembro el teorema de § 21-2, b, con lo cual el cálculo se reduce al del límite de un producto (§ 21-1, b), y el estudio de la variación de potencias y logaritmos realizado en § 8.

Convendrá aplicar esta regla en cada caso que en la práctica se presente. Sin embargo, puede ser útil resumir todos los casos posibles, y tenerlos a la vista cada vez que se necesiten.

Recordando los teoremas de § 21-2, b y c, resulta que los casos singulares (es decir, excluídos por las reglas generales), son aquellos en que el límite de la base es 0 ó $+\infty$; o bien es el límite del exponente $+\infty$ ó $-\infty$; y finalmente, puede suceder que la base y el exponente sean singulares.

Advirtamos una vez más que las bases de todas las potencias consideradas han de ser números *positivos*.

Los casos de indeterminación serán aquellos en los cuales el producto $\lambda_n \log_b \alpha_n$ tome la forma $0 . \infty$ ó $\infty . 0$ (§ 21-1, b). Utilizando la fórmula [21-3] y el estudio de la variación de las potencias (§ 8-6) y de los logaritmos (§ 8-7), pruébense las conclusiones que siguen:

a) La base $\alpha_n \to +0$. Esta expresión significa que α_n tiende a cero, conservándose positiva. Entonces, $\log_b \alpha_n \to -\infty$ (§ 8-7). Si $\lambda_n \to \lambda > 0$, será $\alpha_n^{\lambda_n} \to 0$, simbolizado por $0^{\lambda} = 0$, $(\lambda > 0)$. Si $\lambda_n \to \lambda < 0$ será $\alpha_n^{\lambda_n} \to +\infty$, simbolizado por $0^{\lambda} = +\infty$, $(\lambda < 0)$.

El caso de indeterminación es aquel en que $\lambda_n \log_b \alpha_n$ toma la forma $0 . (-\infty)$, es decir, $\lambda_n \to 0$. Este límite indeterminado de potencia se simboliza por 0^0.

EJEMPLO 1: Si es $\alpha_n = b^{-n^2} \to 0$ con $b > 1$, tomando $\lambda_n = 1/n$, $\lambda_n = -1/n$, $\lambda_n = -1/n^2$, $\lambda_n = (-1)^n/n$, se obtiene: $\alpha_n^{\lambda_n} \to 0$; $\alpha_n^{\lambda_n} \to +\infty$; $\alpha_n^{\lambda_n} \to b$; $\alpha_n^{\lambda_n}$ oscilante; respectivamente.

b) La base $\alpha_n \to +\infty$. Entonces, $\log_b \alpha_n \to +\infty$ (§ 8-7).
Si $\lambda_n \to \lambda > 0$ será $\alpha_n^{\lambda_n} \to +\infty$, simbolizado por

$$(+\infty)^\lambda = +\infty, \quad (\lambda > 0).$$

Si $\lambda_n \to \lambda < 0$ será $\alpha_n^{\lambda_n} \to 0$, simbolizado por

$$(+\infty)^\lambda = 0, \quad (\lambda < 0).$$

El caso de indeterminación es aquel en que $\lambda_n \log_b \alpha_n$ toma la forma $0.(+\infty)$, es decir: $\lambda_n \to 0$. Este límite indeterminado de potencia se simboliza por $(+\infty)^0$.

EJEMPLO 2: Si es $\alpha_n = b^{n^2} \to +\infty$ con $b > 1$, tomando λ_n como en el ejemplo 1 se obtiene, respectivamente:

$$\alpha_n^{\lambda_n} \to +\infty, \quad \alpha_n^{\lambda_n} \to 0, \quad \alpha_n^{\lambda_n} \to b^{-1}, \quad \alpha_n^{\lambda_n} \text{ oscilante.}$$

c) El exponente $\lambda_n \to +\infty$. La base tiene límite positivo finito.
Si $\alpha_n \to \alpha > 1$ será $\alpha_n^{\lambda_n} \to +\infty$, simbolizado por

$$\alpha^{+\infty} = +\infty, \quad (\alpha > 1).$$

Si $\alpha_n \to \alpha$ con $0 < \alpha < 1$ será $\alpha_n^{\lambda_n} \to 0$, simbolizado por

$$\alpha^{+\infty} = 0, \quad (0 < \alpha < 1).$$

El caso de indeterminación es aquel en que $\lambda_n \log_b \alpha_n$ toma la forma $(+\infty).0$, es decir: $\alpha_n \to 1$. Este límite indeterminado de potencia se simboliza por $1^{+\infty}$, que *en general no tiende a* 1.

EJEMPLO 3: $\lambda_n = n^2 \to +\infty$; tomando

$$\alpha_n = b^{1/n}, \quad \alpha_n = b^{-1/n}, \quad \alpha_n = b^{1/n^2}, \quad \alpha_n = b^{(-1)^n/n}, \quad \text{con } b > 1,$$

se obtiene, respectivamente:

$$\alpha_n^{\lambda_n} \to +\infty, \quad \alpha_n^{\lambda_n} \to 0, \quad \alpha_n^{\lambda_n} \to b, \quad \alpha_n^{\lambda_n} \text{ oscilante.}$$

d) El exponente $\lambda_n \to -\infty$. La base tiene límite positivo finito.
Si $\alpha_n \to \alpha > 1$, será $\alpha_n^{\lambda_n} \to 0$, simbolizado por

$$\alpha^{-\infty} = 0, \quad (\alpha > 1).$$

Si $\alpha_n \to \alpha$ con $0 < \alpha < 1$, será $\alpha_n^{\lambda_n} \to +\infty$, simbolizado por

$$\alpha^{-\infty} = +\infty, \quad (0 < \alpha < 1).$$

El caso de indeterminación es aquel en que $\lambda_n \log_b \alpha_n$ toma la forma $(-\infty).0$, es decir: $\alpha_n \to 1$. Este límite indeterminado de potencia se simboliza por $1^{-\infty}$, que *en general no tiende a* 1.

EJEMPLO 4: $\lambda_n = -n^2 \to -\infty$; tomando α_n como en el ejemplo 3 se obtiene respectivamente:

$$\alpha_n^{\lambda_n} \to 0, \quad \alpha_n^{\lambda_n} \to +\infty, \quad \alpha_n^{\lambda_n} \to b^{-1}, \quad \alpha_n^{\lambda_n} \text{ oscilante.}$$

e) El exponente $\lambda_n \to \infty$ *cambiando de signo*. La base tiene límite positivo y finito.

Si $\alpha_n \to \alpha$ con $0 < \alpha \neq 1$ será $\alpha_n^{\lambda_n}$ oscilante, simbolizado por

a^{∞} = oscilante ($0 < a \neq 1$). Por lo tanto, este caso *no es indeterminado.*

En cambio, es indeterminado el caso $\alpha_n \to 1$, porque entonces, $\lambda_n \log_b \alpha_n$ toma la forma $\infty . 0$. Este límite indeterminado de potencia se simboliza por 1^{∞}, y puede tener límite finito no nulo o nulo, infinito o ser oscilante. Como ejemplos, basta tomar sucesiones en que resulten intercaladas las de los ejemplos 3 y 4.

f) La base y el exponente tienen límites 0, $\pm\infty$.
Si $\alpha_n \to +0$, $\lambda_n \to +\infty$ será $\alpha_n{}^{\lambda_n} \to 0$, simbolizado por

$$0^{+\infty} = 0.$$

Si $\alpha_n \to +0$, $\lambda_n \to -\infty$ será $\alpha_n{}^{\lambda_n} \to +\infty$, simbolizado por

$$0^{-\infty} = +\infty.$$

Si $\alpha_n \to +0$, $\lambda_n \to \infty$ *cambiando de signo* será $\alpha_n{}^{\lambda_n}$ oscilante, simbolizado por 0^{∞} = oscilante. Por lo tanto, este caso *no es indeterminado*. Por ejemplo, $\alpha_n = 1/n$; $\lambda_n = (-1)^n n$.
Si $\alpha_n \to +\infty$, $\lambda_n \to +\infty$ será $\alpha_n{}^{\lambda_n} \to +\infty$, simbolizado por

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty.$$

Si $\alpha_n \to +\infty$, $\lambda_n \to -\infty$ será $\alpha_n{}^{\lambda_n} \to 0$, simbolizado por

$$(+\infty)^{-\infty} = 0.$$

Si $\alpha_n \to +\infty$, $\lambda_n \to \infty$ *cambiando de signo* será $\alpha_n{}^{\lambda_n}$ oscilante, simbolizado por $(+\infty)^{\infty}$ = oscilante. Por lo tanto, este caso *no es indeterminado*. Por ejemplo,

$$\alpha_n = b^n, \quad b > 1; \quad \lambda_n = (-1)^n n.$$

Resumiremos los casos anteriores en el siguiente cuadro:

a) $0^{\lambda} = 0$, $(\lambda > 0)$; $0^{\lambda} = +\infty$, $(\lambda < 0)$;
0^{0} indeterminado.

b) $(+\infty)^{\lambda} = +\infty$, $(\lambda > 0)$; $(+\infty)^{\lambda} = 0$, $(\lambda < 0)$;
$(+\infty)^{0}$ indeterminado.

c) $a^{+\infty} = +\infty$, $(a > 1)$; $a^{+\infty} = 0$, $(0 < a < 1)$;
$1^{+\infty}$ indeterminado.

d) $a^{-\infty} = 0$, $(a > 1)$; $a^{-\infty} = +\infty$, $(0 < a < 1)$;
$1^{-\infty}$ indeterminado.

e) a^{∞} = oscilante, ($0 < a \neq 1$; λ_n cambia de signo);
1^{∞} indeterminado.

f) $0^{+\infty} = 0$; $0^{-\infty} = +\infty$; 0^{∞} = oscilante (λ_n cambia de signo).
$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$; $(+\infty)^{-\infty} = 0$; $(+\infty)^{\infty}$=oscilante (λ_n cambia de signo).

Insistiremos en que estas igualdades mnemotécnicas tienen solamente un sentido convencional; así, por ejemplo, $a^{-\infty} = 0$, $(a > 1)$ no quiere decir que el número a ha de elevarse al exponente $-\infty$, locución ésta vacía de sentido, sino que expresa: una potencia cuya base α_n tiene un límite $a > 1$, y cuyo exponente negativo λ_n crece infinitamente en valor absoluto, tiende al límite cero.

4. Límites indeterminados. — *a*) Quedan, después del estudio general efectuado en los apartados anteriores, siete casos en que el límite del resultado de la operación no depende solamente del límite de los datos, sino de la ley con que éstos tiendan a aquéllos en cada caso particular. Así, el límite del resultado es distinto según cuales sean las sucesiones dadas, y en general no existe. Estos casos de límite indeterminado son los representados por los símbolos:

$$\infty - \infty,\ 0.\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\quad 0^0,\ (+\infty)^0,\ 1^{\pm\infty},$$

en que para las potencias $\alpha_n^{\lambda_n}$ los casos de indeterminación se obtienen (§ 21-3) al tomar logaritmos de base $b > 1$, y resultar el producto $\lambda_n \log_b \alpha_n$ de la forma $0.\infty$ ó $\infty.0$ (§ 21-1, *b*).

No pueden establecerse criterios generales para asegurar la convergencia en cada caso, ni aun, sabida ésta, pueden darse reglas que permitan hallar el límite. Para los casos en que los datos de la operación puedan considerarse funciones continuas y derivables del índice n (no ya entero), los recursos del Cálculo infinitesimal, en particular la llamada regla de L'HOSPITAL (§ 36-1), pueden ser aptos a resolver la indeterminación. Vamos a considerar ahora otros tipos generales de expresiones indeterminadas.

b) *Límites de expresiones racionales.* — Las sucesiones más sencillas son aquellas en que el término n-simo es una función racional de n. Reducida esta expresión a su forma típica:

$$[21\text{-}4]\qquad X_n = \frac{a_0 n^h + a_1 n^{h-1} + \ldots + a_h}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_k}\qquad \begin{matrix} a_0 \neq 0 \\ b_0 \neq 0, \end{matrix}$$

hallaremos fácilmente su límite para $n \to \infty$, separando como factor común en cada término de la fracción, la potencia de n de exponente máximo. Resulta:

$$X_n = n^{h-k}\, \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \ldots + \dfrac{a_h}{n^h}}{b_0 + \dfrac{b_1}{n} + \ldots + \dfrac{b_k}{n^k}};$$

luego,

$$\lim X_n = 0,\quad \lim X_n = \frac{a_0}{b_0},\ \lim X_n = \infty,$$

según sea:

$$h < k,\qquad h = k,\qquad h > k.$$

NOTAS: 1. La demostración no exige que h y k sean números naturales, y vale aunque sean fraccionarios o irracionales.

2. En el último caso, el límite infinito existe con signo determinado: el de a_0/b_0.

Quedan resueltos los casos $\infty - \infty$, $0.\infty$, $0/0$, ∞/∞ pa-

en toda clase de expresiones racionales, bastando reducirlas a su forma típica [21-4].

EJEMPLOS:

$$\lim \left(\frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^3}{(n-1)^2} \right) = \lim \frac{-2n^2+1}{n(n-1)^2} = 0;$$

$$\lim \frac{(\sqrt{2n}+n)^3 - n^3}{n^2 - 2\sqrt{n^5}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\,; \quad \lim \frac{n^{\pi} - 2n(4n-n^2)}{5-n^3} \cdot \frac{1+n^{-1}}{1+n} = -2.$$

5. **El número** *e*. — *a*) Hemos introducido el número *e* (§ 8-8, c_1), mediante las sucesiones monótonas contiguas [8-10]. Puede también directamente definirse e por:

[21-5] $$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n ,$$

(de la forma indeterminada $1^{+\infty}$) al probar que es *monótona convergente la sucesión*.

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n .$$

En efecto, desarrollada la potencia y simplificando, puede escribirse en la forma:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Al crecer n aumenta el número de términos, y cada uno de los anteriores crece, por disminuir los sustraendos; luego, la sucesión es *creciente*. Pero está *acotada*; pues si sólo consideramos los minuendos, resulta menor que

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

luego, en virtud del principio (§ 20-4, *a*) del crecimiento acotado, tiene un límite < 3.

Este límite es el número más importante de la Matemática superior, y se designa siempre por la letra *e*; sus primeras cifras decimales son: $e = 2{,}7182818284\ldots$

b) Más general: *Toda sucesión* $(1 + 1/\lambda_n)^{\lambda_n}$ *donde* $\lambda_n \to \infty$, *cualquiera sea su signo, tiene por límite* e *para* $n \to \infty$. Es decir:

[21-6] $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\lambda_n} \right)^{\lambda_n} = e, \text{ si } \lambda_n \to \infty.$$

En efecto, si $\lambda_n \to +\infty$, y es α_n la parte entera de λ_n, se verifica:

$$\alpha_n \leqq \lambda_n < \alpha_n + 1$$

[21-7] $$\left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1} \right)^{\alpha_n} < \left(1 + \frac{1}{\lambda_n} \right)^{\lambda_n} < \left(1 + \frac{1}{\alpha_n} \right)^{\alpha_n + 1} .$$

Al crecer n infinitamente, también crece infinitamente α_n; y como las sucesiones

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}};$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right),$$

tienen límite e, por (a), también estas dos sucesiones [21-7], que comprenden a la dada, tienen el mismo límite e según § 20-3, a, y por lo tanto (§ 20-2, c), se cumple [21-6].

Si $\lambda_n \to -\infty$, llamando $\mu_n = -\lambda_n$, resulta:

$$\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} = \left(1-\frac{1}{\mu_n}\right)^{-\mu_n} = \left(\frac{\mu_n}{\mu_n-1}\right)^{\mu_n} = \left(1+\frac{1}{\mu_n-1}\right)^{\mu_n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{\mu_n-1}\right)$$

y como $\mu_n \to +\infty$, el límite es también e.

Por lo tanto, la igualdad [21-6] subsiste para $\lambda_n \to \infty$, cualquiera sea su signo.

c) Si la potencia es $\left(1+\frac{x_n}{\mu_n}\right)^{\mu_n}$, donde $x_n \to x$ y $\mu_n \to \infty$, llamando $\frac{\mu_n}{x_n} = \lambda_n$, se transforma en:

$$\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n \cdot x_n} = \left[\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n}\right]^{x_n} \to e^x,$$

en virtud de [21-6] y de § 21-2, c.

Resulta, por lo tanto:

[21-8] $$\lim \left(1+\frac{x_n}{\mu_n}\right)^{\mu_n} = e^x \quad \text{para} \quad x_n \to x, \quad \mu_n \to \infty,$$

y también:

[21-9] $$\lim \ (1+x_n \nu_n)^{\frac{1}{\nu_n}} = e^x \quad \text{para} \quad x_n \to x, \quad \nu_n \to 0,$$

siendo especialmente importante el caso $x_n = x$.

d) Toda potencia $\alpha_n^{\mu_n}$ cuya base $\alpha_n = 1 + \delta_n$ tiende a 1, es decir, $\delta_n \to 0$, y cuyo exponente tiene límite ∞ puede escribirse en la forma anterior, llamando $x_n = \delta_n \cdot \mu$, pues resulta:

$$\alpha_n^{\mu_n} = \left(1+\delta_n\right)^{\mu_n} = \left(1+\frac{x_n}{\mu_n}\right)^{\mu_n}.$$

Por lo tanto se verifica:

$$\lim \alpha_n^{\mu_n} = e^x \quad \text{siendo} \quad x = \lim x_n = \lim \quad [\mu_n \cdot (\alpha_n - 1)].$$

6. Sucesiones de números complejos. — a) Se dice que una sucesión indefinida de números complejos:

$$\alpha_1 = a_1 + i\, b_1, \quad \alpha_2 = a_2 + i\, b_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n = a_n + i\, b_n, \quad \ldots,$$

tiende al límite $\alpha = a + i\, b$, o que *tiene* este límite, si desde un cierto valor n en adelante es:

[21-10] $$|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon, \quad \text{o sea:} \quad \sqrt{(a-a_n)^2 + (b-b_n)^2} < \varepsilon.$$

Puesto que $|a - a_n| < |\alpha - \alpha_n|$ y $|b - b_n| < |\alpha - \alpha_n|$, será también

[21-11] $\lim a_n = a$; $\lim b_n = b$,

y recíprocamente, de [21-11] resulta [21-10], por ser

$$|\alpha_n - \alpha| \leqq |a_n - a| + |b_n - b| .$$

El problema de hallar el límite de una sucesión de números complejos se reduce, pues, al de hallar los límites de dos sucesiones de números reales.

EJEMPLOS:

1. $$\lim \left(\frac{n+1}{n} + i\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = 1 + ie$$

2. $$\lim \frac{1}{n}(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = 0.$$

Aquí también diremos que la sucesión de números complejos α_n tiende a *infinito* si los *valores absolutos* de sus términos se conservan superiores a cualquier número positivo A para todo n superior a un cierto $\nu = \nu$ (A), es decir, si se cumple [20-2]. Entonces, la clasificación de las sucesiones en *convergentes* (límite finito), *divergentes* (límite infinito) y *oscilantes* (sin límite, ni finito ni infinito) dada en la definición de § 20-1, subsiste para las sucesiones de números reales o complejos cualesquiera.

Obsérvese que es necesario, pero no suficiente, que los módulos de los términos de una sucesión tengan límite finito distinto de cero para que la sucesión converja a un límite finito distinto de cero, mientras que es necesario y suficiente que dichos módulos converjan a cero o a infinito para que la sucesión sea, respectivamente, convergente o divergente. ¿Qué pasa con los argumentos? Examínese el ejemplo 2 anterior.

b) Para las sucesiones de números complejos, también es análoga la definición de *límite de oscilación* (§ 20-5): lo será todo número complejo α tal, que haya *infinitos números* de la sucesión (*no* decimos *todos* desde un valor de n en adelante) que cumplan la condición [21-10]. Aquí, en cambio, no tendrá sentido hablar de límite superior e inferior de oscilación, por haber salido del orden lineal. Sin embargo, podremos formular el siguiente teorema, esencialmente el mismo que el de BOLZANO - WEIERSTRASS para conjuntos (Cap. VI, nota II):

Toda sucesión $\{\alpha_n\}$ *cuyos términos reales o complejos se conservan acotados (es decir, inferiores en valor absoluto a un número fijo), tiene por lo menos un límite de oscilación finito.*

En efecto, si k es la cota, todos los términos de la sucesión tendrán sus afijos dentro de un cuadrado Q_1, de lados paralelos a los ejes de coordenadas, centro 0 y semilado k. Subdividamos Q_1 en cuatro cuadrados, congruentes entre sí por medio de paralelas a sus lados. Por lo menos uno de estos cuadrados, tomados con sus perímetros, tiene que contener infinitos puntos de la sucesión (considerando como distintos los puntos de igual afijo y con distintos lugares en la sucesión). Si hay más de uno, escojamos el primero que se presente por abajo primero y por la izquierda después: llamémosle Q_2. Si con Q_2 se procede como con Q_1, ob-

tendremos otro cuadrado, Q_3, cuarta parte de Q_2, que tomado con su perímetro contiene infinitos términos de la sucesión. Continuando indefinidamente este proceso, vemos que las proyecciones de los cuadrados Q_n sobre los ejes coordenados forman encajes de intervalos que determinan los puntos de abscisa a y ordenada b, tales que el número complejo $\alpha = a + i\,b$ tiene su afijo contenido en todos los Q_n. Por lo tanto, α es límite de oscilación de la sucesión.

Si la sucesión no se conserva acotada, se dice que el "punto ∞" es límite de oscilación de ella.

c) Las propiedades de las sucesiones contenidas en otras (§ 20-3) subsisten aquí.

Es muy importante observar que el *criterio general de convergencia de* BOLZANO-CAUCHY (§ 20-6) para la existencia de *límite finito* se enuncia para las sucesiones de números complejos con las mismas palabras que en el caso particular visto de términos reales.

La demostración de que la condición es necesaria, es la misma que la vista antes. Para el recíproco, por razón análoga al caso lineal, se conservan acotados todos los términos de la sucesión, y por consiguiente, existirá por lo menos un límite de oscilación finito, el cual es único por la misma condición de BOLZANO-CAUCHY, es decir, será el límite de la sucesión, cuya existencia queda así demostrada.

EJERCICIOS

1. Hallar el límite para $n \to \infty$, de $\dfrac{(2n+1)^2 - (2n-1)^2}{3n^2+1}$,

$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$, $\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2-4n}$, $\left(\dfrac{5n+2}{15n-4}\right)^{(3n+4)/(9n-6)}$

2. Demostrar que $\lim\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,\sqrt{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

3. Si $a \geqslant b > 0$, hallar el límite de $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ para $n \to \infty$.

Lo mismo para $\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}$, si $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_k > 0$

4. Hallar los límites de

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

5. Hallar los límites de

$$\left(\frac{2n-3}{2n+4}\right)^n, \quad \left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{n/4} \quad \text{para } n \to \infty.$$

6. Probar que $\alpha_n = n\,(\sqrt[n]{a} - 1) \to \ln a$ (con $a > 0$) para $n \to \infty$, y aplicar el resultado para demostrar que $\ln (a\,b) = \ln a + \ln b$ con a y b positivos.

7. Aplicando la propiedad de ser $\lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim a_n$, cuando este último existe (cfr. nota I-*b*), demostrar que $\sqrt[n]{n!}/n \to 1/e$ para $n \to \infty$.

8. Aplicando la propiedad de ser $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim (\alpha_n/\alpha_{n-1})$, cuando este último existe (cfr. nota I-*b*), hallar para $n \to \infty$ el límite de

$\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$.

9. Aplicando el criterio de STOLZ (nota I-*d*), demostrar que si $k > -1$: $(1^k + 2^k + \dots + n^k)/n^{k+1} \to 1/(1+k)$ para $n \to \infty$.

10. Hallar los límites de $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, $\frac{(-i)^n}{n}$ para $n \to \infty$. Gráficas correspondientes.

11. Hallar los límites de oscilación de la sucesión $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$

12. Para z_1 arbitrario, la sucesión $\{z_n\}$, tal que $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right)$, converge o no según que $R(z_1) \neq 0$ ó $R(z_1) = 0$, y en el primer caso, el límite es ± 1, según que $R(z_1) \gtrless 0$. Generalización para $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right)$ con $a \neq 0$.

§ 22. SERIES NUMÉRICAS

1. **Propiedades generales de las series.** — *a*) Se llama *algoritmo indefinido* a toda combinación de las operaciones elementales con la nueva operación que hemos llamado *paso al límite*. El algoritmo indefinido más importante resulta de combinar la adición con el paso al límite.

Dada una sucesión indefinida de números reales o complejos cualesquiera:

[22-1] $$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots,$$

se llama *serie* al algoritmo siguiente:

[22-2] $$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots,$$

pero, como sólo hemos definido la suma para un número finito de sumandos, no puede interpretarse sin más como *suma de infinitos sumandos*, sino que su significado es el siguiente: formemos las llamadas *sumas parciales*:

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 \\ U_2 &= u_1 + u_2 \\ U_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ U_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

y como a n podemos darle cualquier valor natural, obtenemos una sucesión indefinida de números:

[22-3] $$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots U_n, \dots$$

1) Si esta sucesión es convergente, es decir, si existe un número U tal que

[22-4] $$\lim U_n = U,$$

este número se llama *suma* de la serie [22-2], y se dice que ésta es *convergente*. Entonces *suma* de una serie *convergente* es el *límite de la sucesión de sumas parciales*; se escribe simbólicamente:

[22-5] $$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Esta igualdad simbólica no expresa, pues, otra cosa que la igualdad [22-4] ya definida *.

2) Si la sucesión [22-3] es divergente, esto es, si

$$\lim U_n = \infty,$$

se dice que la serie [22-2] *es divergente.*

3) Si la sucesión [22-3] de sumas parciales carece de límite, la serie [22-2] se llama *oscilante.*

NOTAS: 1. Obsérvese que en [22-2] ó [22-5], los últimos puntos suspensivos no expresan una abreviatura para términos no escritos, sino que representan un símbolo matemático, equivalente a "lim".

2. La *suma* de una serie no es una suma (en el sentido aritmético) sino *un límite* de sumas. Por ello cabe investigar cuáles propiedades de la adición subsisten para las series y cuáles no. Por ejemplo, no vale en general (cfr. *c* y § 22-2, *a*) la propiedad asociativa.

3. Muchos autores modernos llaman *divergentes* a todas las series *no convergentes*, y las clasifican así: *series simplemente divergentes* si tienen límite ∞, y series *discrepantes, oscilantes* o *impropiamente divergentes*, las demás.

b) *Serie geométrica. Suma de los n primeros términos.* Se llama *progresión geométrica* a una sucesión de números tales que cada uno es igual al anterior multiplicado por un número fijo llamado *razón.* Si llamamos a al primer término, y k a la razón, la progresión tendrá la forma:

[22-6] $$a,\ ak,\ ak^2,\ ak^3,\ \ldots$$

EJEMPLOS:

1. $1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16, \ldots \quad (a = 1,\ k = 2)$

2. $1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{16}, \ldots \quad (a = 1,\ k = \frac{1}{2})$

3. $2,\quad -4,\quad 8,\ -16,\quad 32, \ldots \quad (a = 2,\ k = -2).$

El término que ocupa el lugar n-ésimo en la progresión [22-6] es el: $a.k^{n-1}$. Calculemos la suma U_n de los n primeros términos:

$$U_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1},$$
$$U_n.k = ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} + ak^n.$$

* Como ya hemos hecho en apartados anteriores, suprimimos la notación $n \to \infty$, advirtiendo de una vez para siempre, que n es el índice que crece infinitamente.

Restando, queda:

$$U_n - U_n . k = a - ak^n$$

ó: $(k \neq 1)$

[22-7] $$U_n = a \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

fórmula que nos da *la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica para* $k \neq 1$.

EJEMPLOS: 4. En la progresión

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots,$$

el primer término es $a = 1$, y la razón $k = 2$. El décimo término será entonces:

$$a . k^{10-1} = 2^9 = 512$$

La suma de los diez primeros términos será, por [22-7],

$$U_{10} = 1 \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \frac{1 - 2 \times 512}{-1} = 1023.$$

Calcúlese la suma U_9. ¿Cuánto debe valer la diferencia $U_{10} - U_9$? Verifíqueselo.

5. En la progresión geométrica

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$$

de primer término $a = 1$ y razón $k = 1/2$, se tienen, por ejemplo, las siguientes:

$$U_{10} = \frac{1 - \frac{1}{1024}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \frac{1024 - 1}{1024} = 2 - \frac{2}{1024} = 2 - \frac{1}{512}$$

$$U_{11} = \frac{1 - \frac{1}{2048}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{1024}, \quad U_{12} = \frac{1 - \frac{1}{4096}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2048}, \text{ etc.}$$

Como vemos, las sumas sucesivas se van aproximando cada vez más al número 2.

Llamaremos *serie geométrica*,

[22-8] $$a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} + \ldots,$$

a la formada con los términos de la progresión geométrica [22-6], cuyas sumas parciales valen [22-7], es decir, si $k \neq 1$:

$$U_n = a \frac{1 - k^n}{1 - k} = \frac{a}{1 - k} - \frac{a\,k^n}{1 - k}.$$

Basándose en esta expresión se puede estudiar el comportamiento de la serie [22-8] para los distintos valores de k.

Si el valor absoluto de k es menor que 1; $|\,k\,| < 1$, $k^n \to 0$, según § 8-5, *b* y § 10-1, se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \frac{a}{1 - k}$$

es decir, la serie [22-8] resulta convergente con suma:

$$U = \frac{a}{1 - k}$$

En cambio, si $|k| > 1$, el valor absoluto de k^n crece infinitamente con n, según § 8-5 y § 10-1, y como $\frac{1}{1-k}$ es un número fijo, y por lo tanto finito, crece U_n infinitamente en valor absoluto. La serie es divergente.

Si $|k| = 1$ y el argumento principal de k no es nulo ($k \neq 1$), las potencias sucesivas k^n, de módulo 1, oscilan, pues el valor absoluto $|k - 1|$ de la diferencia de dos consecutivas es constante, en vez de hacerse arbitrariamente pequeño al crecer n, según exigiría el criterio general de convergencia de BOLZANO-CAUCHY (§ 21-6, *c*). Por lo tanto, para $|k| = 1$, con $k \neq 1$, la serie geométrica [22-8], de suma parcial [22-7] acotada, es oscilante. Si $k = 1$, se ve directamente que la serie geométrica [22-8] es divergente.

EJEMPLOS:

6. $$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3.$$

7. $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

8. $$1 - \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} - \frac{3^3}{2^3} + \ldots \text{ Divergente.}$$

9.
[22-9] $$i - 1 - i + 1 + \ldots + i^n + \ldots \text{ Oscilante.}$$

c) *Ley de formación de los términos.* — La ley de formación de los términos de una serie puede ser completamente arbitraria. En los ejemplos anteriores, todos los términos venían dados por una expresión f(n), donde f designa una función racional muy sencilla; pero esta función puede ser completamente arbitraria. Un modo sencillo de definirla consiste en dar una ley que permita deducir cada término de algunos anteriores. O bien se puede dar una regla cualquiera que permita obtener cualquier término de índice prefijado.

EJEMPLOS: 10. La serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \ldots$$

se define dando los dos primeros términos y expresando el denominador de cada término siguiente como suma de los denominadores de los dos anteriores.

11. La serie

$$[22\text{-}10] \qquad 1 + 0{,}1 + \frac{1}{2} + 0{,}01 + 1 + \frac{1}{3} - 1 + 0{,}001 + \frac{1}{4} + \ldots$$

se define estableciendo que los términos que ocupan lugares dados por potencias de 2, son unidades decimales sucesivas; los que ocupan lugares múltiplos de 3, son los inversos de los números naturales; los demás son alternativamente 1 y -1.

Para averiguar el carácter de una serie, no es necesario comenzar por U_1, sino que se puede formar la sucesión de sumas parciales a partir de una U_i cualquiera más avanzada; esto equivale a suprimir los $i-1$ primeros términos de la sucesión U_1, U_2, U_3, ..., lo cual no altera el límite.

Esto suele hacerse cuando no hay regularidad en la formación de los términos desde el primero de ellos.

d) Condición necesaria para la convergencia. — La definición de convergencia es ésta:

$$\lim U_n = U,$$

pero entonces es también (§ 20-3):

$$\lim U_{n-1} = U:$$

luego,

$$\lim (U_n - U_{n-1}) = \lim u_n = 0.$$

En toda serie convergente, el término general tiene por límite 0.

Obtenemos, pues, una condición *necesaria* para la convergencia. Con ella podemos asegurar que las series [22-9] y [22-10] no son convergentes.

La condición $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ *no es suficiente para la convergencia de la serie* (cfr. § 22-3, *a*).

Un ejemplo muy notable de esto es la serie

$$[22\text{-}11] \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

llamada *armónica*, porque cada término es media armónica (§ 6-9, *a*) entre los dos contiguos. Designaremos siempre por H_n la suma de sus n primeros términos, la cual es mayor que la suma U_n análogamente formada en la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots,$$

obtenida de [22-11] sustituyendo los términos que están entre $1/(2^{j-1}+1)$ y $1/2^j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, incluídos éstos, por el va-

lor menor $1/2^j$. Para cada j, el número de estos términos es $2^j - 2^{j-1} = 2^{j-1}$.

Si sumamos los 2^ν primeros términos, es decir, si elegimos $n = 2^\nu$, tenemos:

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^\nu}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{\nu}{2}.$$

Luego, dado un entero cualquiera A, sin más que tomar $\nu = 2\,A$, para todos los valores $n \geqq 2^{2A}$, se verifica:

$$H_n > U_n > A$$

es decir: $\lim U_n = +\infty$, $\lim H_n = +\infty$. Por lo tanto:

La serie armónica es divergente.

e) Propiedades asociativa y distributiva. — En una serie convergente o divergente *se pueden sustituir varios términos consecutivos por su suma efectuada, sin que varíe el carácter ni la suma de la serie.* (Propiedad asociativa.)

Asociando los términos de

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots.$$

resulta la serie

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_i) + (u_{i+1} + \ldots + u_j) + (u_{j+1} + \ldots + u_k) + \ldots,$$

cuya sucesión de sumas parciales:

[22-12] $\qquad U'_1 = U_i, \quad U'_2 = U_j, \quad U'_3 = U_k, \ldots,$

está contenida en la sucesión U_1, U_2, U_3, ..., y por consiguiente, tiene el mismo límite (§ 20-3).

NOTAS: 4. No subsiste, en cambio, la propiedad *disociativa*, es decir: no se pueden descomponer arbitrariamente los términos en sumas de varios, pues de que la sucesión [22-12] tenga un límite finito o infinito, no se puede deducir que lo tenga la sucesión total.

5. Ni la propiedad asociativa ni la disociativa subsisten para las series oscilantes.

EJEMPLOS: 12. De la serie convergente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1, \text{ o sea:} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{7}{8}\right) + \ldots$$

se deduce por disociación:

$$1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{7}{8} + \ldots$$

que es oscilante.

13. De la serie oscilante

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

obtenemos, por asociación, las series convergentes:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0; \quad 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1.$$

Si se multiplican por un mismo número k todos los términos de una serie convergente, su suma queda multiplicada por k. Si la primera serie es divergente, y $k \neq 0$, la nueva serie es también divergente. (Propiedad distributiva.)

En efecto, dadas las series

[22-13] $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

[22-14] $$k\,u_1 + k\,u_2 + k\,u_3 + \ldots,$$

se tiene $U'_n = k\,U_n$. Si [22-13] es convergente, $\lim U_n = U$; luego, $\lim U'_n = k\,U$, es decir, también es convergente [22-14], y su suma es $k\,U$. Si [22-13] es divergente, $U_n \to \infty$ y $k \neq 0$, también $U'_n \to \infty$; luego, [22-14] es divergente.

f) Si agregamos a una serie h nuevos términos, y es A la suma de éstos, la suma U_{n+h} en la nueva serie, tomando n bastante grande para que en ella entren todos los nuevos términos, difiere en A de la correspondiente suma U_n en la primera serie, es decir:

$$U'_{n+h} = A + U_n, \text{ y por lo tanto, } \lim U'_{n+h} = A + \lim U_n.$$

Si se intercalan (suprimen) en una serie un número finito de términos cuya suma es A, *la nueva serie tiene el mismo carácter que la primera; y si ésta era convergente, de suma* U, *la segunda tiene por suma* $U + A$ *o* $U - A$, *respectivamente.*

g) *Criterio general de convergencia. Límites de oscilación.* Según § 20-6, *a* y § 21-6, *c*, la condición necesaria y suficiente para que la sucesión [22-3] sea convergente, es que fijado un número cualquiera ε exista un valor $n = \nu$ tal que para todos los valores mayores que él se verifique $| U_n - U_{n+p} | < \varepsilon$. Y observando que la diferencia entre estas sumas parciales es la suma de los términos de la serie, desde u_{n+1} hasta u_{n+p}, resulta:

La condición necesaria y suficiente para que una serie sea convergente, es que para cada número positivo ε *corresponda un valor* $n = \nu$ *tal que la suma de cualquier número de términos consecutivos, posteriores al* u_ν, *sea en valor absoluto menor que* ε.

Es decir, la serie es convergente cuando, y sólo cuando,

[22-15]
$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} | < \varepsilon, \; n > \nu, \; p \text{ natural cualquiera.}$$

En particular, si conservamos fijo n y hacemos crecer p infinitamente, supuesta la serie dada convergente, según (*f*) y § 21-6, *a* podremos tomar límites en la desigualdad anterior, y aplicando § 20-2, *a*, cor., será:

[22-16] $$| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots | \leqq \varepsilon.$$

Es decir: dada una serie convergente, la serie obtenida prescindiendo de los n primeros términos (serie llamada *resto* de la serie dada) ha de tener una suma cuyo valor absoluto sea inferior a ε, desde $n = \nu$ en adelante.

Obsérvese que la forma en que está escrito el primer miem-

bro de [22-16] presupone la convergencia de la serie resto, y por lo tanto (*f*), la de la serie dada. Designando por R_n la serie resto, el teorema (*f*) nos permitirá escribir, en caso de ser la serie convergente:

[22-17] $$U = U_n + R_n.$$

En las aplicaciones de las series tiene mucha importancia establecer la *acotación del resto* dada por [22-16], ya que entonces sabremos el grado de aproximación alcanzado por las sumas parciales respecto de la suma de la serie dada, cuyo valor exacto es desconocido en general, aun cuando pueda asegurarse su existencia.

Si la serie es de términos *reales*, podemos afirmar *siempre* que la sucesión indefinida [22-3] tiene un límite superior y un límite inferior de oscilación finitos o infinitos. Así, por ejemplo, en la serie

$$1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{7}{8} + \ldots + 1 - \frac{2^n - 1}{2^n} + \ldots$$

tenemos:

$$U_{2n} = 1 - \frac{1}{2^n} \qquad U_{2n+1} = 2 - \frac{1}{2^n};$$

luego, las sumas de orden impar convergen hacia 2, y las de orden par hacia 1. La serie tiene, pues, 1 y 2 como límites inferior y superior de oscilación. A veces éstos reciben el nombre de *suma inferior* y *suma superior* de la serie dada.

h) La serie [22-2] se llama *absolutamente convergente* si es convergente la serie

[22-18] $$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots,$$

formada por los valores absolutos de sus términos.

Por ser:

$$|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \leqq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|,$$

la condición [22-15] nos asegura que *una serie absolutamente convergente es convergente*, pero el recíproco puede no ser cierto (§ 22-4, *a*).

2. Series de términos positivos: criterios de convergencia. — *a*) *Propiedades fundamentales.* — Son las series de términos positivos las más importantes, porque al estudio de ellas se reduce el de las demás; y son las más sencillas, porque formando una sucesión creciente las sumas parciales:

[22-19] $$U_1 < U_2 < U_3 < \ldots U_n < \ldots,$$

tiene U_n límite finito o infinito (§ 20-4), es decir:

Toda serie de términos positivos es convergente o divergente, pero nunca oscilante.

Por la misma razón, *la condición necesaria y suficiente para que una serie de términos positivos sea convergente, es que las sumas parciales* U_n *se conserven acotadas,* $U_n < K$ *independiente de* n, *y entonces la suma* U *es no mayor que dicha cota* K, es decir: $U \leqq K$.

También las series de términos positivos son más fácilmente manejables, pues para ellas subsisten muchas propiedades de la suma, no válidas para series de términos cualesquiera (ver § 22-4).

Hemos demostrado (§ 22-1, *e*) que si en la serie

[22-20] $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_i + \ldots + u_j + \ldots + u_k + \ldots,$

se asocian arbitrariamente los términos consecutivos:

[22-21] $(u_1 + \ldots + u_i) + (u_{i+1} + \ldots + u_j) + (u_{j+1} + \ldots + u_k) + \ldots$

esta serie tiene el mismo carácter que la [22-20], y si [22-20] es convergente, tiene [22-21] su misma suma. Es cierta, asimismo, la recíproca, es decir, si [22-21] es convergente, también lo es [22-20], pues si ésta fuese divergente, lo sería [22-21] por la propiedad asociativa. Análogamente, si [22-21] es divergente, también lo es [22-20]. Por consiguiente:

Asociando términos consecutivos de una serie de términos positivos, *un número finito o infinito de veces, o descomponiendo arbitrariamente cada uno en varios sumandos* positivos, *no se altera el carácter de la serie, ni varía su suma.* (Propiedades asociativa y disociativa). (Cfr. § 22-1, notas 3 y 4).

DEF.: Diremos que en una serie *se han reordenado sus términos*, o que dos series:

[22-22] $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

[22-23] $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$

tienen los mismos términos en orden distinto, cuando a cada término de cada serie se le asigna el puesto que debe ocupar en la otra.

Si [22-22] es convergente y es U su suma, desde un valor $n = \nu$ en adelante es $U - U_n < \varepsilon$. Tomando $m \geqq \mu$ bastante grande para que en V_m figuren todos los ν términos de U_ν, será $V_m \geqq U_\nu$. Por otra parte, todos los términos de V_m están contenidos en una suma parcial de [22-22], y por lo tanto, es $V_m < U$. De estas desigualdades resulta:

$$-\varepsilon < U - V_m < U - U_\nu < \varepsilon, \quad \text{de donde: } \lim_{m \to \infty} V_m = U.$$

Si [22-22] es divergente, también [22-23], pues si fuese convergente, lo sería [22-22], como acabamos de demostrar. En resumen:

Reordenando arbitrariamente los términos de una serie que los tiene todos positivos, *no se altera su carácter ni varía su suma.* (Propiedad conmutativa.)

EJEMPLO 1. Las series

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^5} + \frac{3}{2^7} + \cdots$$

tienen la misma suma que la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots=2.$$

pues la primera resulta de alterar el orden de los términos de ésta, y la segunda, de haber asociado cada dos consecutivos.

b) *Comparación de dos series de términos positivos.* — b_1) Hay series especiales cuyo carácter se determina fácilmente; conviene por esto saber deducir del carácter de una serie el de otras más complicadas.

Una serie cuyos términos son menores o iguales (mayores o iguales) que los correspondientes de otra serie, la cual es convergente (divergente), es también convergente (divergente).

Si las series

[22-24] $$u_1+u_2+u_3+\ldots$$
[22-25] $$v_1+v_2+v_3+\ldots$$

están relacionadas por las condiciones $u_n \leqq v_n$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$, se verifica también: $U_n \leqq V_n$.

Si [22-25] es convergente, V_n se conserva acotado; luego, también U_n, y por lo tanto, tiene límite finito, es decir: [22-25] es también convergente.

Si [22-24] es divergente, es decir, si U_n excede a todo número A desde un valor de n en adelante, también $V_n \geqq U_n$, luego [22-25] es divergente.

Si se conserva $u_n \leqq v_n$, suele llamarse a $\Sigma\, v_n$ serie *mayorante de* $\Sigma\, u_n$, y a ésta, *minorante* de $\Sigma\, v_n$.

Este *criterio de comparación* se llama *de primera especie* porque en cada desigualdad $u_n \leqq v_n$ figura *un* término de cada serie.

EJEMPLO 2. La serie

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots$$

es divergente, cualquiera sea el número x (no siendo un entero negativo). En efecto, desde un cierto término, todos son positivos, y eligiendo un número natural $p > x$, la serie dada tiene sus términos superiores a los de la serie armónica:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\cdots$$

Corolario inmediato del criterio anterior es:

Si la serie $\Sigma\, v_n$ es c o n v e r g e n t e *(divergente) y la razón u_n/v_n se conserva inferior (superior) a un número positivo λ, la serie $\Sigma\, u_n$ es también convergente (divergente).*

En efecto, la serie Σv_n es convergente con la $\Sigma\lambda v_n$ (§ 22-1, *e*), y basta aplicar el criterio anterior.

Se llama *criterio de comparación de segunda especie* al siguiente:

Una serie Σu_n, de términos positivos tales que la razón de cada uno al anterior u_{n+1}/u_n se conserva menor o igual (mayor o igual) que la correspondiente razón v_{n+1}/v_n de una serie Σv_n de términos positivos convergente (divergente), es también convergente (divergente).

En efecto, desde un cierto valor de $n = \nu$ en adelante será:

$$u_{\nu+p} \leqq \frac{u_\nu}{v_\nu} v_{\nu+p}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$$

es decir, $u_n \leqq \lambda v_n$ para $n > \nu$ con $\lambda = u_\nu / v_\nu$, y se aplica el corolario del criterio de comparación de primera especie entre Σu_n y $\Sigma(\lambda v_n)$, teniendo ésta el mismo carácter que Σv_n (§ 22-1, c).

b_2) Las series más importantes que se toman como patrón de comparación son las geométricas (§ 22-1, b) y la armónica (§ 22-1, d). Más en general, suele llamarse *armónica* a toda serie del tipo

[22-26] $$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots,$$

PRIMER CASO: $\alpha \leqq 1$. Entonces, siendo $\frac{1}{n^\alpha} \geqq \frac{1}{n}$, es [22-26] divergente.

SEGUNDO CASO: $\alpha > 1$. La serie [22-26] es convergente.

En efecto, la serie [22-26] tiene entonces sus términos inferiores a los de ésta:

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \ldots,$$

obtenida de la [22-26] sustituyendo los términos que están entre $1/(2^\nu)^\alpha$ y $1/(2^{\nu+1})^\alpha$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, por el valor mayor $1/(2^\nu)^\alpha$. La serie obtenida es convergente, pues asociando los $2^{\nu+1} - 2^\nu = 2^\nu$ términos de igual denominador $(2^\nu)^\alpha$ resulta:

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \ldots,$$

serie geométrica convergente, por ser su razón $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, ya que es $\alpha - 1 > 0$. Por lo tanto, [22-26] es convergente.

Resumen:

La serie armónica [22-26] *es divergente o convergente, según sea el exponente $\alpha \leqq 1$, ó bien $\alpha > 1$.* El valor de la suma [22-26] se designa por $\zeta(\alpha)$.

De la comparación con la serie armónica generalizada resulta el siguiente criterio de convergencia, de muy fácil y útil aplicación, que suele olvidarse en muchos textos, a pesar de su analogía con el criterio frecuentemente empleado para investigar la convergencia de una integral generalizada:

Si puede determinarse un exponente α mayor que uno, tal que $n^\alpha u_n$ se conserve acotado:

[22-27] $n^\alpha u_n < K$ *independiente de n*, $\alpha > 1$,

entonces la serie Σu_n de términos positivos es convergente.

En cambio, *si desde un valor de n en adelante se conserva $n \,.\, u_n$ mayor que un número positivo h, es decir*:

[22-28] $$n \,.\, u_n > h > 0 \quad para \quad n > \nu,$$

entonces la serie $\Sigma\, u_n$ de términos positivos es divergente.

Porque basta comparar, respectivamente, $\Sigma\, u_n$ con las series armónicas $K\, \Sigma\, (1/n^{\alpha})$ y $h\, \Sigma\, (1/n)$.

Obsérvese que por [22-28] hemos demostrado ser necesario (aunque no suficiente, ver el siguiente ej. 4) para la convergencia de la serie $\Sigma\, u_n$, de términos *positivos*, que

[22-29] $$\lim \inf n\, u_n = 0,$$

mientras que no es necesario ni suficiente para dicha convergencia que $n . u_n$ tenga límite cero (ver ejemplos siguientes). Claro está que si $\Sigma\, u_n$ de términos positivos es convergente, y el límite de $n\, u_n$ existe, entonces ha de ser nulo, al cumplirse [22-29].

EJEMPLOS: 3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{\sqrt{n^3 - n + 1}}$ converge, pues sus términos son del orden $1/3 - 3/2 = - 7/6$, es decir, tomando $\alpha = 7/6 > 1$, es:

$$\lim n^{7/6} u_n = \lim \frac{n^{9/6}}{n^{3/2}(1 - n^{-2} + n^{-3})^{1/2}} = 1,$$

y por lo tanto, $n^{7/6} u_n$ se conserva acotado.

4. Multipliquemos los términos de la serie armónica [22-11] situados entre los lugares $2^r + 1$ y 2^{r+1} inclusive, por $1/(r + 1)$, $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, para obtener la serie

[22-30] $$1 + 1 . \frac{1}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{3} + \frac{1}{2} . \frac{1}{4} + \frac{1}{3} . \frac{1}{5} + \frac{1}{3} . \frac{1}{6} + \frac{1}{3} . \frac{1}{7} + \frac{1}{3} . \frac{1}{8} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{r} \frac{1}{2^{r-1} + 1} + \frac{1}{r} \frac{1}{2^{r-1} + 2} + \ldots + \frac{1}{r} \frac{1}{2^r} + \ldots,$$

la que por método análogo al visto en § 22-1, *d*), es mayorante de la serie

$$1 + 1 . \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{r} + \ldots\right),$$

que es divergente. Así, pues, la serie [22-30] es divergente, y sin embargo se cumple [22-29], pues $\lim n \,.\, u_n = 0$.

Por otra parte, las series armónicas generalizadas convergentes (exponente $\alpha > 1$) tienen $\lim n \,.\, u_n = \lim. 1/n^{\alpha - 1} = 0$.

5. Si en los lugares 2^m, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, de una serie convergente de términos positivos, intercalamos los nuevos términos $1/2^m$, resulta una nueva serie, también convergente, cuya suma es la de la anterior aumentada en 1. Para dicha nueva serie, $n \,.\, u_n$ no tiende a cero, pues en los lugares 2^m vale 1; como ha de verificarse [22-29], la sucesión $n \,.\, u_n$ será oscilante.

6. Cualquiera sea $a > 0$, es divergente la serie

$$\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x + 2a} + \ldots + \frac{1}{x + na} + \ldots$$

de denominadores no nulos, pues aunque x sea negativo ($\neq -na$), desde un valor de n en adelante tiene todos los términos positivos, y además:

$$\lim \frac{n}{x+na} = \frac{1}{a} > 0.$$

b_3) El criterio de comparación de primera especie sirve también para *acotar el resto de una serie*, problema muy importante en conexión con el cálculo aproximado de su suma U mediante una suma parcial (§ 22-1, *g*).

EJEMPLO 7. La serie:

[22-31] $$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \ldots$$

es convergente, pues sus términos son respectivamente menores o iguales que los de la serie

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} + \ldots,$$

que a su vez converge, por ser geométrica de razón $\frac{1}{2}$.

En efecto:

$$(n-1)! = 1.2.\ldots(n-1) > 1.2.2.\ldots 2 = 2^{n-2}\quad.$$

En dicha serie [22-31] el término n-ésimo es:

$$u_n = \frac{1}{(n-1)!},$$

y el resto de orden n se acota así:

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n!(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!\,(n-1)}.$$

c) *Criterios clásicos de convergencia.* — c_1) La aplicación de los criterios de comparación de primera y segunda especie a las series geométricas da lugar a los dos criterios siguientes:

Criterio de CAUCHY (1821): *Si desde un valor de n en adelante se conserva* $\sqrt[n]{u_n}$ *inferior a un número positivo* $k < 1$, *la serie de términos positivos es convergente. Si para infinitos valores de n es* $\sqrt[n]{u_n} \geqq 1$, *la serie es divergente.*

En efecto, si es $\sqrt[n]{u_n} < k$, es decir, $u_n < k^n$, basta aplicar el criterio de comparación de primera especie a la serie geométrica convergente $\Sigma\, k^n$ de razón menor que 1 (§ 22-1, *b*).

En el segundo caso existen infinitos términos $u_n \geqq 1$ (§ 8-5, *a*), y por lo tanto, la serie es divergente, pues su término general no tiende a cero (§ 22-1, *d*).

Criterio de D'ALEMBERT (1768): *Si desde un valor de* n *en adelante, la razón* u_n/u_{n-1} *de un término al anterior se conserva menor que un número* $k < 1$, *la serie de términos positivos es convergente. Si desde un valor de* n *en adelante es* $u_n/u_{n-1} \geqq 1$, *la serie es divergente.*

En efecto, la condición $u_n/u_{n-1} < k$ equivale a $u_n/u_{n-1} < k^n/k^{n-1}$, y basta aplicar el criterio de comparación de segunda especie entre Σu_n y la serie geométrica convergente Σk^n de razón menor que 1 (§ 22-1, *b*).

En el segundo caso, los términos no decrecen, y no tendiendo a cero, la serie diverge (§ 22-1, *d*).

NOTA 1. Las condiciones $\sqrt[n]{u_n} < 1$ ó $u_n/u_{n-1} < 1$ no implican que exista un número *fijo* $k < 1$, tal que sea para *todo* n: $\sqrt[n]{u_n} < k$, $u_n/u_{n-1} < k$ y no permiten ninguna conclusión sobre el carácter de la serie (ver ejemplo 14).

EJEMPLOS: 8. Es convergente la serie

$$\frac{1}{3} + \frac{2^1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2^3}{3^6} + \cdots$$

pues $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3}$ si es n impar, y $\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ si es n par, y tanto $1/3$ como $\sqrt{2}/3$ son inferiores a 1.

9. Es convergente esta serie, formada por los recíprocos de los términos de la sucesión de FIBONACCI ($a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$; $a_{-1} = 0$, $a_0 = 1$):

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} + \ldots,$$

pues siendo:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_n + a_{n-1}},$$

esta fracción está comprendida (§ 6-8) entre las dos fracciones anteriores:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{y} \quad \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}};$$

y como los dos primeros valores son: $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, la fracción $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ está siempre comprendida entre ambos, siendo por lo tanto, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{2}{3} < 1$.

c_2) En los casos sencillos que con más frecuencia se presentan, tienen límite $\sqrt[n]{u_n}$ y u_n/u_{n-1}. Cuando uno de estos límites λ puede hallarse, caben tres casos:

1º Si es $\lambda < 1$ y k es cualquier número comprendido entre λ y 1, es decir: $\lambda < k < 1$, desde un valor de n en adelante (§ 20-2) se conserva $\sqrt[n]{u_n}$ (o bien, u_n/u_{n-1}) inferior a $k < 1$, y por lo tanto, la serie es convergente.

2º Si es $\lambda > 1$, desde un valor de n se conserva $\sqrt[n]{u_n}$ (o bien u_n/u_{n-1}) superior a 1, y por lo tanto, la serie es divergente.

3º Si es $\lambda = 1$, en general nada puede asegurarse; pero si dicha raíz o cociente se conserva constantemente superior o igual a 1, la serie es también divergente.

Puede suceder que $\sqrt[n]{u_n}$ tenga límite, sin tenerlo u_n/u_{n-1}; por el contrario, si este cociente tiene límite, también tiene el mismo límite $\sqrt[n]{u_n}$, en virtud de nota I. El criterio de la raíz parece, pues, preferible al del cociente, pero este último suele ser de aplicación más cómoda.

En su aplicación a las series de potencias (§ 43), es útil poner el criterio de CAUCHY en la siguiente forma:

La serie Σu_n de términos positivos es convergente (divergente) si el límite superior de $\sqrt[n]{u_n}$ es menor (mayor) que 1.

El caso dudoso corresponde a lim sup $\sqrt[n]{u_n} = 1$.

NOTA 2. Obsérvese que en el criterio de D'ALEMBERT, no bastará que lim sup $u_n/u_{n-1} > 1$ para asegurar la divergencia de la serie; para que ésto ocurra, es en cambio suficiente (no necesario) que lim inf $u_n/u_{n-1} > 1$, y para que la serie sea convergente, es suficiente (no necesario) que lim sup $u_n/u_{n-1} < 1$.

EJEMPLOS: 10. $$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

es convergente, cualquiera sea el número positivo x, pues:

$$\frac{x_n}{n!} : \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x}{n} \to 0.$$

11. $$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots + (2n+1)x^n + \dots$$

Se tiene

$$\frac{(2n+1)x^n}{(2n-1)x^{n-1}} = \frac{2n+1}{2n-1} x \to x; \text{ luego,}$$

Si es $x < 1$, la serie es convergente;

Si es $x > 1$, la serie es divergente;

Si es $x = 1$, la serie es divergente, por conservarse el cociente superior a 1.

12. $$\frac{1}{2}+\frac{2!}{3^2}+\frac{3!}{4^3}+\dots+\frac{n!}{(n+1)^n}+\dots:$$

$$\frac{n!}{(n+1)^n}:\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{e}<1.$$

(Convergente).

13. $$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{3^6}+\dots+$$

$$+\frac{1}{(2m)^{2m}}+\frac{1}{m^{2m}}+\dots$$

según sea $n = 2m - 1$ impar, ó $n = 2m$ par, tendremos :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}=(n+1)^{-(1+1/n)}\to 0,\quad \sqrt[2m]{\frac{1}{m^{2m}}}=\frac{1}{m}\to 0;$$

luego, la serie es convergente.

El criterio del cociente no es aquí aplicable, pues no sólo carece de límite la razón u_n/u_{n-1}, sino que toma valores tan grandes como se quiera, sin que por ello se conserve siempre mayor que 1.

14. Si aplicamos los criterios de la raíz y del cociente a la serie armónica generalizada [22-26], tendremos ejemplos del caso dudoso, pues es (nota 1):

$$\lim\frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}}=\lim\frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha}=1,$$

y ya sabemos que la serie puede ser convergente o divergente según el valor del exponente α.

c_8) Cuando los criterios anteriores no son aplicables, por ser igual a 1 el límite de $\sqrt[n]{u_n}$, o el de u_n/u_{n-1}, se acude a otros criterios, resultado de la comparación con otras series típicas.

El más importante de ellos es el siguiente:

Criterio de RAABE (1832) : *Si desde un valor de n en adelante la expresión $n\,(1-\frac{u_n}{u_{n-1}})$ se conserva superior a un número fijo, $1+\varepsilon>1$, la serie $\Sigma\,u_n$ de términos positivos es convergente. Si dicha expresión se conserva inferior o igual a* 1, *la serie es divergente.*

En efecto, de la hipótesis $n\left(1-\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)>1+\varepsilon>1$ se deduce:

$$(n-1)\,u_{n-1}-n\,.\,u_n>\varepsilon\,u_{n-1}.$$

Prescindiendo, si es preciso, de un número finito de primeros térmi-

nos (§ 22-1, *f*), podemos suponer que esta desigualdad se verifica desde el primero; dando a n los valores 2, 3, ..., m, resulta:

$$u_1 - 2u_2 > \varepsilon . u_1 \quad ,$$
$$2u_2 - 3u_3 > \varepsilon u_2 \quad ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(m-1)u_{m-1} - mu_m > \varepsilon u_{m-1} \quad ;$$

y sumando queda:

$$u_1 - mu_m > \varepsilon U_{m-1} \quad ,$$

de donde:

$$U_{m-1} < \frac{u_1 - mu_m}{\varepsilon} < \frac{u_1}{\varepsilon},$$

es decir, las sumas parciales de la serie dada se conservan acotadas, y por lo tanto, la serie es convergente, con suma no superior a u_1/ε.

En el segundo caso, de $n\left(1 - \frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \leqq 1$ se deduce:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \geqq \frac{n-1}{n} = \frac{1/n}{1/(n-1)} \quad ,$$

que demuestra, por el criterio de comparación de segunda especie respecto de la serie armónica [22-11], que la serie $\sum u_n$ es divergente.

En los casos en que exista $\lim n\left(1 - \frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \lambda$, si es $\lambda > 1$, la serie es convergente; si es $\lambda < 1$, la serie es divergente. Si el límite es 1, nada puede asegurarse en general; pero si tiende al límite 1 conservándose *inferior* a él, la serie es *divergente*.

Es natural que aquí las desigualdades que dan la convergencia (divergencia) sean de opuesto sentido a las del criterio de D'ALEMBERT, porque el decrecimiento lento de $1 - (u_n/u_{n-1})$ (o sea el crecimiento lento hacia 1 de u_n/u_{n-1}) es indicación favorable de convergencia.

NOTA 3. También la primera parte puede demostrarse aplicando el criterio de comparación de segunda especie, pero ahora a la serie armónica generalizada de exponente $1+\varepsilon$, pues para probar que

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{1/n^{1+\varepsilon}}{1/(n-1)^{1+\varepsilon}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon},$$

de la hipótesis

$$n\left(1 - \frac{u_n}{u_{n-1}}\right) > 1+\varepsilon, \text{ es decir: } \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} < 1 - \frac{1+\varepsilon}{n},$$

bastará probar que

$$1 - \frac{1+\varepsilon}{n} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}.$$

Siempre podemos suponer $1+\varepsilon = p/q$ racional, y tomando $0 < (1-1/n)^{1/q} = b < 1$, es decir, $1/n = 1 - b^q$, para probar la anterior desigualdad habrá que demostrar que es: $(1-b^p)/p < (1-b^q)/q$ para $0 < b < 1$ y $p > q$ números naturales. Esto quedará demostrado por recurrencia, si para todo m natural probamos que $(1-b^{m+1})/(m+1) < (1-b^m)/m$, $(0 < b < 1)$, lo que se deduce de la desigualdad evidente $m . b^m < b^{m-1} + b^{m-2} + \dots + 1$, al multiplicar ambos miembros por $1-b$ y sumar luego $m(1-b^m)$.

EJEMPLOS: 15. En la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}+\ldots$$

es:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{2n-1}{2n}\to 1. \qquad \text{(Caso dudoso)}.$$

Aplicando el criterio de RAABE, tenemos:

$$n\left(1-\frac{2n-1}{2n}\right)=n\,.\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}<1. \qquad \text{(Divergente)}.$$

16. Sea la serie

$$\frac{1}{x}+\frac{1.2}{x(x+1)}+\frac{1.2.3}{x(x+1)\,(x+2)}+\ldots+\frac{1.2\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}+\ldots,$$

siendo x un número positivo cualquiera.

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{n}{x+n-1}\to 1. \qquad \text{(Caso dudoso)}.$$

$$n\left(1-\frac{n}{x+n-1}\right)=n\,\frac{x-1}{x+n-1}\to x-1.$$

Si es $x>2$, la serie es convergente.

Si es $x<2$, la serie es divergente.

Si es $x=2$, la serie es divergente, pues aunque el límite es 1, se conserva siempre menor que 1 la expresión de RAABE.

17. Análogamente, o bien por comparación con la serie armónica, resulta la divergencia de las series:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots;\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\ldots$$

3. **Series alternadas.** — *a*) Una serie se llama *alternada* si sus términos son alternativamente positivos y negativos. Se la puede escribir así:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+u_{2h-1}-u_{2h}+\ldots$$

indicando ahora con u_n no el término n-ésimo, sino el módulo o valor absoluto del mismo.

Criterio de convergencia para series alternadas (LEIBNIZ, 1704). *Si una serie alternada cumple la condición*

[22-32] $$u_1>u_2>u_3>\ldots>u_n>\ldots,$$

es decir, si los módulos de los términos son decrecientes, la condición

[22-33] $$\lim_{n\to\infty} u_n=0$$

es necesaria y suficiente para la convergencia (cfr. § 22-1, *d*).

En efecto, cada segmento u_n (transportado de acuerdo con

su signo sobre el eje de la figura 37) está contenido en el anterior, en virtud de [22-32]. Las sumas parciales de índice par (impar) forman una sucesión no-decreciente (no-creciente). Ambas sucesiones son contiguas por [22-33], y definen entonces un número S tal que $\lim S_n = S$.

En el caso de aplicación del criterio anterior, la figura nos

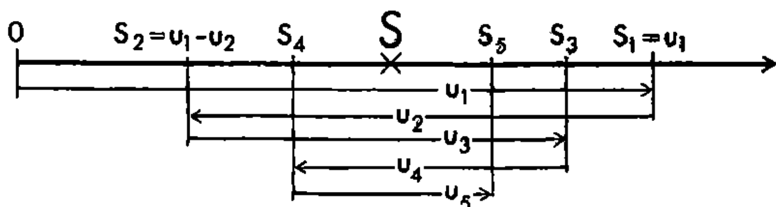


Fig. 37.

muestra que *el resto* $S - S_n$ *es en valor absoluto menor que el primer término despreciado*:

$$| S - S_n | < u_{n+1},$$

y del mismo signo que él.

Si una serie alternada de términos decrecientes no cumple la condición $\lim u_n = 0$, es oscilante, pues S_n no tiene límite finito ni infinito.

Si una serie alternada no tiene los términos constantemente decrecientes, puede ser divergente u oscilante, a pesar de cumplir la condición $\lim u_n = 0$.

EJEMPLOS: 1. Son convergentes las siguientes series:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots; \; 1 - \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 4}{4} + \ldots$$

Obsérvese que ninguna de las dos es absolutamente convergente (§ 22-1, *h*), pues basta aplicar a ambas el criterio [22-28].

2. Calcular la suma de la serie convergente:

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots,$$

por defecto y por exceso, con error menor que una cienmilésima:

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} = 0{,}63212\ldots$$

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = 0{,}63213\ldots$$

Solución: $0{,}63212 < U < 0{,}63213.$

3. Es divergente la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)} + \ldots,$$

cuyas sumas de orden par coinciden con las de una serie armónica.

4. Es oscilante la serie

$$\underbrace{1-\tfrac{1}{2}}_{1\ \text{par}}+\underbrace{\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}}_{2\ \text{pares}}+\underbrace{\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}}_{4\ \text{pares}}+\ldots,$$

pues tomando grupos completos de términos, resultan las sumas 0 y ½ indefinidamente.

b) *Constante de* EULER. — Una serie alternada muy notable es ésta:

$$1-\ln\frac{2}{1}+\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{m}-\ln\frac{m+1}{m}+\frac{1}{m+1}\ldots,$$

cuyos términos son constantemente decrecientes en valor absoluto, pues siendo (§ 8-8, c_1):

[22-34] $$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

resulta tomando logaritmos neperianos:

$$m\ln\frac{m+1}{m} < 1 < (m+1)\ln\frac{m+1}{m},$$

de donde:

$$\ln\frac{m+1}{m} < \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad \frac{1}{m+1} < \ln\frac{m+1}{m}.$$

Como además se verifica:

$$\lim\frac{1}{m} = 0, \qquad \lim\ln\frac{m+1}{m} = \ln 1 = 0,$$

la serie es convergente. Su suma es 0,5772156649... Este número notable (pero del que ni siquiera se sabe si es irracional), se presenta en muchas cuestiones de Análisis, y se llama *constante de* EULER o de MASCHERONI. Suele designarse por C o por γ.

La suma U_{2m-1} de los $2m-1$ primeros términos se expresa por medio de la suma H_m de los m primeros términos de la serie armónica, porque

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right)-\left(\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ldots+\ln\frac{m}{m-1}\right)=$$
$$= H_m - \ln m,$$

y como dicha suma parcial es mayor que la suma total C, y la diferencia, $\varepsilon_m = U_{2m-1} - C$, tiene por límite 0 para $m \to \infty$, resulta la siguiente igualdad notable:

[22-35] $$H_m = \ln m + C + \varepsilon_m, \qquad (\lim \varepsilon_m = 0),$$

que permite calcular cómodamente H_m con error $\varepsilon_m < 1/m$, tomando $\ln m + C$, y de la cual se deduce además:

[22-36] $$\frac{H_m}{\ln m} = 1 + \frac{C}{\ln m} + \frac{\varepsilon_m}{\ln m}; \quad \text{luego,} \quad \lim\frac{H_m}{\ln m} = 1.$$

c) *Ejemplos de series sumables.* — La notable fórmula [22-35] permite sumar multitud de series que se presentan en el cálculo con frecuencia. Comenzaremos estudiando las dos series:

[22-37] $$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2m-1}+\ldots$$

[22-38] $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{2m}+\dots$$

Las sumas A_m y B_m de los m primeros términos de cada una están ligadas por la relación $A_m + B_m = H_{2m}$, por lo tanto, es:

[22-39] $$B_m = \frac{1}{2}H_m,\ A_m = H_{2m} - \frac{1}{2}H_m.$$

Toda serie cuyas sumas parciales se compongan de éstas, se podrá sumar. El ejemplo más importante es la serie alternada convergente:

[22-40] $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}+\dots,$$

cuya suma $2m$-ésima es, teniendo en cuenta [22-39] y [22-35],

$$L_{2m} = A_m - B_m = H_{2m} - H_m = (\ln 2m + C + \varepsilon_{2m}) - (\ln m + C + \varepsilon_m) =$$
$$= \ln 2 + \varepsilon_{2m} - \varepsilon_m \to \ln 2.$$

La suma de la serie [22-40] es, por lo tanto, $\ln 2 = 0{,}69374718\dots$

Ejercicios: 1. Si con los mismos términos de la serie [22-40] formamos la serie

[22-41] $$-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots,$$

en la cual ocupan las fracciones de denominador par los puestos cuyos números de orden son cuadrados perfectos, demuéstrese, por el mismo método anterior, que la nueva serie [22-41] es *divergente*.

2. Si con los mismos términos de la serie [22-40] formamos la serie

[22-42] $$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{1}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{3}\dots,$$

en la que las fracciones de denominador impar ocupan los puestos cuyo número de orden es múltiplo de 5, demuéstrese por el mismo método anterior, que ahora la suma de la serie [22-42] es cero.

4. Series de términos positivos y negativos. — *a*) Vimos (§ 22-1, *h*) que la serie

[22-43] $$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

converge toda vez que converge la serie

[22-44] $$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots,$$

es decir: *toda serie absolutamente convergente es convergente.*

La recíproca no es cierta, como lo muestra la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots+\frac{(-1)^n}{n}+\dots,$$

que es convergente por el criterio de series alternadas (§ 22-3, *a*); pero no es absolutamente convergente, pues la serie de los módulos es la serie armónica [22-11], que es divergente, como vimos (§ 22-1, *d*).

Cuando la convergencia es absoluta, pueden efectuarse so-

bre la serie operaciones que no son legítimas en caso contrario, como veremos en este apartado, y también en el § 22-6.

b) *Reordenación de términos.* — La propiedad conmutativa de la suma: $u_1 + u_2 = u_2 + u_1$, no vale en general para series. No se puede alterar el orden de los términos de una serie sin peligro de modificar su carácter o su suma, salvo cuando aquélla es absolutamente convergente, como lo muestran los dos teoremas siguientes:

b_1) TEOR.: *Reordenando arbitrariamente los términos de una serie absolutamente convergente* [22-43], *no se modifica su carácter ni su suma.*

El teorema es cierto si la serie [22-43] tiene todos sus términos positivos (§ 22-2, *a*), y en consecuencia, también cuando hay sólo un número finito de términos negativos o un número finito de términos positivos, por lo cual nos bastará limitarnos al caso en que hay infinitos términos con cada signo.

De la convergencia absoluta de [22-43] sigue la convergencia de las series de términos positivos:

[22-45] $$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots; \quad b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots,$$

formadas, respectivamente, con los términos *positivos* de la serie [22-43] y con los valores absolutos de todos los términos *negativos* en su mismo orden.

La suma parcial U_n, de [22-43], contiene n' y n'' términos de las series [22-45], de modo que llamando $A_{n'}$ y $B_{n''}$ a las sumas parciales que ellos forman, se tiene:

$$U_n = A_{n'} - B_{n''}.$$

Al crecer n, crecen n' y n''; y llegan a ser n' y n'' mayores que cualquier número H, pues basta tomar n bastante grande para que en U_n figuren más de H términos positivos y más de H negativos. Luego, para $n \to \infty$ se verifica también $n' \to \infty$ y $n'' \to \infty$. Resulta, entonces, llamando A y B a las sumas de las series [22-45],

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n' \to \infty} A_{n'} - \lim_{n'' \to \infty} B_{n''} = A - B,$$

es decir, la serie [22-43] es convergente con suma A — B.

Cualquier reordenación de los términos de [22-43] equivale a reordenar los términos en las series de términos positivos [22-45], y como esto no hace variar (§ 22-2, *a*) las sumas respectivas A y B, la suma de la nueva serie vale, como antes, A — B.

b_2) TEOR. DE RIEMANN. *Si la serie* [22-43] *es convergente, pero no absolutamente convergente, reordenando convenientemente sus términos se obtiene una serie convergente con suma prefijada, o una serie divergente, o una serie oscilante.*

En este caso, las dos series [22-45] son divergentes, pues si lo fuera una sola (ninguna), divergería (convergería absolutamente) la serie

[22-43], contra la hipótesis. Por otra parte, como por la convergencia de [22-43] es $\lim u_n = 0$, resulta $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Mostremos ahora cómo reordenando convenientemente los términos de la serie [22-43], puede conseguirse que su suma sea un número *prefijado* S.

Puesto que la primera serie [22-45] es divergente, la suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ llega a exceder a cualquier número, sea p el número estrictamente necesario de términos para formar una suma mayor que S, y se tendrá (fig. 38):

[22-46] $$U_1 < U_2 < U_3 < \ldots < U_{p-1} \leqq S < U_p.$$

Restando de $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$ términos sucesivos suficientes, b_1, b_2, ..., b_q, llegaremos (puesto que $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ llega a exceder a cualquier número) a una suma menor que S; de modo que:

[22-47] $$U_p > U_{p+1} > U_{p+2} > \ldots > U_{p+q-1} \geqq S > U_{p+q}.$$

Agregando a U_{p+q} términos sucesivos, a_{p+1}, a_{p+2}, ..., en número suficiente, llegaremos a exceder a S, después de pasar por las sumas sucesivas:

[22-48] $$U_{p+q} < U_{p+q+1} < U_{p+q+2} < \ldots < U_{p+q+p'-1} \leqq S < U_{p+q+p'}.$$

Restaremos ahora términos sucesivos b_{q+1}, b_{q+2}, ..., hasta lograr:

[22-49] $$U_{p+q+p'} > U_{p+q+p'+1} > \ldots > U_{p+q+p'+q'-1} \geqq S > U_{p+q+p'+q'} \quad ,$$

y así podemos seguir indefinidamente.

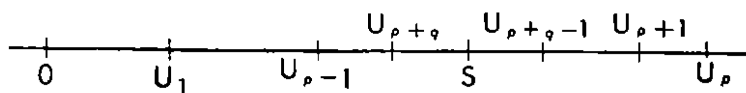


Fig. 38.

En el intervalo (U_{p-1}, U_p), cuya amplitud es a_p, está contenido S, y entre S y U_p están U_{p+1}, U_{p+2}, ..., U_{p+q-1}; luego, todas estas sumas difieren de S en menos de a_p. Análogamente, en el intervalo (U_{p+q}, U_{p+q-1}) está S, y entre U_{p+q} y S están U_{p+q-1}, U_{p+q+2}, ..., $U_{p+q+p'-1}$; luego, estas sumas difieren de S en menos de b_q; etc. Como $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$, resulta que desde un valor de n en adelante difiere U_n de S en menos de ε; y por lo tanto, $\lim S_n = S$.

Si se quiere obtener una serie divergente de límite $+\infty$, tomaremos términos suficientes para que sea $a_1 + a_2 + \ldots + a_p > b_1 + 1$; restaremos después b_1; sumamos ahora términos suficientes, para que su suma sea $a_{p+1} + \ldots + a_{p+q} > b_2 + 1$; restamos después b_2; etc. Así obtenemos la serie:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p - b_1 + a_{p+1} + \ldots + a_{p+q} - b_2 + \ldots,$$

en la cual se verifica:

$$S_{p+1} > 1 \quad , \; S_{p+q+2} > 2 \quad , \; S_{p+q+r+3} > 3 \quad , \quad ,$$

De modo análogo se obtiene una serie divergente de límite $-\infty$.

Si se desea obtener una serie de oscilante, con límites de oscilación prefijados s y S, la marcha es análoga a la seguida arriba, sumando y restando alternativamente términos bastantes para que las sumas sucesivas queden a la izquierda de s y a la derecha de S.

Puesto que la propiedad conmutativa vale para algunas series y no para otras, es oportuno dar la siguiente definición:

DEF.: Una serie se llama *incondicionalmente convergente,* si su suma no varía si se reordenan arbitrariamente sus términos; se llama *condicionalmente convergente,* si su suma varía o deja de existir para ciertas reordenaciones de sus términos.

Análogas definiciones valen para las series *condicionalmente* o *incondicionalmente divergentes.*

Para el caso de la *convergencia,* estos conceptos equivalen a los de convergencia *absoluta* y *no absoluta,* pues de los teoremas (b_1) y (b_2) resulta:

b_3) TEOR. de DIRICHLET: *Para que una serie sea incondicionalmente convergente, es necesario y suficiente que sea absolutamente convergente.*

En adelante clasificaremos la convergencia en *absoluta* y *condicional.*

EJEMPLOS: 1. La serie

[22-50] $$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots \pm \frac{1}{n^\alpha} \mp \ldots \quad (\alpha > 0)$$

es *absolutamente convergente* si $\alpha > 1$. Si es $0 < \alpha \leqq 1$, diverge la serie de valores absolutos, (§ 22-2, *b*), pero directamente se ve (§ 22-3, *a*) que [22-50] converge, y por lo tanto, es *condicionalmente convergente.* Si es $\alpha = 0$, la serie es oscilante.

2. La serie

[22-51] $$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

es *absolutamente convergente, cualquiera sea x,* positivo o negativo, pues siempre es convergente la serie de valores absolutos:

$$1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \ldots$$

La *divergencia incondicional* de [22-43] se presenta cuando una y sólo una de las series [22-45] es divergente. Según que lo sea la primera o la segunda, resulta $\lim U_n = +\infty$ ó $\lim U_n = -\infty$. Una reordenación cualquiera de los términos de las series [22-43] reordena los de las series [22-45], sin alterar el carácter de ellas; luego, la nueva serie es también divergente.

Si en cambio divergen ambas series [22-45], puede destruirse la divergencia de [22-43] con una reordenación conveniente, pero se presentan dos casos, según que se cumpla o no la condición $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Si esta condición se cumple, la demostración del teorema (b_2) nos muestra que existe una reordenación que hace convergente la serie [22-43] con suma prefijada: caemos en la convergencia condicional.

Si la condición $\lim u_n = 0$ no se cumple, la serie no puede ser convergente para ninguna reordenación de sus términos.

c) *Criterios de convergencia condicional.* — El de LEIBNIZ, para series alternadas (§ 22-3), es uno de ellos. Puede generalizarse mediante el siguiente lema:

LEMA *de* ABEL. *Si se da la serie de términos reales,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *con sumas parciales* A_n *acotadas, es decir, si existen números reales m y M independientes de n, tales que:*

[22-52] $$m \leqq A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqq M,$$

y si además se da la sucesión de números positivos decrecientes:

[22-53] $$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots \geqslant 0,$$
entonces se verifica para todo p la acotación:
[22-54] $$m\, b_1 \leqq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_p b_p \leqq M\, b_1.$$

En efecto, expresemos los factores a_n de la suma $\Sigma a_n b_n$ mediante sus sumas parciales, $A_n - A_{n-1}$, y reordenemos respecto a las A_n:
[22-55] $$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_p b_p = A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + (A_3 - A_2) b_3 + \ldots + (A_p - A_{p-1}) b_p = A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \ldots + A_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + A_p b_p.$$

Por ser *positivas* todas las diferencias $b_n - b_{n+1}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots, p-1)$, el último miembro de [22-55] disminuirá o aumentará, respectivamente, si sustituímos todas las A_n, $(n = 1, 2, 3, \ldots, p)$, por sus cotas inferior o superior m ó M, respectivamente. Sacando entonces m ó M factor común, resulta [22-54], por ser $(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{p-1} - b_p) + b_p = b_1$.

De aquí se deduce:

CRITERIO *de* DIRICHLET: *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *es convergente si* Σa_n *tiene sus sumas parciales acotadas y la sucesión de números reales,* $b_1\ b_2, \ldots, b_n, \ldots,$ *tiende monótonamente a cero.*

Obsérvese que no suponemos sea Σa_n convergente.

Demostraremos que se cumple el criterio general de convergencia (§ 22-1, g):
[22-56] $$| a_{n+1} b_{n+1} + \ldots + a_{n+p} b_{n+p} | < \varepsilon.$$

En efecto, la hipótesis [22-52] implica que para todo n y q sea:
[22-57]
$$| a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+q} | \leqslant | a_1 + \ldots + a_n | + | a_1 + \ldots + a_{n+q} | < K,$$
si se toma $K > 2\,(|m| + |M|)$ independiente de n y q. Podemos suponer las b_n positivas, multiplicando, si es necesario, por -1 la serie dada. Entonces, basta tomar ν tal que para $n \geqslant \nu$ sea $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant \varepsilon/K$, para que en virtud del lema de ABEL, aplicado a la acotación [22-57], con la sucesión
$$\varepsilon/K > b_{n+1} \geqslant b_{n+2} \geqslant \ldots \geqslant b_{n+p} \geqslant \ldots \geqslant 0,$$
se verifique [22-56] para $n \geqslant \nu$ y todo p, como queríamos demostrar.

Del criterio de DIRICHLET se deduce fácilmente:

CRITERIO *de* ABEL: *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *es convergente si la serie* Σa_n *es convergente (aunque lo sea sólo condicionalmente) y la sucesión de números reales* $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$ *es monótona y acotada.*

Porque entonces la sucesión $\{b_n\}$ tiene un límite B (§ 20-4) (aunque ahora no se suponga haya de ser precisamente cero), es decir, tiende monótonamente a cero la sucesión $\{b_n - B\}$. Por el criterio de DIRICHLET, será entonces convergente la serie $\Sigma a_n (b_n - B)$, y al serlo también $\Sigma a_n B$ (§ 22-1, e), habrá de ser convergente $\Sigma a_n b_n$, como queríamos demostrar. El criterio de ABEL puede formularse así: *Una serie convergente continúa siendo convergente si sus términos se multiplican, respectivamente, por los de cualquier sucesión monótona y acotada de números reales.*

EJEMPLOS: 1. Por estar acotadas las sumas parciales de la serie $\Sigma (-1)^n$, el criterio de LEIBNIZ para la convergencia de las series alternadas (§ 22-3, a) es un inmediato corolario del de DIRICHLET.

2. Vimos que la serie geométrica (§ 22-1, b) de razón $k = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \neq 1$ tiene sus sumas parciales [22-7] acotadas, por lo cual también permanecerán acotadas sus partes real e imaginaria (§ 21-6), es

decir, las sumas parciales de las series $\Sigma \cos n\,\theta$, $\Sigma \operatorname{sen} n\,\theta$, para todo valor real de θ, no múltiplo de 2π en el primer caso. Por el criterio de DIRICHLET resultan convergentes las series $\Sigma n^{-\alpha} \cos n\,\theta$, $\Sigma n^{-\alpha} \operatorname{sen} n\,\theta$ si $\alpha > 0$, a menos que para la primera sea θ múltiplo de 2π y $0 < \alpha \leqslant 1$. Estúdiese la convergencia absoluta y condicional de dichas series.

3. Por el criterio de ABEL, son convergentes con Σa_n las series $\Sigma a_n/n$, $\Sigma a_n/\ln n$, $\Sigma \sqrt[n]{n}\, a_n$, $\Sigma (1 + 1/n)^n a_n$.

5. **Series de términos complejos.** — En el § 22-1, *a*) se han dado las definiciones generales de carácter convergente, divergente u oscilante, y de suma de una serie de términos reales o complejos. Si se supone que el término general u_n de la serie toma la forma $u_n = a_n + i\,b_n$, la serie

[22-58] $(a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2) + \ldots + (a_n + i\,b_n) + \ldots$

es convergente, y tiene por suma $A + i\,B$, si es (§ 21-6, *a*):

$$\lim U_n = \lim\ (A_n + i\,B_n) = A + i\,B;$$

es decir, si se verifica:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A_n \to A,$$
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n \to B;$$

luego: *La condición necesaria y suficiente para que la serie* [22-58] *sea convergente, es que lo sean las dos series de términos reales:*

[22-59] $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots;\quad b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots;$

y si A *y* B *son sus sumas respectivas, la suma de* [22-58] *es* $A + Bi$.

Si, por el contrario, crece infinitamente $|U_n|$, es decir, si dado un número cualquiera H, desde un cierto valor de n es $|U_n| > H$, la serie es *divergente;* y si U_n no tiene límite finito ni infinito, es *oscilante.*

La serie [22-58] será divergente si lo es una de las dos series parciales [22-59] o las dos. En efecto, basta observar que el valor absoluto de U_n es:

$$|U_n| = \sqrt{|A_n|^2 + |B_n|^2},$$

y por lo tanto, es mayor que $|A_n|$ y $|B_n|$; luego, también crece infinitamente.

Por exclusión, resulta: la serie [22-58] será oscilante si una de las series [22-59] es oscilante, siendo la otra convergente u oscilante.

Definida en § 22-1, *h* la *convergencia absoluta* de una serie por la convergencia de la serie de los valores absolutos:

[22-60] $|a_1 + i\,b_1| + |a_2 + i\,b_2| + \ldots + |a_n + i\,b_n| + \ldots,$

vimos ya que entonces la serie [22-58] es también convergente. También las series de términos positivos:

[22-61] $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots;\quad |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n| + \ldots$

son convergentes, por tener sus términos inferiores a los de [22-60].

Siendo absolutamente convergentes las series [22-59], se puede alterar el orden de los términos, sin que varíe su suma (§ 22-4, b_3) ; luego, lo mismo acontece con la [22-58]. En cambio, si [22-58] es convergente, sin serlo [22-60], serán convergentes las series [22-59], pero no pueden serlo las dos series [22-61], porque entonces también lo sería [22-60], cuyos términos son inferiores a los de la serie que resulta de sumar las dos [22-61]. Por consiguiente, alterando el orden de los términos de [22-58], lo cual equivale a alterar los de [22-59], puede variar la suma, y hasta hacerse divergente u oscilante.

Resulta, pues, una clasificación de las series convergentes en *absolutamente convergentes* (o *incondicionalmente convergentes*) y *condicionalmente convergentes*, según converja o no la serie de los valores absolutos de los términos, cumpliéndose también el teorema de DIRICHLET:

La suma de una serie absolutamente convergente no varía reordenando arbitrariamente sus términos; pero esta reordenación no puede hacerse arbitrariamente en las condicionalmente convergentes.

Criterios de convergencia absoluta son los dados en el § 22-2 para las series de términos positivos. Los criterios de DIRICHLET y ABEL, de convergencia condicional (§ 22-4, c), subsisten también aquí, con las mismas palabras con que han sido enunciados, es decir: los términos a_n pueden ser complejos, pero la sucesión monótona $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ se supone de números reales.

Porque si se supone que existe una cota K independiente de n tal que:

$$[22\text{-}62] \qquad |A_n| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| < K,$$

y se cumple [22-53], entonces será:

$$|A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \ldots + A_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + A_p b_p| \leqslant$$
$$\leqslant |A_1|(b_1 - b_2) + |A_2|(b_2 - b_3) + \ldots + |A_{p-1}|(b_{p-1} - b_p) +$$
$$+ |A_p| b_p < K b_1,$$

y por [22-55] podremos poner:

$$[22\text{-}63] \qquad |a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_p b_p| < K b_1$$

para cualquier p. Las acotaciones [22-62] y [22-63] son las que intervendrán ahora en las hipótesis y demostración del caso complejo.

EJEMPLOS: 1. Son absolutamente convergentes las series:

$$\frac{1+i}{2} - \frac{(1+i)^2}{4} + \frac{(1+i)^3}{8} - \ldots \pm \frac{(1+i)^n}{2^n} \mp \ldots$$

$$\frac{i}{1.2} + \frac{i^2}{2.3} + \frac{i^3}{3.4} + \ldots + \frac{i^n}{n(n+1)} + \ldots$$

$$\frac{\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha}{1^2} - \frac{\cos 2\alpha + i\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{2^2} + \frac{\cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha}{3^2} + \ldots,$$

pues las series de valores absolutos son:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + \ldots \text{convergente}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots \text{ convergente}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \text{ convergente.}$$

2. Dada la serie de términos complejos

[22-64] $$S=\frac{i}{1}+\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}+\ldots+\frac{i^n}{n}+\ldots$$

es divergente la serie de módulos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Por conservarse acotadas las sumas parciales de la serie geométrica oscilante [22-9] y tender monótonamente a cero $1/n$, el criterio de DIRICHLET asegura que la serie [22-64] es (condicionalmente) convergente.

Para hallar su suma, problema distinto y más difícil que el de determinar su carácter, descompondremos [22-64] en su parte real e imaginaria, y aplicaremos el resultado obtenido en § 22-3, *c*), y el que se obtendrá en §§ 45-4 y 45-6, dando:

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots\pm\frac{1}{2k}\mp\ldots\right)&=-\frac{1}{2}\ln 2\\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\pm\frac{1}{2k-1}\mp\ldots&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}\right\},$$

luego, la serie [22-64] es *condicionalmente convergente*, y su suma (no alterando el orden de sus términos), es

$$S=-\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}.$$

6. Operaciones con series. — *a*) *Suma.*

a_1) *Sumando término a término dos series convergentes cualesquiera:*

[22-65] $$\begin{cases} u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \\ v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots, \end{cases}$$

o bien intercalando en su mismo orden los términos de una serie entre cada dos consecutivos de la otra, se obtiene una serie:

[22-66] $$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots$$

o bien:

[22-67] $$u_1+v_1+u_2+v_2+\ldots+u_n+v_n+\ldots,$$

que es convergente y es la suma de ambas.

Porque la suma de sus $2n$ primeros términos es $U_n + V_n$; la suma de sus $2n+1$ primeros términos es $U_n + V_n + u_{n+1}$; y en ambos casos, por ser:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = U,\ \lim_{n\to\infty} V_n = V,\ \lim_{n\to\infty} u_{n+1}=0, \text{ resulta: } \lim_{i\to\infty} S_i=U+V.$$

En virtud de la propiedad asociativa (§ 22-1, *e*), pueden sustituirse términos *consecutivos* por su suma efectuada, sin que varíe la suma. Por ejemplo, pueden asociarse como en [22-66].

Sin embargo, para obtener una serie [22-66] convergente, no es necesario que lo sean las [22-65]; así por ejemplo, basta tomar $u_n = +1$, $v_n = -1$, $u_n + v_n = 0$ para que las series divergentes $1+1+1+\ldots$; $-1-1-1-\ldots$; den suma [22-66] convergente $0+0+0+\ldots$

a_2) *Si las dos series [22-65] convergen absolutamente, se pueden ordenar arbitrariamente los términos de la serie suma.*

Porque basta considerar las series de los valores absolutos de las [22-65] y aplicar a la serie suma [22-67] el teorema de DIRICHLET sobre convergencia incondicional.

Para *restar*, bastará multiplicar la serie sustraendo por -1 (§ 22-1, *e*).

EJEMPLOS: 1. Por el resultado obtenido en el § 22-3, *c*), y la descomposición $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, es:

$$[22\text{-}68]\quad \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \ldots = \ln 2 \\[2ex] \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{4.5} + \dfrac{1}{5.6} + \ldots = 1. \end{cases}$$

Puesto que la primera serie es condicionalmente convergente si de ella restamos la segunda, habremos de efectuar la intercalación en el orden [22-67]. es decir:

$$1 - \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2 - 1.$$

y asociando cada tres términos consecutivos de suma nula, resulta:

$$-\frac{1}{2.3} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} - \ldots - \frac{1}{2n(2n+1)} \ldots = \ln 2 - 1,$$

2. Análogamente, si sumamos las dos series [22-68]. habremos de intercalar precisamente sus términos en el orden [22-67]:

$$1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5} + \ldots = \ln 2 + 1,$$

y asociando cada tres términos consecutivos de suma nula, resulta:

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{(2n-1)2n} + \ldots = \ln 2 + 1.$$

b) *Producto.* — b_1) Se trata de ver en qué medida se conserva para el producto de dos *series* [22-65] la propiedad distributiva que ya aplicamos al producto de dos sumas (§ 4-8), obteniendo una nueva suma, expresada de varias maneras según la ordenación de sus términos.

En nuestro caso, todos los productos $u_i v_k$ forman un cuadro infinito en dos sentidos:

[22-69]
$$\begin{cases} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 & u_4 v_1 & \ldots \\ u_1 v_2 & u_2 v_2 & u_3 v_2 & u_4 v_2 & \ldots \\ u_1 v_3 & u_2 v_3 & u_3 v_3 & u_4 v_3 & \ldots \\ u_1 v_4 & u_2 v_4 & u_3 v_4 & u_4 v_4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

pero sus elementos pueden ordenarse en una sucesión de productos, $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, de varias maneras; de las cuales las más importantes son:

Ordenación por cuadrados u ordenación principal: Se toman los términos de [22-69] que vayan figurando en los sucesivos cuadrados con "vértice" superior izquierdo $u_1 v_1$, de manera que al primer término $u_1 v_1$ siguen los $u_2 v_1$, $u_2 v_2$, $u_1 v_2$, que dependen del subfijo 2, pero no de otro superior; luego siguen los $u_3 v_1$, $u_3 v_2$, $u_3 v_3$, $u_2 v_3$, $u_1 v_3$, que dependen del subfijo 3 pero no de otro superior; y así sucesivamente. Las sumas de estos grupos de términos van siendo $U_1 V_1$, $U_2 V_2 - U_1 V_1$, $U_3 V_3 - U_2 V_2$, ..., y la suma parcial que corresponde a los primeros n grupos es

$$U_1 V_1 + (U_2 V_2 - U_1 V_1) + (U_3 V_3 - U_2 V_2) + \ldots + \\ + (U_n V_n - U_{n-1} V_{n-1}) = U_n V_n = \\ = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)(v_1 + v_2 + \ldots + v_n).$$

Ordenación diagonal: En el diagrama [22-69] se toman los términos según diagonales (por ejemplo, ascendentes), de manera que al término $u_1 v_1$, cuya suma de índices es 2, sigan los $u_1 v_2$, $u_2 v_1$, cuya suma de índices es 3, y luego los $u_1 v_3$, $u_2 v_2$, $u_3 v_1$, cuya suma de índices es 4, y así sucesivamente.

b_2) Cuando la convergencia es absoluta, subsiste la propiedad distributiva, como indica el teorema siguiente:

Si son absolutamente convergentes las series,

[22-70]
$$\begin{cases} U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \\ V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \end{cases}$$

toda serie $\Sigma u_i v_j$ ***en la que figure una sola vez el producto de cada término*** u_i ***por cada término*** v_j***, es absolutamente convergente, y su suma es*** UV.

Aunque el teorema es válido para cualquier ordenación, consideremos, para fijar las ideas, la serie obtenida con la ordenación diagonal:

[22-71] $$u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 + \dots$$

Por ser absolutamente convergentes [22-70], son convergentes las series:

$$U' = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$
$$V' = |v_1| + |v_2| + |v_3| + \dots$$

Si formamos la suma S'_n de los n primeros términos de la serie de valores absolutos:

[22-72] $$|u_1| . |v_1| + |u_1| . |v_2| + |u_2| . |v_1| + |u_1| . |v_3| + |u_2| . |v_2| + \dots,$$

y si es p el mayor valor de los subíndices de las u que en ellos figuran, y q el mayor subíndice de las v (por ejemplo, para $n = 5$ es $p = 2$, $q = 3$), en el producto

$$(|u_1| + |u_2| + \dots + |u_p|)\,(|v_1| + |v_2| + \dots + |v_q|) = U'_p . V'_q$$

figuran todos los términos de S'_n; luego,

$$S'_n \leqq U'_p . V'_q < U' . V';$$

por lo tanto, la serie de términos positivos [22-72] tiene sus sumas parciales acotadas, y por consiguiente es convergente (§ 22-2, *a*). Siendo, pues, convergente [22-72], la serie [22-71] converge absolutamente.

La suma de [22-71] no varía, por lo tanto, alterando el orden de sus términos, y *cualquiera haya sido la ordenación adoptada*, podemos considerarlos ahora según la ordenación principal y agruparlos de manera que la suma parcial S_n sea $S_n = U_n . V_n$, y por lo tanto, la suma de la serie producto en cualquier ordenación será $\lim S_n = U . V$.

b_3) *Producto por la regla de* CAUCHY: Es el formado por la ordenación diagonal, *agrupando* los términos que tienen constante la suma de índices, es decir:

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \dots$$

Por lo tanto, el producto CAUCHY de las series [22-70] es la serie $\Sigma\, w_n$ cuyo término general viene dado por:

[22-73] $$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1 .$$

b_4) Como aplicación de los algoritmos generales de convergencia y sumación, se probarán (en nota I) los dos siguientes teoremas:

TEOR. de MERTENS: *Si una serie converge y la otra es absolutamente convergente, converge y es igual al producto de ambas la serie obtenida por la regla de* CAUCHY:

$$u_1 v_1 + (u_2 v_1 + u_1 v_2) + (u_3 v_1 + u_2 v_2 + u_1 v_3) + \dots +$$
$$+ (u_n v_1 + u_{n-1} v_2 + \dots + u_2 v_{n-1} + u_1 v_n) + \dots$$

TEOR. de ABEL: *Aunque uno o ninguno de ambos factores-series no sea absolutamente convergente, basta que la serie producto por la regla de* CAUCHY *tenga carácter convergente para que su suma sea el producto de las sumas de las series-factores dadas.*

EJEMPLOS: 3. Multiplicando por sí misma la serie absolutamente convergente

[22-74] $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad (|x| < 1),$$

resulta:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + (x+x) + (x^2+x^2+x^2) + \ldots = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

4. Multiplicando de nuevo por [22-74], resulta:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} x + \binom{4}{2} x^2 + \ldots$$

5. Multiplicando la serie

[22-75] $$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

por sí misma, resulta:

$$1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3.1}} + \frac{1}{\sqrt{2.2}} + \frac{1}{\sqrt{1.3}}\right) - \ldots \pm$$

$$\pm \left(\frac{1}{\sqrt{n.1}} + \frac{1}{\sqrt{(n-1)2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{1.n}}\right) \mp \ldots$$

cuyo término general $\left(\text{recordando que es } \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}\right)$ es mayor que:

$$\frac{1}{(n+1):2} + \frac{1}{(n+1):2} + \ldots + \frac{1}{(n+1):2} = \frac{2n}{n+1} \to 2 \neq 0;$$

luego, no es convergente (§ 22-1, *d*). Esto es debido a no ser absolutamente convergente la serie [22-75].

6. El producto por la regla de CAUCHY (que por b_2 es absolutamente convergente si lo son las series-factores) puede resultar *absolutamente convergente*, aun cuando ambas series-factores sean *divergentes* o cuando uno de los factores sea *divergente* y el otro *absolutamente convergente*, o cuando uno de los factores sea *absolutamente convergente* y el otro sólo sea *condicionalmente convergente*.

Para el primer caso, basta considerar la serie absolutamente convergente $1 + (3/4) + (3/4)^2 + (3/4)^3 + \ldots$ como producto formal por la regla de CAUCHY de las series divergentes:

$$1 - \left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \ldots; \qquad 1 + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\left(2^2 + \frac{1}{2^3}\right) +$$

$$+ \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(2^3 + \frac{1}{2^4}\right) + \ldots$$

La paradoja se explica porque la ley asociativa aplicada a una serie oscilante puede convertirla en convergente (§ 22-1, *e*).

De modo análogo, para el segundo caso resulta que la serie absolutamente convergente, $\frac{1}{2} + (1/2^2) + \ldots + (1/2^n) + \ldots$, es el producto formal, por la regla de CAUCHY, de la serie divergente, $\frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2} + \ldots$, por la serie absolutamente convergente, $1 - (3/2) - (3/2^2) - \ldots - (3/2^{n-1}) - \ldots$

El tercer caso está menos divulgado, aunque ha sido detenidamente estudiado por A. PRINGSHEIM (*Math. Ann.*, *21*, p. 358, 1883). Como caso particular del método general que este autor expone, construyamos el siguiente ejemplo: La serie absolutamente convergente:

[22-76] $$1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - + \ldots + \frac{(-1)^m}{(m-1)m} + \ldots = 2 \ln 2,$$

por la serie condicionalmente convergente

[22-77] $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{m} + \ldots = \ln 2,$$

dan un producto, por la regla de CAUCHY, absolutamente convergente:

[22-78] $$1 - \frac{2}{3.4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{4.5}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - + \ldots + \frac{2(-1)^m}{m(m+1)}\left(\sum_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\nu}\right) + + \ldots = 2 \ln^2 2.$$

En efecto, por los ejemplos 1 y 2 se han considerado las series [22-76] y [22-77]. El término general w_n de su producto por la regla de CAUCHY se obtiene así:

$$w_m = v_1 u_m + v_2 u_{m-1} + \ldots + v_m u_1 =$$

$$= (-1)^m \left[\frac{1}{1(m-1)m} + \frac{1}{2(m-2)\,(m-1)} + \ldots + \frac{1}{\nu(m-\nu)\,(m-\nu+1)} + \ldots + \frac{1}{(m-1)1.2} - \frac{1}{m} \right] =$$

$$= (-1)^m \left[\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) + \ldots + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{m-\nu} - \frac{1}{m-\nu+1}\right) + \ldots + \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{m} \right] =$$

$$= (-1)^m \left[\left(\frac{1}{1(m-1)} + \frac{1}{2(m-2)} + \ldots + \frac{1}{\nu(m-\nu)} + \ldots + \frac{1}{(m-1)1} \right) - \left(\frac{1}{1.m} + \frac{1}{2(m-1)} + \ldots + \frac{1}{(m-1)2} + \frac{1}{m.1} \right) \right].$$

Si se descompone cada sumando, $\frac{1}{\nu(m-\nu)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{m-\nu}\right)$ resulta:

$$w_m = (-1)^m \left[\frac{1}{m} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m-2} + \right. \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{1} \right) - \frac{1}{m+1} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{m-1} + \ldots + \frac{1}{m} + \frac{1}{1} \right) \right] =$$

$$= (-1)^m \left[2 \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{1}{\nu} \right) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) - \frac{2}{m(m+1)} \right] =$$

$$= \frac{2(-1)^m}{m(m+1)} \left(\sum_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\nu} \right),$$

que es el término general de la serie [22-78].

Si se tiene en cuenta que, según [22-36], de § 22-3, *b*), es:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\sum\limits_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\nu}}{\ln m} = 1.$$

mientras que al comparar los órdenes fundamentales de infinitud (§ 37-3), se verá que $\lim\limits_{m \to \infty} (\ln m / \sqrt{m}) = 0$, entonces resulta $\lim\limits_{m \to \infty} m^{3/2} |w_m| = 0$, y por el criterio de comparación [22-27] con exponente $\alpha = 3/2 > 1$, se deduce la convergencia absoluta de la serie [22-78], como queríamos demostrar.

Ejercicios

1. Simplificando U_n, sumar por descomposición: $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$;

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+2)} = \sum_2^\infty \frac{1}{n^2-1}; \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)(2n+7)}.$$

2. Acotar el resto de las series $\sum\limits_1^\infty (1/n^2)$; $\sum\limits_1^\infty (1/n^n)$.

3. Clasificar las series: *a*) $\sum\limits_1^\infty \frac{n-1}{n^2}$; *b*) $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n+\sqrt{n}}$;

c) $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}}$; *d*) $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

4. Aplicar los criterios del cociente, la raíz y comparación a las series de términos positivos, y expresar sus sumas:

$$S = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \dots, \quad (0 < a < b < 1);$$

$$T = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\beta} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\beta} + \dots,$$

$$(\alpha > 1, \ \beta > 1, \ \alpha \neq \beta).$$

5. Clasificar las series:

$$a) \sum_1^\infty \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} \ \frac{1}{2n+1}; \quad b) \sum_1^\infty \frac{2.4.6\dots(2n)}{1.3.5\dots(2n-1)} \ \frac{1}{2n+1}.$$

6. Averiguar para qué valores reales de a y b es convergente:

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} + \dots$$

7. Si Σu_n es una serie de términos positivos *monótonamente decrecientes*, y para un número natural $k > 1$ es $v_n = k^n u_{k^n}$, probar que las series Σu_n y Σv_n convergen o divergen simultáneamente (CAUCHY).

8. Aplicar el criterio anterior a demostrar por inducción, respecto de r, que la serie $\sum\limits_n u_n^{(r)}$ converge si $a > 1$, y diverge si $0 < a \leqslant 1$, donde $1/u_n^{(r)} = n.\ln n.\ln_2 n. \dots \ln_{r-1} n.(\ln_r n)^a$, con $\ln_0 n = n$, $\ln_s n = \ln(\ln_{s-1} n)$, $s = 1, 2, 3, \dots$ La serie $\sum\limits_n u_n^{(0)}$ es la armónica generalizada (§ 22-2, *b*).

9. Generalizar el criterio de RAABE (§ 22-2, *c*), probando que si

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{a_n}{n \ln n} \quad \text{con } a_n \begin{cases} \geqq a > 1 \\ \leqq 1 \end{cases},$$

Σu_n en el primer caso converge y en el segundo diverge. Deducir así el *criterio de* GAUSS, según el cual, si

$$u_n \geqq 0, \ \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 - \frac{a}{n} - \frac{d_n}{n^p}$$

con $p > 1$, $|d_n| < K$ independiente de n, para $a > 1$, Σu_n converge y para $a \leqq 1$, Σu_n diverge. Caso particular del anterior, toma la expresión

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{n^p + b_1 n^{p-1} + \dots + b_p},$$

con a_i, b_i constantes, en que para $b_1 - a_1 > 1$, Σu_n converge, mientras que para $b_1 - a_1 \leqq 1$, Σu_n diverge.

10. Estudiar para qué valores positivos de a es convergente la serie $\sum\limits_1^\infty u_n$ con $u_n = (2-a)(2-\sqrt{a})(2-\sqrt[3]{a})\dots(2-\sqrt[n]{a})$.

11. Carácter de la convergencia de $\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^n n^\alpha e^{n\beta}$, según sean los valores reales de α y β.

12 Explicar por qué $\sum\limits_{n=0}^\infty (-1)^n u_n$ es divergente, aunque

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n} \to 0.$$

13. Dada la serie $S = \sum\limits_1^\infty \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, escribir los diez primeros términos de una serie reordenada como en § 22-4, b_2, convergente hacia 1,1.

14. Si $S(1;1)$ designa la serie S del ejercicio anterior, y $S(p;q)$ la obtenida de la S colocando p términos positivos seguidos de q negativos,

otros p positivos y otros q negativos, y así sucesivamente, demostrar que es $S(p;q) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(p/q)$.

15. Hallar el límite de la sucesión del ejercicio 5 del § 20.

16. Demostrar que $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

17. Sumar, relacionándolas con series geométricas, las siguientes:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n; \quad \sum_{1}^{\infty}\frac{n}{2^n}; \quad \sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{20^n};$$

$(|x| < 1)$.

18. Averiguar para qué valores complejos de z convergen las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(z-e^{ni})}; \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,z^n}{(n+1)^n}.$$

19. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} + (-1)^{n+1}\frac{i}{n}\right)$ no es absolutamente convergente.

Notas al capítulo V

I. Algoritmos generales de convergencia y sumación. — *a) Transformación de* TOEPLITZ. — TEOR. 1: *Si una matriz infinita de números reales o complejos*

$$T = \begin{Bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} & \dots \\ t_{2,1} & t_{2,2} & & t_{2,n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & & t_{n,n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

cumple las condiciones:

a_1) *Cada columna tiene límite nulo, es decir:*

$$\lim_{n\to\infty} t_{n,p} = 0, \qquad p = 1, 2, 3, \dots;$$

a_2) *Existe una constante* K, *independiente de* n, *tal que para todo* $n > 0$ *es:*

$$|t_{n,1}| + |t_{n,2}| + \dots < K;$$

entonces, cualquier sucesión real o compleja $\{s_n\}$ *de límite nulo.* $s_n \to 0$, *se transforma por la matriz* T *en una sucesión:*

[V-1] $$t_n = t_{n,1}s_1 + t_{n,2}s_2 + \dots = \sum_{p=1}^{\infty} t_{n,p}s_p,$$

que también tiene límite nulo, $t_n \to 0$.

Obsérvese que la condición a_2) implica la convergencia absoluta de las series formadas con los elementos de cada fila:

$$\tau_n = \sum_{p=1}^{\infty} t_{n,p}.$$

TEOR. 2: *Si la matriz* T, *además de cumplir las condiciones* a_1) *y* a_2), *cumple la condición:*

a_3) $$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau, \qquad (\tau \text{ finito}),$$

entonces, toda sucesión real o compleja $\{s_n\}$ *de límite finito* s, *es decir,* $s_n \to s$, *se transforma por la matriz* T *en una sucesión* [V-1] *que tiene límite* τs, *es decir:*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} t_{n,p}\, s_p \right) = \tau s.$$

TEOR. 3: *Si la matriz* T *tiene todos sus elementos reales no negativos, y además cumple las condiciones* a_1) *y* a_3), *entonces toda sucesión* $\{s_n\}$ *de elementos reales, transformada por* [V-1] *en la* $\{t_n\}$, *verifica:*

[V-2] $\liminf (\tau s_n) \leqq \liminf t_n \leqq \limsup t_n \leqq \limsup (\tau s_n)$.

Las matrices que originan la transformación [V-1] en las condiciones a_1, a_2, a_3 se llaman *matrices* T o de TOEPLITZ (1911). Si se toma $t_{n,p} = 1/n$ para $p \leqq n$, $t_{n,p} = 0$ para $p > n$, se obtiene una matriz T que cumple las condiciones de hipótesis de los tres teoremas anteriores con $\tau = 1$, y origina una transformación, ya estudiada por CAUCHY (1821), de una sucesión $\{s_n\}$ en la de las medias aritméticas de sus n primeros términos $\left\{ \dfrac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} \right\}$.

Obsérvese que en el teorema 3, la condición a_3) implica la a_2), y que en los teoremas 1 y 2, por conservarse acotados los términos s_n, la condición a_2) asegura la convergencia absoluta de las series [V-1], es decir, la existencia de la sucesión transformada $\{t_n\}$.

DEM. *de teor.* 1. — Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $m = m(\varepsilon)$ tal que para $p > m$ se conserve $|s_p| < \varepsilon/(2\,\mathrm{K})$. Entonces, por a_2) es:

$$|t_{n,m+1}\, s_{m+1} + t_{n,m+2}\, s_{m+2} + \ldots| < (|t_{n,m+1}| + |t_{n,m+2}| + \ldots)\frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{K}} \leqq \tfrac{1}{2}\,\varepsilon,$$

para *cualquier* n, y podremos poner

$$|t_n| < |t_{n,1}\, s_1 + t_{n,2}\, s_2 + \ldots + t_{n,m}\, s_m| + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon.$$

Por a_1 se puede tomar $|t_{n,p}| < \varepsilon/(2\,m\,c)$, $p = 1, 2, \ldots, m$, para todo $n > \nu(\varepsilon)$, en que $c > |s_p|$, $p = 1, 2, \ldots, m$. Por lo tanto, $|t_{n,1}\, s_1 + \ldots + t_{n,m}\, s_m| < c\,m\,\varepsilon/(2\,m\,c) = \frac{1}{2}\,\varepsilon$; es decir: $|t_n| < \varepsilon$ si $n > \nu(\varepsilon)$, como queríamos demostrar.

DEM. *de teor.* 2. — Expresemos $s_p = s + \delta_p$ con $\delta_p \to 0$; entonces, aplicando en [V-1] las leyes del § 22-1, *e*), se tiene:

$$t_n = \tau_n\, s + \sum_{p=1}^{\infty} t_{n,p}\, \delta_p.$$

La condición a_3) asegura que el primer sumando del último miembro tiende a τs, mientras que la suma de la serie $\sum_{p=1}^{\infty} t_{n,p}\, \delta_p$ tiende a cero para $n \to \infty$ por el teorema 1, lo que demuestra el teorema 2.

DEM. *del teor.* 3. — Probemos, por ejemplo, la primera desigualdad [V-2]. Supuesto $\liminf s_n = s > -\infty$, sea un número cualquiera $c < s$. Entonces, $s_p > c$ para $p > m = m(c)$, y por ser los elementos de T reales no negativos, es $t_n \geqq (t_{n,1}\, s_1 + \ldots + t_{n,m}\, s_m) + (t_{n,m+1} + t_{n,m+2} + \ldots)c$, para *cualquier* n. Fijado m, para $n > \nu(\delta, c)$ por a_1) *y* a_3) queda $t_n > \tau c - \delta$, y por ser $\delta > 0$ arbitrario, es $\liminf t_n \geqq \tau c$, es decir: $\liminf t_n \geqq \liminf (\tau s_n)$.

Para una matriz que tenga elementos no todos positivos o nulos, puede no ser cierto el teorema 3.

EJEMPLO 1. La matriz T, de elementos

$$t_{2r+1,p} = \begin{cases} +1 \text{ si } p = 2r+1, \\ 0 \text{ si } p \neq 2r+1, \end{cases} \qquad t_{2r,p} = \begin{cases} -1 \text{ si } p = 2r, \\ +2 \text{ si } p = 2r+1, \\ 0 \text{ para los demás } p, \end{cases}$$

cumple las condiciones a_1), a_2), a_3) con $\tau = 1$. Pruébese que la sucesión $s_{2r} = 0$, $s_{2r-1} = (-1)^{r+1}$, $r = 1, 2, 3, \ldots$, se transforma por [V-1] en $t_{2r} = 2(-1)^r$, $t_{2r-1} = (-1)^{r+1}$, $r = 1, 2, 3, \ldots$, y no se cumple la conclusión [V-2]. Sin embargo, subsisten para esta matriz T los teoremas 1 y 2.

Si la matriz T hubiese tenido como elementos

$$t_{n,p} = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{si } p \neq n, \end{cases}$$

se cumpliría el teorema 1, pero no el teorema 2, y por consiguiente, tampoco el teorema 3, como se comprueba tomando $s_n = 1$ constante, mientras que $t_n = (-1)^{n+1}$ oscila.

b) *Medias aritméticas y geométricas.* — El resultado de CAUCHY antes mencionado, referido al teorema 2 dice:

Si una sucesión real o compleja $\{s_n\}$ *tiene límite,* $s_n \to s$, *entonces la sucesión de medias aritméticas de los n primeros términos tiene el mismo límite,* $\dfrac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} \to s$.

Análogamente se formula el teorema 3 para este caso.

Si $s_n > 0$, resulta $\sqrt[n]{s_1 s_2 \ldots s_n} \to s$, como se verifica tomando logaritmos, es decir, también *las medias geométricas de los n primeros términos de una sucesión convergente de términos positivos* $s_n > 0$, *tiene el mismo límite.*

Como corolario importante obtenemos:

Si en una sucesión cualquiera de términos positivos existe $\lim \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \gamma$, entonces es $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = \gamma$.

Porque la media geométrica de $\alpha_1, \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}, \ldots, \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ es

$$\sqrt[n]{\alpha_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdots \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}} = \sqrt[n]{\alpha_n}.$$

EJEMPLO 2. Para demostrar que $\sqrt[n]{n} \to 1$, basta ver que $\dfrac{n}{n-1} \to 1$.

Obsérvese que el recíproco del corolario anterior puede no ser cierto: Así, para $\alpha_{2p} = 1/2^p$, $\alpha_{2p-1} = 1/2^p$, $p = 1, 2, 3, \ldots$, $\lim \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ no existe, pues $\overline{\gamma} = 1$, $\underline{\gamma} = \frac{1}{2}$, mientras que es $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = 1/\sqrt{2}$.

c) Más generalmente, suponiendo como antes, $s_n \to s$, y elegida una sucesión de números *positivos* $b_n > 0$, tales que $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \to +\infty$, se verifica:

$$\lim \frac{b_1 s_1 + b_2 s_2 + \ldots + b_n s_n}{B_n} = s.$$

Porque la matriz de elementos, $t_{n,p} = b_p/B_n$, si $p \leqq n$, $t_{n,p} = 0$, si $p > n$, cumple las hipótesis a_1), a_2), a_3) con $\tau = 1$.

Para $s_n = a_n/b_n$ deducimos el corolario:

Si es $b_n > 0$ *con* $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \to +\infty$, *entonces* $\lim a_n/b_n = \gamma$ *implica* $\lim \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \gamma$.

EJEMPLO 3. Si en la potencia de un binomio (§ 12-1) tomamos $a = b = 1$, resulta $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$, y por lo tanto,

si $s_n \to s$, también $\dfrac{\binom{n}{0} s_0 + \binom{n}{1} s_1 + \binom{n}{2} s_2 + \ldots + \binom{n}{n} s_n}{2^n} \to s$.

EJEMPLO 4. Si se toma $a_n = \log(n+1)$, $b_n = (n+1)\ \log(n+1) - n \log n$, con logaritmos de base mayor que 1, resulta $\log(n!)/\log(n^n) \to 1$. STIRLING (§ 53-4) mejoró esta fórmula, útil para el cálculo de factoriales grandes.

d) *Criterio de* STOLZ. — *Si existe:*

$$\lim \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\beta_n - \beta_{n-1}} = \gamma, \quad \textit{es también} \quad \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \gamma$$

en los dos casos siguientes:

1º) *Si la sucesión $\{\beta_n\}$ es monótona divergente.*

2º) *Si es $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$ y la sucesión $\{\beta_n\}$ es monótona.*

Para demostrar 1º), en caso de ser $\beta_n > \beta_{n-1}$, basta tomar en el corolario de *c*): $a_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$, $b_n = \beta_n - \beta_{n-1}$, $(n = 2, 3, \ldots)$; $a_1 = \alpha_1$, $b_1 = \beta_1$. Si $\beta_n < \beta_{n-1}$, es $\lim \dfrac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{(-\beta_n) - (-\beta_{n-1})} = -\gamma$ y se aplica el caso anterior.

Para demostrar 2º), fijado cualquier $\varepsilon > 0$, para todo $n > \nu$ se verifica por hipótesis $\gamma - \varepsilon < \dfrac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\beta_n - \beta_{n-1}} < \gamma + \varepsilon$. Es decir, las fracciones $(p > 0, n > \nu)$:

$$\frac{\alpha_{n+p} - \alpha_{n+p-1}}{\beta_{n+p} - \beta_{n+p-1}}, \ \frac{\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p-2}}{\beta_{n+p-1} - \beta_{n+p-2}}, \ \ldots, \frac{\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}}{\beta_{n+2} - \beta_{n+1}}, \ \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n}$$

están comprendidas entre $\gamma - \varepsilon$ y $\gamma + \varepsilon$; luego, la fracción obtenida de numerador igual a la suma de todos los numeradores y denominador igual a la suma de todos los denominadores, *siendo éstos de igual signo*, está comprendida entre estos números (§ 6-8, *b*), y por lo tanto:

$$\gamma - \varepsilon < \frac{\alpha_{n+p} - \alpha_n}{\beta_{n+p} - \beta_n} < \gamma + \varepsilon,$$

válida para $n > \nu(\varepsilon)$ y cualquier $p > 0$. Haciendo tender p a ∞, al conservar n fijo, como $\alpha_{n+p} \to 0$, $\beta_{n+p} \to 0$, queda $\gamma - \varepsilon < \alpha_n/\beta_n < \gamma + \varepsilon$, cierta desde $n > \nu$ en adelante, lo que demuestra el teorema.

En nota III del capítulo IX, generalizamos este criterio para límite funcional.

COROLARIO: Del primer caso obtenemos que *si existe* $\lim\ (\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \gamma$, *es también* $\lim\ (\alpha_n/n) = \gamma$.

EJEMPLO 5. Para $\alpha_n = \log n$ de base mayor que 1, es $\lim \log \dfrac{n}{n-1} = \log 1 = 0$, y por el corolario será: $\lim \dfrac{\log n}{n} = 0$.

Obsérvese que el recíproco puede no ser cierto; así, para $\alpha_n = (-1)^n$ existe $\lim\ (\alpha_n/n) = 0$, mientras que $(-1)^n - (-1)^{n-1}$ oscila entre -2 y 2. Más generalmente, para el teorema 2, aunque la convergencia de $\{s_n\}$ implica la de $\{t_n\}$, el recíproco no se cumple en general, y en esto radica la fecundidad de la transformación de TOEPLITZ, como veremos en *g*).

e) *Teorema de* MERTENS. — El teorema 2 permite una demostración inmediata del teorema de MERTENS (§ 22-6, b_1). En efecto, si Σu_n es absolutamente convergente, y Σv_n es convergente, se tiene para el producto por la regla de CAUCHY con términos $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1$, que la suma parcial $W_n = u_n V_1 + u_{n-1} V_2 + \ldots + u_1 V_n$ es la

transformada [V-1] de la sucesión $\{V_n\}$ con coeficientes $t_{n,p} = u_{n-p+1}$, si $p \leqq n$, $t_{n,p} = 0$ si $p > n$. Por cumplirse a_1), pues $\lim u_n = 0$, a_2) ya que $|u_n| + |u_{n-1}| + \ldots + |u_1| < K$ independiente de n y a_3), pues $\lim (u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1) = \lim U_n = U$, y además, ser $\lim V_n = V$, existirá y será $\lim W_n = \lim (u_n V_1 + u_{n-1} V_2 + \ldots + u_1 V_n) = U.V$, como queríamos demostrar.

f) *Teorema de* ABEL. — Es el enunciado en el § 22-6, b_1), y puede también demostrarse por aplicación del teorema 2 aun cuando en § 43 lo obtendremos como inmediato corolario de otro teorema de ABEL para las series de potencias.

Por hipótesis, $U_n \to U$, $V_n \to V$, $W_n \to W$, donde U_n y V_n son, respectivamente, las sumas parciales de las series convergentes Σu_n y Σv_n, y W_n la de la serie producto por la regla de CAUCHY con término general $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1$. De la suma parcial $W_n = u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + \ldots + u_n V_1$, obtenemos:

$$[V\text{-}3] \qquad \frac{W_1 + W_2 + \ldots + W_n}{n} = \frac{U_1 V_n + U_2 V_{n-1} + \ldots + U_n V_1}{n}$$

$$= \left(\frac{U_1 - U}{n} V_n + \frac{U_2 - U}{n} V_{n-1} + \ldots + \frac{U_n - U}{n} V_1\right) + \\ + U \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}{n}.$$

En virtud de *a*), teor. 2, es

$$\lim \left(\frac{U_1 - U}{n} V_n + \ldots + \frac{U_n - U}{n} V_1\right) = 0,$$

pues tomando $t_{n,p} = \dfrac{U_{n-p+1} - U}{n}$ para $p \leqq n$, $t_{n,p} = 0$ para $p > n$, se cumple (a_1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n-p+1} - U}{n} = 0$; ($a_2$) : $\left|\dfrac{U_n - U}{n}\right| + \left|\dfrac{U_{n-1} - U}{n}\right| + \\ + \ldots + \left|\dfrac{U_1 - U}{n}\right| \leqq \dfrac{|U_1| + \ldots |U_n|}{n} + |U| \to 2|U|$, por *b*), que también justifica a_3) :

$$\tau = \lim \frac{U_1 - U}{n} + \ldots + \frac{U_n - U}{n} = 0,$$

quedando probada la convergencia a cero del paréntesis del último miembro de [V-3]. También por *b*) es $\lim \dfrac{V_1 + \ldots + V_n}{n} = V$, por lo que siempre existirá el límite de [V-3] para $n \to \infty$, y será igual a U.V.

Así, podemos afirmar que *es suficiente suponer convergentes las series factores* Σu_n, Σv_n, *para que la serie producto por la regla de* CAUCHY *tenga siempre la media aritmética de sus n primeras sumas parciales convergente al producto* U.V *de las sumas* $U = \Sigma u_n$ *y* $V = \Sigma v_n$.

La existencia del límite del primer miembro de [V-3] *no implica* la de W_n (cfr. § 22-6, ej. 5), pero si además suponemos dicha serie producto convergente, su suma W habrá de ser, por *b*), igual al límite de dicho primer miembro de [V-3], y el teorema de ABEL queda demostrado.

g) *Algoritmos generales de convergencia y sumación.* — La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$, que se obtiene de la serie geométrica

[V-4] $$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad (|x| < 1),$$

para $x = -1$, o la sucesión de sus sumas parciales $\{s_n\} = 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, no son convergentes. Tampoco lo son la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$, obtenida (§ 22-6, ej. 3) de:

[V-5] $$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots, \qquad (|x| < 1),$$

para $x = -1$, o la sucesión de sus sumas parciales $\{s_n\} = 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ Sin embargo, antes de la definición clásica de CAUCHY (§ 22-1, *a*; § 20-1), que en la forma expuesta en el texto precisó el concepto de convergencia, LEIBNIZ, D. BERNOULLI y EULER asignaban a dichas series los valores $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente, lo que es justificable dentro de un cierto orden de ideas, como ahora veremos. Intuitivamente, podemos suponer extendido a $x = -1$ el valor bien definido de los primeros miembros de [V-4] y [V-5], para calcular la llamada *suma de* ABEL de las series desarrolladas en los segundos miembros de dichas desigualdades. Sin embargo, $\Sigma (-1)^n$ no sólo se deduce de $(1-x)^{-1}$, sino también de

[V-6]
$$\frac{1 + x + \ldots + x^{m-1}}{1 + x + \ldots + x^{n-1}} = \frac{1-x^m}{1-x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{m+n} + x^{2n} - \ldots, \quad (m < n),$$

que para $x = 1$ daría para suma de $\Sigma (-1)^n$ cualquier valor m/n.

LAGRANGE dió ya una explicación intuitiva de este hecho, al observar las "lagunas" que tiene la serie de potencias [V-6], y así para $m = 2$, $n = 3$, la [V-6] es $1 + 0.x - 1.x^2 + 1.x^3 + 0.x^4 - 1.x^5 + \ldots$, y por lo tanto, 2/3 debe ser asignado no a la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, sino a la $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + - \ldots$ cuyas "sumas", *a priori*, no tienen por qué ser iguales.

Modernamente se han sistematizado estos métodos funcionales, así como otros aritméticos, mediante la transformación de TOEPLITZ, *a*), que da una síntesis de los más usados en Análisis. Si una serie, o lo que es lo mismo, la sucesión de sus sumas parciales $\{s_n\}$, no es convergente, puede suceder que mediante una transformación "lineal" del tipo [V-1], la sucesión $\{t_n\}$ resulte convergente, dando así cada matriz T un *método de sumación* o de *convergencia generalizada* más amplio que el definido por CAUCHY en § 20-1 y § 22-1, *a*). La *condición de consistencia* exige que si $\{s_n\}$ es convergente a s, según la definición clásica, la sucesión transformada $\{t_n\}$ sea también convergente clásicamente hacia el mismo límite s. Una transformación T que para *toda* $\{s_n\}$ convergente cumple esta condición, se llama *regular*. La importancia de la transformación de TOEPLITZ radica en que las condiciones a_1), a_2), a_3) con $\tau = 1$, no tan sólo son *suficientes*, como asegura el teorema *a*-2) para que una transformación [V-1] sea regular, sino que también son *necesarias* (cfr. *Divergent series*, de G. H. HARDY, citado en nota IV-2). Por lo tanto, cualquier método de sumación de series no convergentes, consistente con el clásico, y obtenido mediante una transformación "lineal" [V-1], habrá de venir dado por una matriz T que cumpla a_1), a_2), a_3) con $\tau = 1$.

La transformación por medias aritméticas vista en *b*), fué estudiada en forma completa y sistemática por E. CESÀRO (1890). El método de sumación (C, 1) consiste en transformar $\{s_n\}$ en $\{t_n\}$, con $t_n = \dfrac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$

y así resulta que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es sumable (C, 1) hacia $\frac{1}{2}$, pues

$$s_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}; \quad t_n = \frac{1}{2} + \frac{1 + (-1)^{n-1}}{4n} \to \frac{1}{2}$$

De la misma manera, en *f*) hemos demostrado que el producto por la regla de CAUCHY de dos series convergentes, $\Sigma u_n = U$, $\Sigma v_n = V$, es siempre sumable (C, 1) hacia U.V. Esto ya demuestra (§ 22-6, ej. 3) que la serie $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$ es sumable (C, 1) hacia $\frac{1}{4}$.

Si se pone $s_n = s_n^{(0)}$, $s_n^{(k)} = s_1^{(k-1)} + \ldots + s_n^{(k-1)}$; $A_n^{(0)} = 1$, $A_n^{(1)} = A_1^{(0)} + A_2^{(0)} + \ldots + A_n^{(0)}$, ..., $A_n^{(k)} = A_1^{(k-1)} + \ldots + A_n^{(k-1)}$, puede reiterarse el método de CESARO, diciendo que la sucesión $\{s_n\}$ es sumable **(C, *k*)** al límite s si $s_n^{(k)}/A_n^{(k)} \to s$ para $n \to \infty$. Según *a*), teorema 2, la sumabilidad (C, *k*) implica la (C, *k* + 1).

Otros muchos métodos de sumación, debidos a O. HOLDER, M. RIESZ, L. EULER, etc., se aplican también frecuentemente en Análisis superior.

h) *Aceleración de la convergencia.* — Otra de las aplicaciones de las transformaciones [V-1], importante para el cálculo numérico mediante series, es la de buscar una sucesión transformada $\{t_n\}$ que converja hacia el límite de $\{s_n\}$ más rápidamente que ésta. Esto quiere decir que una determinada acotación del resto (§ 22-1, *g*) para la $\{t_n\}$ pueda hacerse desde un valor de n mucho más bajo que para la $\{s_n\}$, y por lo tanto, que sea factible alcanzar un determinado grado de aproximación prácticamente inasequible con la serie dada a pesar de su convergencia teórica. Así, por ejemplo, para calcular ln 2 con seis cifras exactas (Nota II, *b*), mediante la serie [22-40], necesitaríamos calcular la suma parcial de un millón de términos (§ 22-3, *a*), mientras que mediante una adecuada transformación, puede obtenerse la aproximación deseada con sólo siete términos.

II. Aritmética decimal de los números aproximados. — *a*) *Error absoluto. Redondeo.* — La expresión decimal de todos los números, racionales e irracionales (§ 7-3), ofrece la ventaja de uniformar los cálculos, pues todas las operaciones se efectúan como si los datos fuesen enteros; pero en cambio tiene el grave inconveniente de exigir infinitas cifras, no sólo para representar a los números irracionales, sino también los racionales, cuyos denominadores tienen factores distintos de 2 y 5. Es forzoso, pues, para operar con tales números, prescindir de las infinitas cifras desde una de ellas en adelante, con lo cual los resultados dejan de ser exactos. Si a esto se agrega que los datos experimentales, resultados de medidas, están afectados siempre por errores, de los que sólo se conoce un número al cual se mantienen inferiores en valor absoluto, se comprende la necesidad de un estudio especial de los números aproximados.

Designaremos por A′, B′, C′, ..., los valores aproximados conocidos de los números desconocidos A, B, C, ... (valores exactos); las diferencias:

$$\Delta A = A' - A, \quad \Delta B = B' - B, \quad \Delta C = C' - C, \ \ldots$$

entre los valores aproximados y los exactos, se llaman *errores absolutos.* Sus opuestos se llaman *correcciones*: son lo números que hay que agregar a los valores aproximados para obtener los exactos: $A' + (-\Delta A) = A$.

El símbolo Δ se lee: "*error de*" o "*incremento de*".

Se dice que la aproximación es *por exceso* o *por defecto*, según que el error sea *positivo* o *negativo.*

Como los errores ΔA, ΔB, ..., son desconocidos, en cada caso daremos números positivos $\Delta^* A$, $\Delta^* B$, ..., llamados *límites superiores de error* o *cotas de error*, a los que dichos errores se conservan inferiores en valor absoluto: $|\Delta A| < \Delta^* A$, etc.

Suelen adoptarse como límites de error las unidades decimales sucesivas: 1/10, $1/10^2$, ... o las unidades de orden superior 10, 10^2, 10^3, ..., según se trate de errores menores o mayores que 1.

DEF.: Si en la expresión decimal de un número se reemplazan por ceros todas las cifras que siguen a una de ellas, diremos que el número se ha *redondeado* al orden de la última cifra conservada. El redondeo será:

1º) *Por defecto*, si esta última cifra no se altera.

2º) *Por exceso*, si ésta se incrementa en 1 (con la posible repercusión sobre las anteriores, cuando es 9).

3º) *Al valor más próximo*, si es por defecto o por exceso, según que la cifra siguiente sea < 5 ó $\geqq 5$.

EJEMPLO 1. Para el número 10π se tienen los redondeos siguientes, de los cuales los subrayados son al valor más próximo:

Por defecto: $\underline{3.10}$; $\underline{31}$; $\underline{31{,}4}$; 31,41; 31,415; ...

Por exceso 4.10; 32; 31,5; $\underline{31{,}42}$; $\underline{31{,}416}$; ...

TEOR. FUNDAMENTAL: *En todo redondeo (redondeo al valor más próximo), el error no supera una unidad (media unidad) del orden decimal correspondiente.*

En efecto, si el número A tiene la expresión $E, a\,b \dots k\,l \dots$, se verifica (§ 7-3):

[V-7] $$E, a\,b \overset{n}{\dots} k \leqq A < E, a\,b \overset{n}{\dots} (k+1);$$

luego, cada uno de estos dos números extremos difiere de A menos que ellos entre sí, es decir, menos que una unidad decimal de orden n.

Consideremos la cifra siguiente, l; si es $l < 5$, sustituyendo en vez del tercer miembro el término siguiente, más aproximado: $E, a\,b \overset{n+1}{\dots} k\,(l+1)$, resulta:

$$A - E, a\,b \overset{n}{\dots} k < 0{,}0 \overset{n+1}{\dots} 0\,(l+1) \leqq 0{,}0 \overset{n+1}{\dots} 5.$$

Si es $l \geqslant 5$, sustituyendo el primer miembro de [V-7] por el término siguiente, más aproximado: $E, a\,b \overset{n+1}{\dots} k\,l$, resulta:

$$E, a\,b \overset{n}{\dots} (k+1) - A \leqq 0, 0 \overset{n+1}{\dots} 0\,(10-l) \leqq 0, 0, \overset{n+1}{\dots} 5.$$

Un método más preciso es no redondear a la última cifra, sino conservar la *aproximación acotada*, indicando entre paréntesis a la derecha del valor aproximado, la cota de error en unidades de la última cifra escrita; así $1{,}1872 \pm 0{,}0023 = 1{,}1872\,(23)$. También puede emplearse la *acotación dual* $1{,}1849 < x < 1{,}1895$, escrita a veces $\begin{bmatrix} 1{,}1895 \\ 1{,}1849 \end{bmatrix}$, recomendable si se dispone de una máquina de calcular. Es el método aplicado en las operaciones con números reales (§ 7-5), pero tomando sólo una aproximación por defecto y otra por exceso; ello obliga a duplicar el número de operaciones a efectuar.

b) *Cifras exactas de un número aproximado.* — DEF.: Se dice que un número tiene *exactas* todas sus cifras, cuando su error absoluto es en módulo inferior a una unidad del orden de la última de ellas.

Muchas veces se escriben sólo las cifras exactas de un número, multiplicadas por la potencia de 10 que corresponda.

Si la aproximación es por defecto, estas n cifras exactas figuran todas en la representación decimal indefinida del número; pero si es por exceso, la última es superior en una unidad. Sin embargo, precisado bien el sentido de la definición, no puede dar origen a confusiones.

EJEMPLO 2. Todos los números del ejemplo 1 son valores aproximados de 10π, con todas sus cifras exactas.

b_1) Cuando se conoce el sentido de la aproximación de un número, es fácil hallar otro, con el mismo límite de error, y que tiene todas sus cifras exactas, de acuerdo con el siguiente teorema, cuya demostración es inmediata:

Si el error absoluto de un número es por defecto (exceso), y menor que una unidad decimal de cierto orden, redondeando a dicho orden por exceso (defecto) se obtiene un número que tiene exactas todas sus cifras.

c) *Error relativo de un número aproximado.* — La cuantía del error absoluto no mide bien el grado de exactitud de las aproximaciones; esto se logra más bien conociendo el error que corresponde a cada unidad.

DEF.: Se llama *error relativo*, el cociente del error absoluto por el valor exacto. Por lo tanto, el error absoluto es igual al relativo multiplicado por el número.

Designaremos así los errores relativos:

$$[V\text{-}8] \qquad \alpha = \frac{\Delta A}{A}, \quad \beta = \frac{\Delta B}{B}, \quad \gamma = \frac{\Delta C}{C}, \quad \ldots,$$

y por α^*, β^*, γ^*, ..., los *límites superiores* o *cotas de error relativo*, es decir, números positivos cualesquiera a los que se conservan inferiores los valores absolutos de α, β, γ, ...: $|\alpha| < \alpha^*$, etc.

De la definición resulta:

c_1) *El error relativo de un número no varía al multiplicar o dividir éste por un número cualquiera.* Por lo tanto, podemos correr arbitrariamente la coma, y lo más cómodo es suprimirla, así como la potencia de 10 ó los ceros no indicadores de cifras exactas que queden a la derecha, en los números que tienen exactas todas sus cifras, resultando entonces el error absoluto menor que 1.

c_2) La dificultad que se presenta para acotar el error relativo, es el desconocimiento del valor exacto A que figura en el denominador; por esto, y por comodidad del cálculo, se adopta como denominador un número sencillo, que seguramente sea *menor* que A, para obtener así un límite *superior* del error relativo.

c_3) La misma dificultad se presenta al pasar de la cota del error relativo a la del absoluto.

Si supiéramos que el valor A', comprendido entre 10^n y 10^{n+1}, está aproximado por exceso, podríamos asegurar que es $\Delta A < A \,.\, \alpha$; pero si la aproximación es por defecto, o no se conoce su sentido, la acotación anterior no vale. Ocurre entonces redondear por exceso a la primera cifra exacta del número aproximado, y como el número así obtenido $(a+1)\,10^n$ supera al valor exacto de A, tenemos: *el límite del error absoluto es menor que el límite del relativo multiplicado por* $(a+1) \,.\, 10^n$.

EJEMPLOS: 3. Si el número 75425,43 ha resultado de una medición realizada con un aparato que da un error inferior a media centésima por unidad, el error absoluto será $\varepsilon_1 < 80000 \cdot \dfrac{0{,}01}{2} = 400$, y el número 75000 tiene, por lo tanto, dos cifras exactas, pues la suma de los dos errores no llega a 1000.

4. Si el error relativo del número 0,01901 es menor que 0,001, solamente puede asegurarse la exactitud de las cifras 0,0190; pero si el error es menor que $\dfrac{0{,}001}{2}$, son exactas todas las cifras 0,01901. ¿Por qué?

d) *Problemas fundamentales.* En el cálculo con números aproximados surgen inmediatamente dos cuestiones de importancia fundamental:

d_1) *Problema directo.* Cuando se realizan determinados cálculos sobre números aproximados, ¿cuál es el grado de aproximación del resultado? En otras palabras: ¿en qué medida influyen los errores en los datos sobre el error del resultado?

d_2) *Problema inverso.* Si se desean resultados con una determinada aproximación, ¿qué grado de aproximación debe exigirse para los datos? Y en particular, si éstos se dan en forma de números decimales, ¿cuántas cifras decimales deben conocerse o tomarse en cada caso?

e) *Errores en las operaciones aritméticas.* — e_1) *El error absoluto de una suma algebraica* $A' \pm B' \pm \ldots \pm L'$ *de números aproximados es la suma* $\Delta A \pm \Delta B \pm \ldots \pm \Delta L$, *análogamente formada con sus errores.*

En efecto, de las igualdades

$$A' = A + \Delta A, \quad B' = B + \Delta B, \quad \ldots, \quad L' = L + \Delta L,$$

resulta:

$$A' \pm B' \pm \ldots \pm L' = (A \pm B \pm \ldots \pm L) + (\Delta A \pm \Delta B \pm \ldots \pm \Delta L).$$

En realidad no se conocen los errores, sino solamente cotas de los mismos, pero del teorema anterior resulta en virtud de (§ 7-7):

El error absoluto de una suma algebraica es menor que la suma de las cotas de error de sus términos: $\Delta^* A + \Delta^* B + \ldots + \Delta^* L$.

EJEMPLO 5. Si $A' = 3{,}24$; $B' = 5{,}17$; $C' = 6{,}43$, se han obtenido por redondeo al valor más próximo, ¿con cuántas cifras decimales exactas puede tomarse la suma?

Como las cotas de error de redondeo son, por *a*), $\Delta^* A = \Delta^* B = \Delta^* C = \frac{0{,}01}{2} = 0.005$, el error de la suma 14,84, tendrá por cota 0,015, con lo cual el resultado exacto estará comprendido entre $14.84 - 0{,}015 = 14{,}825$ y $14{,}84 + 0{,}015 = 14{,}855$, y se lo conoce con sólo *tres* cifras exactas.

e_2) El error relativo de un producto $A' B'$ *de dos números aproximados* A' *y* B', *cuyos errores relativos son* α *y* β, *es* $\alpha + \beta + \alpha\beta$.

En efecto, de las igualdades:

$$A' = A + \Delta A, \quad B' = B + \Delta B,$$

resulta:

$$A' B' - A B = B \cdot \Delta A + A \cdot \Delta B + \Delta A \cdot \Delta B,$$

y dividiendo por el valor exacto A B del producto, resulta el error relativo:

[V-9] $$\varepsilon = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{A \cdot B}{\Delta A \cdot \Delta B} = \alpha + \beta + \alpha\beta.$$

De aquí resulta que una cota del error relativo es:

[V-10] $$\varepsilon^* = \alpha^* + \beta^* + \alpha^* \beta^*$$

e_3) El error relativo de un cociente A'/B' *de dos números aproximados, cuyos errores relativos son* α y β, *es exactamente* $\frac{\alpha - \beta}{1 + \beta}$.

En efecto, de las igualdades

$A' = A + \Delta A$, $B' = B + \Delta B$ resulta: $\frac{A'}{B'} - \frac{A}{B} = \frac{B \cdot \Delta A - A \cdot \Delta B}{B(B + \Delta B)}$,

y dividiendo por el cociente exacto A/B, resulta el error relativo:

[V-11] $$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta A}{A} - \frac{\Delta B}{B}}{1 + \frac{\Delta B}{B}} = \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta}.$$

De aquí resulta que una cota del error relativo es:

[V-12] $$\varepsilon^* = \frac{\alpha^* + \beta^*}{1 - \beta^*}$$

e_4) El error relativo de la raíz cuadrada de un número A', *cuyo error relativo es* α, *vale exactamente*:

[V-13] $$\varepsilon = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha} + 1},$$

Basta hacer las siguientes sencillas transformaciones:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{A + \Delta A} - \sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \sqrt{1 + \alpha} - 1 = \frac{(1 + \alpha) - 1}{\sqrt{1 + \alpha} + 1} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha} + 1}$$

De [V-13] resulta que una cota del error relativo es

[V-14] $$\varepsilon^* = \frac{\alpha^*}{1 + \sqrt{1 - \alpha^*}}.$$

e_5) *Errores aproximados.* — Como en general el error ΔA es muy pequeño *con respecto a* A, los errores relativos α, β, ..., son números suficientemente pequeños como para que cada uno de ellos respecto a la unidad, o su producto respecto a cada uno de ellos, sea prácticamente despreciable. Resultan así, de [V-9] y [V-10], los siguientes valores aproximados para el error relativo de un producto, y su cota:

[V-15] $\varepsilon_a = \alpha + \beta;$ $\varepsilon^*_a = \alpha^* + \beta^*$

Análogamente resulta para el cociente y la raíz:

[V-16] $\varepsilon_a = \alpha - \beta;$ $\varepsilon^*_a = \alpha^* + \beta^*$

[V-17] $\varepsilon_a = \frac{\alpha}{2};$ $\varepsilon^*_a = \frac{\alpha^*}{2}$

EJEMPLOS: 6. Dados los números 31,416 y 3,464, valores aproximados de 10π y de $\sqrt{12}$, en menos de 0,001, hallar el producto con la mayor aproximación:

Los errores relativos son menores que $\frac{1}{30000}$ y que $\frac{1}{3000}$ respectivamente; luego, el producto 108,825024 tiene una cota práctica de error relativo :

$$0{,}000034 + 0{,}00034 = 0{,}000374,$$

y el error absoluto es menor que $0{,}000374 \times 200 = 0{,}0748$. Por lo tanto, son exactas las cifras 108,8.

7. Calcular el cociente de dos números cuyos valores aproximados en menos de una unidad del último orden son: 0,6802 y 5,20.

Efectuada la división por regla ordinaria o con la máquina de calcular, resultan las cifras 0,1308...

$$\frac{1}{6000} + \frac{1}{500} < 0{,}0027; \qquad \Delta^* < 0{,}00054;$$

luego el cociente, con error menor que una unidad de su último orden, es 0,131, pues al prescindir de la cifra 8, incrementando el 0, el error no llega a 0,0003, y sumado con Δ^* no llega a 0,001.

8. Sean el dividendo y el divisor 8141 y 0,0802 aproximados en menos de media unidad de su último orden.

Las primeras cifras del cociente son 101508...

$$\frac{1}{2.8\,000} + \frac{1}{2.800} < 0{,}00007 + 0{,}0007 = 0{,}0008; \qquad \Delta^* < 160;$$

luego, el cociente con tres cifras exactas es 101000.

9. Calcular la raíz cuadrada del número 0,0820, cuyas cifras son todas exactas.

Aplicando la regla ordinaria obtenemos las cifras 0,2863 ..., cuyas cotas de error relativo y absoluto son:

$$\varepsilon^* < 0{,}0007; \qquad \Delta^* < 0{,}0002;$$

luego, la raíz en menos de una milésima es 0,286.

10. Calcular la raíz cuadrada de un número cuyo valor aproximado menos de una unidad de su último orden es 17,02.

Aplicando la regla ordinaria resulta 4,125 ..., cuyas cotas de error relativo y absoluto son:

$$\varepsilon^* < 0{,}0005; \qquad \Delta^* < 0{,}0025;$$

luego, son exactas las cifras 4,12.

f) Problema inverso. — Dados varios números exactamente, o con cuanta aproximación se desee, calcular el resultado de una operación aritmética entre ellos, con aproximación prefijada, tomando de cada uno el menor número posible de cifras exactas.

De c_1) y b_1) resulta, inmediatamente:

f_1) Para obtener la suma de varios sumandos (cuyo número no exceda de 10), con error absoluto menor que una unidad de cierto orden, se toman los sumandos por defecto, con una cifra más. En el resultado se prescinde de la última cifra y se incrementa en 1 la anterior.

En efecto, el error de la suma es inferior a 10 unidades de su último orden, es decir, una unidad del penúltimo, y basta aplicar b_1) para tener todas las cifras exactas.

f_2) Para calcular la diferencia de dos números con error absoluto menor que una unidad de orden prefijado, se toman ambos por defecto o ambos por exceso, con cifras exactas hasta la de este orden.

Porque el error del resultado es la diferencia entre dos números de igual signo, inferiores a la unidad prefijada, y por lo tanto, es en valor absoluto menor que ella.

f_3) Para obtener con n cifras exactas el producto o el cociente de dos números, basta tomar cada uno con $n+1$ cifras exactas ($n+2$ si la primera es 1 ó es la única significativa), en tal sentido que el resultado sea aproximado por defecto; y se redondea luego por exceso a la cifra anterior.

En efecto, siendo el error relativo de cada dato menor que $\dfrac{1}{2.10^n}$, prácticamente, según c_3), es $1/10^n$ cota de error relativo del resultado; luego, su error absoluto es menor que una unidad del orden de la cifra n-sima, y se redondea según b).

f_4) Para obtener con n cifras exactas la raíz cuadrada de un número, basta tomar $n+1$ cifras exactas por defecto, calculando en la raíz hasta la cifra n-esima, que se incrementará en 1.

En efecto, siendo menor que $1/10^n$ el error relativo del número, será también cota de error relativo de la raíz obtenida por defecto, según [V-13], y por lo tanto, el error absoluto es inferior a una unidad del orden de la cifra n-sima, redondeando según b).

EJEMPLO 11. Calcular con dos cifras exactas la excentricidad del meridiano terrestre:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \text{ siendo } a = 6377397\,m, \quad b = 6356079\,m.$$

Tomando, por defecto, $a+b$ y $a-b$ con cinco cifras exactas, obtenemos:

$$(a+b)(a-b) = 12\,733\,000 \times 21\,318 = 271\,442\,094\,000,$$

es decir 2715.10^8, que tiene exactas sus cifras; su raíz cuadrada 521.10^3, según f_4), tiene exactas sus cifras; dividiendo por 638.10^4 e incrementando la segunda cifra significativa del cociente, resulta: $e = 0{,}082$.

g) Operaciones abreviadas. — g_1) Los productos parciales que se escriben en la multiplicación ordinaria, pueden evitarse mediante la *regla de* FOURIER, calculando mentalmente las sumas de los productos de cifras

del multiplicando y multiplicador que dan resultados del mismo orden decimal. Además se empieza a multiplicar las cifras por la izquierda para aprovechar sólo las que dan cifras exactas, siendo útil acabar las expresiones numéricas con puntos suspensivos para guiar a la intuición.

EJEMPLO 12. Resolvamos así el ejemplo 6.

```
   3 1,4 1 6 . . .
   3,4 6 4 . . . .
 -----------------
   9 5 4 7 . . . .
   1 3 3 . . . . .
 -----------------
 1 0 8,8 . . . . .
```

A. Multiplicación.

Empezando por la izquierda: $3.3 = 9$; $3.1 + 4.3 = 15$, se escribe 5 a la derecha y el transporte 1 debajo de la cifra 9 anterior (ver esquema A); $3.4 + 4.1 + 6.3 = 34$, se escribe 4 a la derecha y el transporte 3 debajo de la cifra 5 anterior; $3.1 + 4.4 + 6.1 + 4.3 = 37$, se escribe 7 a la derecha y el transporte 3 debajo de la cifra 4 anterior; en los próximos cálculos ya intervienen cifras desconocidas. Así resulta 108,8 teniendo en cuenta que hemos despreciado al menos 12 unidades del primer orden no escrito. (Si los valores fueran exactos, el resultado parcial que sigue al 37 es 50, luego 46, etc.).

g_2) Para la división abreviada, se separan grupos de 5 ó 4 cifras en dividendo y divisor y se aplica el procedimiento inverso al anterior.

EJEMPLO 13. Sea $43\,572\,945\,359 \div 7\,436\,891$. Se divide 43572 por 7436 (marcando con un punto superior las últimas cifras y así sucesivamente, esquema B), con cociente 5 y resto 6392. Dividiendo éste por 743 decenas da 8 con resto 448 decenas a las que se adjunta 9 para restar $5.8 + 8.6$ con resto 4401. Dividido éste por 743 da 5 con resto 686 decenas a las que se adjunta 4 para restar $5.9 + 8.8 + 5.6$ con resto 6725. Dividido éste por 743 da 9 con resto 38 decenas a las que se adjunta 5 para restar $5.1 + 8.9 + 5.8 + 9.6$ con resto 214. Dividido éste por 743 da 0 con resto 214 decenas a las que se adjunta 3 para restar $8.1 + 5.9 + 9.8 + 0.6$ con resto 2018. Dividido éste por 743 da 2 con resto 532 decenas a las que se adjunta 5 para restar $5.1 + 9.9 + 0.8 + 2.6$ con resto 5227. Dividido éste por 743 da 7 con resto 26 decenas a las que se adjunta 9 para restar $9.1 + 0.9 + 2.8 + 7.6$ con resto 202. Si nos detenemos aquí y queremos obtener el resto exacto, de 202 habrá que sustraer $0.1 + 2.9 + 7.8$ décimas y $2.1 + 7.9$ centésimas y 7.1 milésimas, dando 193,943 correspondiente al orden de la última cifra 9 del dividendo. El lugar de la coma en el cociente depende de los que tenga en dividendo y divisor, lo que se averigua redondeando.

```
 43 572 945 359   | 7 436 891
  6 392           |-----------
    448 9         | 5 859 027
  — 8 8           |
 --------         |
    440 1         |
     68 64        |
   — 1 39         |
 ---------        |
     67 25        |
        385       |
      — 171       |
 ---------        |
        214 3     |
      — 12 5      |
 ---------        |
        201 8     |
         53 25    |
          - 98    |
 ---------        |
         52 27    |
            269   |
          — 67    |
 ---------        |
            202   |
          — 7 457 |
          —   6   |
 ---------        |
 Resto = 193,943  |
```

B. División.

Si algunas sustracciones parciales complementarias no pueden realizarse por haber ensayado una cifra demasiado grande, para no perder el trabajo realizado, podría proseguirse con algunos restos por exceso (—) y algunas cifras del cociente subsiguientes negativas señaladas éstas su-

periormente, como se hace con las características de los logaritmos. Como en éstos, de ahí, se pasa luego fácilmente (Cap. IX, nota I, a_1) a cifras por defecto. Hay que señalar cuidadosamente el signo de los restos, que disminuyen si son por exceso al bajar nuevas cifras.

Para efectuar la división abreviada, también puede multiplicarse por el recíproco del divisor hallado en tabla adecuada o si tiene pocas cifras, por el siguiente procedimiento rápido de CAUCHY:

EJEMPLO 14. Si se busca el recíproco de 52, se determinan las dos primeras cifras y el resto se indica a la derecha en unidades de la última cifra escrita: $1/52 = 0{,}019 + 12/52$. Este último cociente se efectúa multiplicando ambos miembros por dicho resto 12 y procediendo reiteradamente para obtener tantas nuevas cifras como se desee:

$$12/52 = 0{,}228 + 144/52 = 0{,}230 + 40/52 \quad ;$$
$$40/52 = 0{,}760 + 480/52 = 0{,}769 + 12/52 \quad ;$$
$$12/52 = 0{,}230 + 40/52 \quad ; \quad \text{etc.}$$

Resulta: $1/52 = 0{,}019\,230\,769\,230\ldots$ En el ejemplo 7 hubiese bastado multiplicar abreviadamente $0{,}6802 \,.\, 0{,}1923$.

III. **Fracciones continuas.** — *a) Definiciones.* — No siempre es apropiada la expresión decimal de un número (§ 7-3) para el estudio de su naturaleza aritmética; este estudio queda frecuentemente facilitado si se utiliza la representación del número en fracción continua. Sea x un número *real positivo*. Si no es un número natural, sea $a_0 = [x]$ la *parte entera* de x, es decir, el menor de los dos enteros entre los que x está comprendido. Puede escribirse:

[V-18] $$x = a_0 + \frac{1}{x_1}\,; \quad x_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1.$$

Si x es racional e igual a la fracción irreducible a/b, x_1 es de la *forma* b/r_1 con $r_1 < b$, pues a_0 será entonces el cociente entero por defecto (§ 5-1) de $a:b$, es decir:

[V-19] $$a = b \,.\, a_0 + r_1; \qquad x_1 = \frac{b}{r_1} > 1, \qquad si \qquad r_1 > 0.$$

Si x_1 no es entero, sea $a_1 = [x_1]$ la parte entera de x_1, y reiterando [V-18] será:

[V-20] $$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}\,; \qquad x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} > 1.$$

Si $x = a/b$ es racional no entero ($r_1 > 0$), será:

[V-21] $$b = r_1 \,.\, a_1 + r_2; \qquad x_2 = \frac{r_1}{r_2} > 1, \qquad si \qquad r_2 > 0.$$

Si x_2 no es entero, puede reiterarse este proceso, y al cabo de n operaciones, si $a_{n-1} = [x_{n-1}]$ es la parte entera de x_{n-1}, se tendrá:

[V-22] $$x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n}\,; \qquad x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}} > 1.$$

Si $x = a/b$ es racional, y $r_{n-1} > 0$, será:

[V-23] $$r_{n-2} = r_{n-1} \,.\, a_{n-1} + r_n; \qquad x_n = \frac{r_{n-1}}{r_n} > 1, \qquad \text{si} \qquad r_n > 0,$$

con:

[V-24] $$r_n < r_{n-1} < \dots < r_2 < r_1 < b,$$

números naturales. La cadena de desigualdades [V-24] nos dice que si x es *racional*, este proceso *terminará* antes de que n valga b, y los enteros $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ obtenidos en [V-19], [V-21], ..., [V-23] son los cocientes sucesivos del algoritmo de EUCLIDES cuando se busca el m. c. d. $a \frown b$ (§ 5-6, a). En cambio, si x es *irracional*, el proceso es *indefinido*, pues para todo n continúa x_n siendo irracional. En ambos casos escribiremos:

[V-25] $$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

o también:

[V-26] $$x = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \dots + \frac{1|}{|a_n} + \dots,$$

y más brevemente:

[V-27] $$x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots],$$

sobrentendiéndose que para x racional, llegará a ser $x_n = a_n$ número natural, y entonces se suprime $+ \dots$ en [V-26] y, $\dots$ en [V-27]. Obsérvese que si $x_n = \dfrac{r_{n-1}}{r_n} > 1$ es ya entero ($r_{n+1} = 0$), podemos adoptar $x_n = a_n$, o bien: $x_n = a_n + \dfrac{1}{1}$ con $a_n = x_n - 1 > 0$, $a_{n+1} = 1$.

Efectuar este proceso es *desarrollar* o *representar x en fracción continua ordinaria* [V-25], [V-26] ó [V-27], *finita* para x *racional*, e *indefinida* para x *irracional*. Los números *enteros* $a_0, a_1, a_2, \dots$ se llaman *cocientes incompletos*; de ellos, sólo a_0 puede ser nulo, siendo los demás *positivos*. Los números $x_1, x_2, \dots$ se llaman *cocientes completos*, nunca enteros, a menos de ser último o, eventualmente, penúltimo.

Recíprocamente, dada una sucesión finita o indefinida de *números racionales* cualesquiera, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, no nulos, excepto posiblemente a_0, de ella se deduce otra sucesión de *números racionales*:

[V-28] $$R_0 = a_0; \quad R_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}; \quad R_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}; \quad \dots;$$

$$R_n = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \dots + \frac{1|}{|a_n}; \quad \dots,$$

llamados *reducidas* de la *fracción continua* simbólicamente expresada por el último miembro de [V-25], [V-26] ó [V-27]. Si los números a_n son naturales, con sólo a_0 posiblemente nulo, la fracción continua se llama *ordinaria*. La fracción continua *finita* se llama de *orden par* o *impar*, según que el número de cocientes incompletos sea par o impar[1].

* P. PUIG ADAM ha introducido recientemente (1951) un algoritmo formado por una fracción continua cuyos cocientes incompletos son diferenciales funcionales (§ 34-1) y a la que se aplica un paso al límite continuo análogo al empleado en la noción de integral definida (§ 48-3). Sería más apropiado llamar "fracción continua" a este nuevo algoritmo y designar al clásico por "fracción escalonada" (alemán: "Kettenbrüche").

EJEMPLO 1. Sea $x = a/b = \dfrac{25\,905}{12\,405}$ considerada en § 5-6, *a*, ej.

Del algoritmo de EUCLIDES allí desarrollado, deducimos:

$$\frac{25\,905}{12\,405} = 2 + \frac{1095}{12\,405} = 2 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{360}{1095}} = 2 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{15}{360}}} =$$

$$= 2 + \frac{1|}{|11} + \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|24} = 2 + \frac{1|}{|11} + \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|23} + \frac{1|}{|1},$$

obteniendo en los dos últimos miembros un desarrollo de orden par y otro de orden impar, es decir:

$$\frac{12\,405}{25\,905} = [2, 11, 3, 24] = [2, 11, 3, 23, 1].$$

EJERCICIO: Pruébese que *todo número racional positivo admite un desarrollo único en fracción continua ordinaria de orden par y otro de orden impar.*

EJEMPLO 2: Sea $x = +\sqrt{3}$ irracional.

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1},\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{x_3},\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}.$$

No es necesario continuar el cálculo, por repetirse periódicamente los coeficientes; por lo tanto:

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots], \text{ que se indica: } \sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}].$$

b) *Reducidas.* — Expresadas mediante $R_n = p_n/q_n$, con $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, será:

$$[V\text{-}29] \begin{cases} R_0 = a_0 = \dfrac{p_0}{q_0};\quad R_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \dfrac{p_0 a_1 + 1}{q_0 a_1 + 0} = \dfrac{p_1}{q_1}; \\[2ex] R_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \dfrac{a_0\left(a_1 + \dfrac{1}{a_2}\right) + 1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}} = \dfrac{p_1 a_2 + p_0}{q_1 a_2 + q_0} = \dfrac{p_2}{q_2}, \end{cases}$$

y en general, se deduce R_n de R_{n-1}, sustituyendo en ésta a_{n-1} por $a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}$, por lo cual, si suponemos por hipótesis inductiva que:

$$[V\text{-}30] \qquad R_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \qquad \text{con} \begin{cases} p_{n-1} = p_{n-2}\, a_{n-1} + p_{n-3} \\ q_{n-1} = q_{n-2}\, a_{n-1} + q_{n-3}, \end{cases}$$

será:

$$\mathrm{R}_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-2}\left(a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}\right) + p_{n-3}}{q_{n-2}\left(a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}\right) + q_{n-3}} = \frac{(p_{n-2}\, a_{n-1} + p_{n-3})\, a_n + p_{n-2}}{(q_{n-2}\, a_{n-1} + q_{n-3})\, a_n + q_{n-2}}$$

con:

[V-31] $$\begin{cases} p_n = p_{n-1}\, a_n + p_{n-2}, \quad q_n = q_{n-1}\, a_n + q_{n-2}, \quad (n > 1)\,; \\ p_1 = p_0\, a_1 + 1 = a_0\, a_1 + 1, \quad q_1 = q_0\, a_1 + 0 = a_1; \end{cases}$$

cierta por quedar establecida para $n = 1$ y 2 en [V-29], y haber pasado por inducción (§ 2-2) de [V-30] a [V-31].

Eliminando a_n entre las [V-31], se tiene:

$$p_n\, q_{n-1} - p_{n-1}\, q_n = -(p_{n-1}\, q_{n-2} - p_{n-2}\, q_{n-1}),$$

y al ser $p_1\, q_0 - p_0\, q_1 = 1$, por inducción queda:

[V-32] $$p_n\, q_{n-1} - p_{n-1}\, q_n = (-1)^{n-1}.$$

Por lo tanto (§ 5-5), p_n y q_n son primos entre sí, y así, $\mathrm{R}_n = p_n/q_n$, dada por recurrencia según [V-31], se obtiene como fracción irreducible (§ 6-1), cuyos términos son números naturales cada vez mayores.

De [V-32] se deduce:

[V-33] $$\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}\, q_n},$$

y por lo tanto:

[V-34] $$\mathrm{R}_n = \mathrm{R}_0 + (\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_0) + \ldots + (\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_{n-2}) + (\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n-1}) =$$
$$= a_0 + \frac{1}{q_0\, q_1} - \frac{1}{q_1\, q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}\, q_n},$$

es la suma parcial de una serie alternada (§ 22-3, a), que tiene por límite x, pues este número es elemento de separación entre las reducidas de orden impar, $\mathrm{R}_0 < \mathrm{R}_2 < \mathrm{R}_4 < \ldots$, y las de orden par, $\ldots < \mathrm{R}_5 < < \mathrm{R}_3 < \mathrm{R}_1$. En efecto, según [V-22], x se deduce de $\mathrm{R}_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$, reemplazando a_n por x_n, y aplicando [V-31], queda:

[V-35] $$x = \frac{p_{n-1}\, x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\, x_n + q_{n-2}}.$$

Por ser q_{n-1}, x_n, q_{n-2} positivos, x está comprendido (§ 6-8, b) entre $\mathrm{R}_{n-1} = p_{n-1}/q_{n-1}$ y $\mathrm{R}_{n-2} = p_{n-2}/q_{n-2}$, como habíamos afirmado.

La aproximación obtenida por R_n ($\neq x$), se acota así:

[V-36] $$|x - \mathrm{R}_n| < |\mathrm{R}_{n+1} - \mathrm{R}_n| = \frac{1}{q_n\, q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}, \quad (n \geqq 1),$$

ya que entonces, $q_n < q_{n+1}$, y tiende a cero más rápidamente que 2^{-n}, pues por [V-31] es $q_n\, q_{n+1} \geqq q_n\,(q_n + q_{n-1}) \geqq 2\, q_{n-1}\, q_n$, $(n \geqq 1)$, con $q_n > q_{n-1}$, si $n \geqq 2$.

Por lo tanto, *dada una fracción continua ordinaria indefinida por la sucesión de sus cocientes incompletos* $\{a_n\}$, *la sucesión de reducidas* $\{\mathrm{R}_n\}$ *converge hacia un número irracional positivo* x, *cuyo desarrollo en fracción continua es* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$.

Dos fracciones continuas ordinarias indefinidas son iguales cuando, y sólo cuando, tienen los mismos cocientes incompletos y en el mismo orden, ya que éstos quedan unívocamente determinados por [V-18], [V-20], ..., [V-22], ...

En resumen, *todo número irracional admite un desarrollo en fracción continua ordinaria indefinida que es único.*

El desarrollo en fracción continua tiene, pues, dos ventajas sobre el desarrollo decimal: la de ser único y la de indicar claramente la naturaleza del número. Si la fracción es *finita*, el número es *racional;* si es *indefinida*, éste es *irracional.*

Nótese que para el desarrollo en fracción continua, es indispensable tener siempre una expresión que determine el valor *exacto* de x_n, pues de lo contrario llegaríamos a obtener falsos cocientes completos.

El desarrollo completo en fracción continua de los números trascendentes (Cap. IV, nota I), ofrece muchas dificultades, no así el de los algebraicos.

c) *Teoremas de aproximación.* — c_1) *Si una fracción α/β se aproxima al número real x (racional o irracional) tanto o más que la reducida* R_n, *y es distinta de ella, tiene su denominador $\beta > q_n$ y su numerador $\alpha > p_n$.*

Para fijar las ideas supondremos que n es par; entonces se verifica:

[V-37] $$0 < x - R_n < R_{n-1} - x,$$

pues en caso de ser $x - R_n \geqq R_{n-1} - x$, sería también $R_{n-1} - R_n > R_{n-1} - R_{n+1}$, es decir, según [V-33],

$$\frac{1}{q_n\, q_{n+1}} > \frac{1}{q_{n-1}\, q_n} - \frac{1}{q_n\, q_{n+1}},$$

de donde $2\, q_{n-1} > q_{n+1}$, absurdo por [V-31].

Por hipótesis:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} - x \right| < x - R_n, \quad \text{o sea:} \quad -(x - R_n) < \frac{\alpha}{\beta} - x < x - R_n,$$

y por lo tanto [V-37]:

$$R_n - x < \frac{\alpha}{\beta} - x < R_{n-1} - x, \quad \therefore \quad R_n < \frac{\alpha}{\beta} < R_{n-1}.$$

Pero estando α/β comprendida entre las reducidas R_n y R_{n-1}, se tiene:

$$0 < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_{n-1}\, q_n};$$

el numerador de la primera diferencia es por lo menos 1; luego su denominador debe ser $q_{n-1}\,\beta > q_{n-1}\, q_n$, de donde $\beta > q_n$.

Análogamente resulta $\alpha > p_n$, pues β/α está comprendida entre las inversas de R_n y R_{n-1}.

Escolio: En esta propiedad reside una de las principales ventajas de las *reducidas*, como valores racionales de *aproximación óptima;* porque, sin acudir a fracciones de términos más complicados, no es posible lograr más aproximación.

Es interesante observar que los valores aproximados de números irracionales famosos (por ejemplo, π), dados por los matemáticos de la antigüedad, son precisamente reducidas del desarrollo en fracción continua, y por lo tanto, con términos sencillos dan la máxima aproximación (cfr. Ej. 3).

c_2) De [V-35] deducimos que si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ se conservan fijos, y x_n varía de manera que se conserve $a_n = [x_n]$, el valor de x variará entre números que continuarán teniendo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ como $n+1$ primeros cocientes incompletos. Por lo tanto: *Si dos números, x, x', tienen comunes los primeros $n+1$ cocientes incompletos, éstos lo son también del desarrollo en fracción continua de todo número comprendido entre x y x'.*

Ejemplo 3: Partiendo de:

$$3{,}141\,592\,653\,58 < \pi < 3{,}141\,592\,653\,59,$$
$$3{,}141\,592\,653\,58 = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 1, \ldots],$$
$$3{,}141\,592\,653\,59 = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \ldots],$$

podemos asegurar que:

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \ldots]$$

con reducidas calculadas según [V-31]: $R_0 = \frac{3}{1}$, $R_1 = \frac{22}{7}$, $R_2 = \frac{333}{106}$,

$R_3 = \frac{355}{113}$, $R_4 = \frac{103\,993}{33\,102}$, $R_5 = \frac{104\,348}{33\,215}$, $R_6 = \frac{208\,341}{66\,317}$, $R_7 = \frac{312\,689}{99\,532}$.

El valor de $R_1 = \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} > \pi$ fué dado por ARQUÍMEDES (—287, —212), mientras que el de $R_3 = \frac{355}{113}$, muy fácil de recordar, ya conocido en el siglo V por el chino TSU CH'UNG-CHIH, fué dado en Occidente por ADRIAEN ANTHONISZ y su hijo ADRIAEN METIUS, entre 1585 y 1625, o acaso por VALENTÍN OTTO (1573), aproximando π por exceso según [V-36] en menos de $1/(113 \cdot 33\,102) < 3 \cdot 10^{-7}$. El de $R_1 = \frac{22}{7} > \pi$ tiene una cota de error $1/(7 \cdot 106) < 0{,}002$.

c_3) T. VAHLEN ha mejorado [V-36], demostrando que *de dos reducidas consecutivas del desarrollo de x, una por lo menos verifica la desigualdad*

[V-38] $$|x - R_n| < \frac{1}{2}\frac{1}{q_n^2}.$$

como puede verse por reducción al absurdo y aplicación de la igualdad [V-36], llegando a la contradicción de ser negativo un cuadrado.

E. BOREL ha demostrado (nota IV-4) que *de tres reducidas consecutivas, una por lo menos verifica la desigualdad obtenida reemplazando en el último miembro de* [V-38] *el denominador* 2 *por* $\sqrt{5}$.

d) *Aplicaciones.* — d_1) Una fracción continua ordinaria indefinida se llama *periódica* si sus cocientes incompletos se reproducen periódicamente a partir de uno de ellos:

[V-39] $$x = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_{k+n}, a_k, \ldots, a_{k+n}, a_k, \ldots] =$$
$$= [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, \ldots, a_{k+n}}].$$

La fracción continua es *periódica pura,* si el período comienza en a_0, es decir, $k = 0$, y entonces:

[V-40] $$x = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, \ldots] =$$
$$= [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}],$$

lo que exige $a_0 > 0$. En este caso, de [V-35], para $x_{n+1} = x$, deducimos:

$$x = \frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}},$$

es decir, x es la raíz positiva y mayor que 1 de la ecuación

$$f(x) \equiv q_n x^2 - (p_n - q_{n-1})x - p_{n-1} = 0;$$

la otra raíz está comprendida entre -1 y 0, por ser (§ 26-2):

$$f(-1) = q_n - q_{n-1} + p_n - p_{n-1} > 0, \qquad f(0) < 0.$$

EJEMPLO 4: Sea $x = [c, c, \ldots] = [\overline{c}]$, con período reducido al primer cociente incompleto. Entonces: $x = c + \frac{1}{x}$, $x^2 - cx - 1 = 0$; $x = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}$. Para $c = 1$ es $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = [1, 1, 1, \ldots] = [\overline{1}]$; para $c = 2$ es $1 + \sqrt{2} = [2, 2, 2, \ldots] = [\overline{2}]$, y por lo tanto, $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$.

En general, se demuestra (v. gr. J. REY PASTOR: *Análisis algebraico*

citado en Cap. I, nota IV-1) que *un número es irracional cuadrático* (Cap. IV, nota II-*b*) *cuando, y sólo cuando, su fracción continua ordinaria indefinida es periódica* [V-39] *no necesariamente pura* (J. L. LAGRANGE). En particular, *para que la representación de un número irracional x en fracción continua ordinaria indefinida sea periódica pura* [V-40], *es necesario y suficiente que x sea mayor que* 1 *y raíz de una ecuación de segundo grado de coeficientes enteros, cuya otra raíz esté comprendida entre* -1 *y* 0 (E. GALOIS).

d_2) En la obra de O. PERRON (citada en nota IV-4) puede encontrarse el desarrollo en fracción continua ordinaria del número e (§ 8-8. c_1):

$$e = [2, 1, \overline{2+2\nu, 1, 1}]_{\nu=0}^{\infty} = [2, \overline{1, 2+2\nu, 1}]_{\nu=0}^{\infty} =$$

$$= [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots] \quad \text{(EULER)},$$

y los siguientes desarrollos notables en fracciones continuas no ordinarias:

$$e = 2 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,2} + \frac{2\,|}{|\,3} + \frac{3\,|}{|\,4} + \frac{4\,|}{|\,5} + \ldots \quad \text{(EULER, CESÀRO)};$$

$$e = 2 + \frac{2\,|}{|\,2} + \frac{3\,|}{|\,3} + \frac{4\,|}{|\,4} + \ldots.$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1.2\,|}{|\,1} + \frac{2.3\,|}{|\,1} + \frac{3.4\,|}{|\,1} + \frac{4.5\,|}{|\,1} + \ldots \quad \text{(EULER)};$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1^2\,|}{|\,2} + \frac{3^2\,|}{|\,2} + \frac{5^2\,|}{|\,2} + \frac{7^2\,|}{|\,2} + \ldots$$

(LORD BROUNCKER-WALLIS, 1655);

$$\ln 2 = \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1^2\,|}{|\,1} + \frac{2^2\,|}{|\,1} + \frac{3^2\,|}{|\,1} + \frac{4^2\,|}{|\,1} + \ldots;$$

entre otros más generales.

d_3) Una *ecuación diofántica* es (§ 15-2, *a*) una *ecuación algebraica* en una o más incógnitas (polinomios igualados a cero), con coeficientes *enteros*, de la que interesa solamente hallar las soluciones *enteras*. La más sencilla es la *ecuación lineal diofántica en dos incógnitas*:

[V-41] $$a x + b y = c,$$

donde a, b, c son enteros dados, y se desean hallar todos los pares de enteros (x, y) que satisfagan a [V-41]. Para que [V-41] tenga solución entera, es condición necesaria que el m. c. d. de a y b divida a c. Si esta condición se cumple, dividiendo ambos miembros de [V-41] por $a \frown b$, podemos suponer siempre que a y b son primos entre sí (§ 5-6, *b*). Si aplicamos el algoritmo de EUCLIDES a $|a|$ y $|b|$, para su desarrollo en fracción continua, podemos tomar $R_n = |a/b|$, y de [V-33] deducimos $R_n - R_{n-1} = (-1)^{n-1}/(q_{n-1}\,|b|)$, es decir:

[V-42] $$|a|\,q_{n-1} - |b|\,p_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

con lo cual $x_0 = \pm c\,q_{n-1}$, $y_0 = \pm c\,p_{n-1}$, tomando adecuadamente el signo, será una solución particular de [V-41]. Si (x_0, y_0) es una solución particular de [V-41], entonces es $a x_0 + b y_0 = c$, y restando de [V-41], se deduce $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, por lo cual, siendo b primo con a, ha de ser (§ 5-6, *c*):

[V-43] $$x - x_0 = b\,t, \qquad y - y_0 = -a\,t,$$

y la solución más general (x, y) de [V-41], a partir de la particular (x_0, y_0), se obtiene dando a t en [V-43] cualquier valor entero.

Ejemplo 5: Resolver diofánticamente $261\,x - 82\,y = 117$.

	3	5	2	7
261	82	15	7	1
15	7	1	0	

. Reducidas calculadas por [V-31]:

$$R_0 = 3, \quad R_1 = \frac{16}{5}, \quad R_2 = \frac{35}{11}, \quad R_3 = \frac{261}{82}$$

$$\frac{261}{82} - \frac{35}{11} = \frac{+1}{82.11}; \quad \begin{cases} x_0 = 117.11 = 1287, \\ y_0 = 117.35 = 4095. \end{cases}$$

Solución general $\begin{cases} x = x_0 + b\,t = 1287 - 82\,t, \\ y = y_0 - a\,t = 4095 - 261\,t, \end{cases}$ que por el cambio

$t = 15 - \tau$ se transforma en $\begin{cases} x = 57 + 82\,\tau, \\ y = 180 + 261\,\tau, \end{cases}$ donde las soluciones

positivas vienen dadas, en este caso, tomando $\tau \geqq 0$.

IV. **Bibliografía.** — 1. Tratados sistemáticos, completos y excelentes, sobre series, son el de K. Knopp (citado en Cap. II, nota IV, 3) y el de:

T. J. I'A. Bromwich: *An introduction to the theory of infinite series.* (2ª ed., Cambridge Univ. Press, 1926).

Las series clásicas más importantes, con multitud de ejercicios de valor histórico y actual, se estudian en

G. Kowalewski: *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen.* (Engelmann, Leipzig, 1910).

El cálculo numérico aproximado con series, estúdiase en:

C. Runge: *Theorie und Praxis der Reihen.* (Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig, 1904).

2. El tratado más completo, moderno y general sobre series no convergentes, multiplicación de series, métodos generales de sumación y sus aplicaciones funcionales, con multitud de ejemplos y notas críticas e históricas, lo constituye la obra póstuma de:

G. H. Hardy: *Divergent series.* (Oxford Univ. Press, 1949).

Complemento adecuado de esta obra es el notable libro, en gran parte consagrado al estudio de las propiedades generales de clases de transformaciones regulares de sumabilidad (nota I, *g*):

R. G. Cooke: *Infinite matrices and sequence spaces.* (Macmillan, Londres, 1950).

Una breve introducción a la teoría de sumabilidad de series es:

O. Szász: *Introduction to the theory of divergent series.* (2ª ed., Univ. of Cincinnati, 1952).

Una famosa obra de ejercitación de la mente y formación activa del pensar matemático, apropiada para la labor de seminario, que en forma gradualmente ordenada y sistemática trata importantes temas de análisis matemático, dedicando los problemas de su primera parte a sucesiones y series, y los demás a cálculo integral, teoría de funciones, polinomios, determinantes y teoría de números, es:

G. Pólya y G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* (2 vols., 2ª ed., Springer, Berlín, 1954; Dover, Nueva York, 1945).

3. Aquí hemos resumido el contenido del *Análisis algebraico* de Rey Pastor (citado en Cap. I, nota IV-1) sobre aritmética decimal de los números aproximados.

Métodos modernos de cálculo con máquinas y de cálculo aproximado en la práctica de las operaciones aritméticas elementales, están acertada y resumidamente expuestos en:

J. BABINI: *Aritmética práctica.* (Bibl. Scientia, Toledo, 1930).

Obras más completas, que contienen cálculos numéricos de índole algebraica, infinitesimal, etc., son:

M. SADOSKY: *Cálculo numérico y gráfico.* (Lib. del Colegio, Bs. As., 1952).

J. B. SCARBOROUGH: *Numerical Mathematical Analysis.* (4ª ed.; Hopkins, Baltimore; Oxford Univ. Press, Londres; 1958).

R. MONTESSUS DE BALLORE y R. D'ADHEMAR: *Calcul numerique.* (Gauthier-Villars, París, 1911).

C. RUNGE y H. KÖNIG: *Vorlesungen über numerisches Rechnen.* (Springer, Berlín, 1924).

Contiene un detenido estudio sobre cuatro procedimientos para tratar la acotación de errores en cálculos con números aproximados, sobre todo aplicados al trabajo con máquinas calculadoras, la excelente obra dedicada principalmente a la resolución práctica de los sistemas lineales de ecuaciones algebraicas (§ 15):

P. S. DWYER: *Linear computations.* (Wiley, Nueva York, 1951).

Son muy útiles para la aplicación de la Matemática, las siguientes colecciones de constantes, métodos y fórmulas:

L. ÁLVAREZ VALDÉS: *Formulario matemático.* (Dossat, Madrid, 1946);

G. SCHULZ: *Formelsammlung zur praktischen Mathematik.* (W. de Gruyter, Berlín, 1945),

este completando el más elemental:

F. RINGLEB: *Mathematische Formelsammlung.* (6ª ed., W. de Gruyter, Berlín, 1956).

4. Exposición exhaustiva, de más de 500 páginas, clara y elegantemente escrita, conteniendo un estudio profundo de la teoría de las fracciones continuas y de sus aplicaciones, es el excelente tratado monográfico de:

O. PERRON: *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* (2ª ed., Leipzig, 1929; Chelsea, Nueva York, 1950). De una tercera edición en dos volúmenes de esta obra, ha aparecido el primero: *Elementare Kettenbrüche* (Teubner, Stuttgart, 1954), con diversas mejoras y cinco nuevas secciones.

Más moderno y especializado, desde el punto de vista de la teoría de las funciones analíticas, es:

H. S. WALL: *Analytic theory of continued fractions.* (D. Van Nostrand, Nueva York, 1948).

Traducción alemana de la 2ª edic. rusa (1949), es:

A. KHINTCHINE: *Kettenbrüche* (Teubner, Leipzig, 1956).

Teoremas originales de aproximación sobre fracciones continuas contiene:

E. BOREL: *Leçons sur la théorie de la croissance.* (Gauthier-Villars, París, 1910).

Nuevas investigaciones sobre aproximaciones diofánticas con aplicación a todos los problemas de aproximación del Análisis, contiene:

P. TURÁN: *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen.* (Akad. Kiadò, Budapest, 1953).

Sobre ecuaciones diofánticas citaremos:

T. SKOLEM: *Diophantische Gleichungen.* (Ergebnisse der Mathematik, Berlín, 1938).

CAPÍTULO VI

LAS FUNCIONES REALES Y LA CONTINUIDAD

§ 23. LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

1. **Variables y constantes.** — En lo que sigue debemos distinguir entre *variables* y *constantes*. Por ejemplo: el volumen de un gas sometido a diferentes presiones; la velocidad de un cuerpo que cae, a partir del reposo; el tiempo transcurrido desde que comenzó a caer; son variables. En cambio, son constantes la temperatura de ebullición del agua a la presión de una atmósfera, el coeficiente angular de una recta dada en un sistema de coordenadas, etc.

Por lo general, indicaremos las variables con las últimas letras del alfabeto: $x, y, z, t, u, \ldots$ (a veces letras griegas ρ, θ, $\varphi, \ldots$), y las constantes, con las primeras: $a, b, c, \ldots$ (o $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$).

Daremos precisión a la noción de variable así:

DEF.: Un conjunto de números es designado por un símbolo que representa indistintamente a cada uno de ellos y recibe el nombre de *variable*. Estos números se llaman *valores* de la variable, y su conjunto, *campo de variabilidad*. La variable se llama *natural, racional, real* o *compleja*, según sean sus valores.

2. **Noción de función.** — Muchas veces, dos variables están *relacionadas entre sí de modo que a cada valor de una de ellas corresponde un valor de la otra.* En el primer ejemplo de § 23-1, a cada valor de la variable presión corresponde un valor de la variable volumen del gas.

Si consideramos ahora una expresión como:

[23-1] $$y = \tfrac{1}{2}\, x + 1$$

para cada valor asignado arbitrariamente al número variable x, queda determinado un valor para el número variable y; en otras palabras: los valores de y dependen de los de x; esto se expresa también diciendo que *y es función de x.*

Como a *x le asignamos* valores, la llamaremos *variable independiente.* En cuanto a y, sus valores dependen de los de x; por eso y se llama *variable dependiente* (o *función*).

La palabra *función* se usa tanto para designar a la *variable dependiente* como a la *relación* entre ambas variables.

El concepto de función es esencial para la formulación pre-

cisa de las leyes naturales (Cfr. Obs. E, más adelante), y en este aspecto su estudio adquiere importancia a partir del siglo XVII. Por otra parte, la Geometría analítica aclara este concepto dando la *representación gráfica* o *diagrama* de cada función. Por ejemplo, la expresión [23-1] representa en coordenadas cartesianas una recta. También la relación

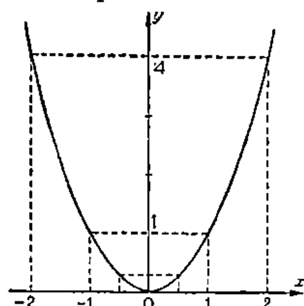


Fig. 39.

[23-2] $$y = x^2$$

expresa y como función de x. En este caso, la gráfica es una parábola de eje O y (fig. 39).

EJEMPLOS: 1. El área S de un círculo de radio r está dada por:

[23-3] $$S = \pi r^2,$$

siendo $\pi = 3{,}141\,592\,653\ldots$ una constante. Para cada valor del radio r, queda perfectamente determinado el valor del área S; luego, es función del radio, y [23-3] es la expresión analítica de dicha función. ¿Cuál es la variable independiente?

2. El área de un polígono regular es función de la longitud del lado. También es función del apotema. También es función del radio.

La determinación de puntos de la gráfica da idea de la variación de la función, pero por muchos que sean, es arriesgado enlazarlos por un trazo continuo, sin un previo estudio aritmético de la función. En cambio, hecho este estudio, bastarán unos pocos puntos para efectuar un trazado muy aproximado.

Tal estudio de las funciones, que haremos oportunamente, nos dará las propiedades fundamentales de continuidad y existencia de tangentes, que facilitan notablemente el trazado de la gráfica.

EJEMPLOS: 3. Sea la función $y = 5x^3 - 4x$.
Atribúyanse a x los valores $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, y dibújese el trazo que los une del modo que parece más directo y natural. Véase después que tal dibujo es absurdo, dando a x valores entre 0 y 1.

EJEMPLOS: 3. Sea la función $y = x^3 - 4x$.

Observaciones: A) La representación gráfica de una función puede hacerse también en otros sistemas de coordenadas (por ejemplo, coordenadas polares). Las diferentes gráficas de una misma función, en distintos sistemas, tienen aspecto y propiedades geométricas distintos. Al hablar de la gráfica de una función, la supondremos en un sistema de coordenadas cartesianas mientras no digamos lo contrario.

B) Una función puede también representarse gráficamente sin el auxilio de ningún sistema de coordenadas, por una escala rectilínea, llevando a partir de un origen O segmentos iguales a los valores de y, pero anotando en el extremo el valor correspondiente de x.

EJEMPLO 5. Cada una de las escalas que forman la regla de cálculo es una escala logarítmica, es decir, la representación gráfica de la función $y = \lg x$; pero si se quiere utilizar para el cálculo de logaritmos, debe acoplarse una escala natural que sirva para medir las distancias.

C) Hemos comenzado por considerar *dos variables* relacionadas entre sí. Puede ocurrir, sin embargo, que a todos los valores de x corresponda el mismo valor de y (por ej.: $y = a$). Convendremos por eso en dar sentido amplio a la noción de función, considerando a la constante como función de x. Para cada valor de x hay uno de y, que es siempre a. Una tal función puede llamarse *función constante*, y su gráfica es una recta paralela al eje x (fig. 40).

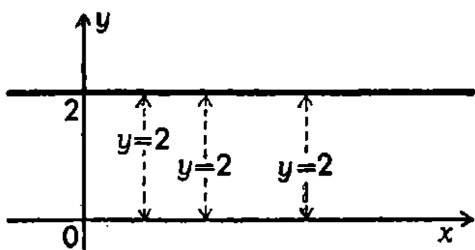


Fig. 40.

También x misma es "función de x", llamada *función identidad;* la gráfica de $y = x$ es la bisectriz de primer y tercer cuadrante.

D) *Funciones empíricas.* — La definición de una función no implica que ésta quede determinada mediante una expresión analítica tal como [23-1], [23-2] ó [23-3]. Por ejemplo, las temperaturas durante un día, en un lugar determinado, nos dan una gráfica que puede ser dibujada por un aparato registrador. Entonces se presenta el importante problema siguiente: dada una gráfica *cualquiera*, hallar una expresión matemática que la aproxime suficientemente. Por ejemplo: dada una función empírica puede presentarse el problema de determinar un polinomio cuyos valores difieran de ella en menos de 0,01 para cualquier valor de x de un cierto intervalo.

E) El valor numérico de una variable que figure en la expresión de una ley natural procede de una medida, y por lo tanto, adolece de un error; en realidad, nunca se tiene un número, sino un *intervalo* en que el valor está comprendido. Se comprende, pues, que la expresión aritmética de las leyes naturales es y será siempre *aproximada;* y por lo tanto cabe obtener multitud de expresiones para cada ley. El problema capital de las ciencias naturales exactas es obtener para cada fenómeno la *ley matemática*, esto es, la expresión *más aproximada* y *más sencilla.*

Mediciones más exactas pueden descubrir en toda ley natural errores intolerables, que obligarán a sustituirla por otra mejor.

EJEMPLO 6. El volumen de cierta cantidad de gas no sólo *depende* de la presión, sino que está *determinado* por la presión, si se supone fija la temperatura; luego, es *función* de la presión, en igualdad de temperatura.

¿Cuál es la ley natural de este fenómeno físico? Durante mucho tiempo se consideró como tal la de BOYLE-MARIOTTE, o sea: $pv =$ constante; pero las experiencias de REGNAULT (con gran escándalo de casi todos los físicos, que creían ciegamente en aquella ley) revelaron grandes discrepancias al aumentar la presión, y VAN DER WAALS dió posteriormente su ecuación más exacta. ¿Podemos, pues, rechazar la antigua ley por *inexacta* y sustituirla por la nueva, que es la *verdadera*? Sólo podemos decir que ésta expresa mejor los hechos.

3. Campo de existencia. Funciones uniformes y multiformes. Definición general de función. — La función

[23-4] $$y = \pm \sqrt{x},$$

considerada dentro del campo de los números reales, sólo está definida cuando $x \geqq 0$, es decir, la variable independiente sólo

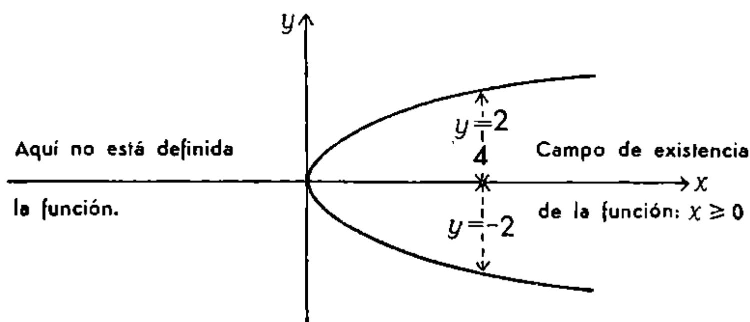


Fig. 41. — Gráfica de la función $y = \pm \sqrt{x}$, multiforme en $x < 0$.

puede variar dentro de un conjunto (de los números no negativos) que llamaremos *campo de variación de x*, o *campo de definición* o *de existencia de la función* (fig. 41).

La gráfica de esta función es una parábola, pero de eje horizontal (pues la relación [23-4] equivale a $x = y^2$). Por otra parte, para cada valor positivo de x corresponden no uno, sino dos valores de y (por ej., para $x = 4$ es $y = 2$, o $y = -2$).

Cuando a cada valor de x de un cierto conjunto corresponden varios valores de y, la función se llama *multiforme;* en caso contrario, la función se llama *uniforme.*

Estos ejemplos nos conducen a formular la siguiente definición general de función como correspondencia entre dos variables (o conjuntos), dada en forma aritmética, geométrica o totalmente arbitraria:

DEF.: *Se dice que una variable y es función de otra variable x, cuando a cada valor de x (dentro de un cierto conjunto* X llamado campo de variación de *x*) *corresponde un valor determinado de y* (función uniforme) *o varios valores de y* (función multiforme).

Este concepto amplísimo de función como correspondencia entre dos variables (o bien entre los conjuntos de sus valores) se debe a DIRICHLET (1854). En cambio, hasta comienzos del siglo XIX la palabra *función* era sinónima de *expresión aritmética*, o sea resultado de *operaciones aritméticas*, llamando así a las racionales, irracionales, o sea resolución de ecuaciones binomias ($y^n = a$), y en general, resolución de ecuaciones algebraicas, todo ello en número finito o infinito, esto es, efectuadas n veces y pasando al límite para $n \to \infty$. (Ver § 23-6).

EJEMPLOS DE FUNCIONES: 1. En la función $y = 1/(x-2)$, definida *aritméticamente*, podemos tomar como campo de definición un conjunto cualquiera de valores de x que no contenga a 2. En efecto, para $x = 2$, la fracción del segundo miembro carece de sentido, por anularse su denominador. ¿Cómo es esta función, uniforme o multiforme?

2. Está definida *geométricamente* la función $y = \operatorname{sen} x$; pero se puede expresar también, como veremos (§ 45), por una serie, es decir, por operaciones aritméticas combinadas con el *paso al límite*.

3. Está definida *arbitrariamente* la función siguiente en el intervalo $[0, 2)$:

$$y = x \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x < 1;$$
$$y = x - 1 \quad \text{para} \quad 1 \leqslant x < 2.$$

A pesar de estar dada la correspondencia por dos expresiones (y por ello se consideraba como dos funciones en la matemática euleriana), obtendremos mediante su serie de FOURIER (§§ 97 y 98, en vol. III) una sola expresión de tal correspondencia (ver, también, § 23-6, *c*). A ésta, extendida en forma análoga a todo el campo real, se la llama también *mantisa* de x. Así, descompuesto cada número real x en la forma

$$x = n + y, \qquad (0 \leqslant y < 1),$$

el entero positivo o negativo n se llama *parte entera* de x, y se designa por $E(x)$, o también por $[x]$; y la parte $y = x - [x]$ es la *mantisa*, que

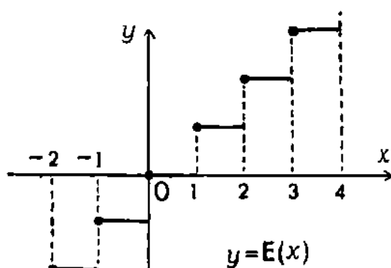


Fig. 42.

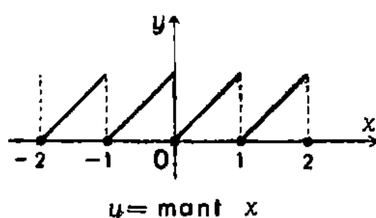


Fig. 43.

significa *sobrante*. Ambas funciones se usan mucho en el cálculo logarítmico y para fines prácticos, como muestran los taxímetros. Las gráficas son las de las figuras 42 y 43.

4. La función de DIRICHLET, definida para todo x real poniendo $y = 1$ si x es racional, e $y = 0$ si x es irracional, es imposible de representar gráficamente, y muestra cuán amplia es la definición de función dada por DIRICHLET, como correspondencia entre variables.

5. La temperatura de un enfermo en función del tiempo sólo se conoce en determinados instantes (por ejemplo, cada tres horas), y entonces el diagrama sólo consta de puntos aislados. Sin embargo, se acostumbra

unir estos puntos por una poligonal que da una idea más clara de las variaciones observadas.

6. Definamos a y como el mayor factor primo de x. Entonces y está definido sólo para valores enteros de x, y el diagrama consta de puntos aislados:

$$x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \ldots$$
$$y = 1, 2, 3, 2, 5, 3, 7, 2, 3, 5, 11, \ldots$$

7. Toda sucesión de números (§ 20-1) puede considerarse como una función: $a_n = a(n)$. El campo de existencia es el conjunto de los números naturales.

NOTA: Mientras no se advierta lo contrario, con la palabra *función* nos referiremos exclusivamente a las *uniformes*. Esta restricción está justificada, porque el estudio de las funciones multiformes se reduce al de las uniformes, considerando clasificados los valores de modo que formen varias funciones uniformes. Por ejemplo: la función multiforme (biforme) $y = \pm\sqrt{x}$ (fig. 41), puede descomponerse en las dos funciones uniformes $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, ambas definidas para $x \geqq 0$.

En este proceso de *uniformación* de una función multiforme, lo interesante está en que sus componentes no se determinen arbitrariamente, sino conservando las propiedades características que interesen en la teoría que se estudie (continuidad, derivabilidad, analiticidad, etc.).

Si se prescinde de la continuidad, es claro que la descomposición puede hacerse con gran arbitrariedad. Así, por ejemplo, para la función biforme $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, cuya gráfica es la circunferencia de radio unidad y centro en el origen de coordenadas, se podría efectuar la siguiente clasificación en dos funciones uniformes, definidas en el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

Primera función	Para x racional se toma	$y = +\sqrt{1 - x^2}$
	Para x irracional se toma	$y = -\sqrt{1 - x^2}$
Segunda función	Para x racional se toma	$y = -\sqrt{1 - x^2}$
	Para x irracional se toma	$y = +\sqrt{1 - x^2}$

Sin embargo, y muy justificadamente, la uniformación que se presenta como natural es la de considerar por separado los valores positivos $y = +\sqrt{1 - x^2}$ y los negativos $y = -\sqrt{1 - x^2}$, coincidiendo en los puntos $x = \pm 1$ ambas funciones, cuyas gráficas son, respectivamente, las semicircunferencias superior e inferior.

4. Característica de una función. Funciones de varias variables. — Si en un razonamiento cualquiera tenemos que considerar varias veces una misma función: $y = 8 - x^2$, nos convendrá indicarla con la notación abreviada

$$y = \mathrm{f}\,(x),$$

donde el segundo miembro (que se lee f de x) indica que se tiene una función de x, cuya ley de correspondencia queda designada por la *característica* f. En nuestro caso, $\mathrm{f}(x) = 8 - x^2$.

Indicaremos con $\mathrm{f}(a)$ *el valor que toma la función* $\mathrm{f}(x)$ *cuando* x *toma el valor* a: $\mathrm{f}(a) = 8 - a^2$.

Por ej.: $f(1) = 8 - 1^2 = 7$; $f(t^2) = 8 - (t^2)^2 = 8 - t^4$;
$f(x - 1) = 8 - (x - 1)^2 = 7 + 2x - x^2$.

Si ahora queremos indicar con la misma notación la función [23-1], pondremos:

$$g(x) = \tfrac{1}{2}x + 1,$$

usando otra letra como característica de la función, para distinguirla de la función anterior. Tanto $f(x)$ como $g(x)$ están definidas para todo valor de x.

Las funciones consideradas en el § 23-2, obs. C), pueden indicarse así:

$$y = h(x) = a \quad \text{(función-constante)};$$
$$y = k(x) = x \quad \text{(función-identidad)}.$$

El nombre dado a la última proviene de que la correspondencia que establece entre los valores de x y los de y es la correspondencia idéntica (§ 2-8).

Tendremos, entonces:

$$h(0) = a; \quad h(-3) = a; \quad h(\pi^2) = a;$$
y
$$k(0) = 0; \quad k(-3) = -3; \quad k(\pi^2) = \pi^2.$$

Cuando no haya peligro de confusión, usaremos la misma letra para designar la característica y la variable independiente o función, y escribiremos $y = y(x)$, $u = u(x)$, etc.

Una generalización importante del concepto de función es el de *función de varias variables*. Dadas varias variables independientes $x, y, \ldots, t$, es decir, varios conjuntos de números, si a cada sistema de valores de $x, y, \ldots, t$ corresponde uno o varios de otra variable u, se dice que u es función de aquellas variables. Esta correspondencia se representa por una característica; así, por ejemplo: $u = u(x, y, \ldots, t)$.

EJEMPLOS: 1. El área de un rectángulo es una función de las longitudes de su base y de su altura, que viene expresada así: $A = xy$.

2. La suma o producto de varios números, su media aritmética, su media geométrica, la suma de sus cuadrados, etc., son funciones de estos números.

5. **Breve reseña histórica.** — Los orígenes de la noción de función y de su influencia significativa en la evolución de la ciencia pueden fijarse en el siglo XVII. El concepto de función aparece explícitamente en LEIBNIZ (1692), y es utilizado por los BERNOULLI desde 1694. EULER (1707-1783) introdujo en 1734 el símbolo $f(x)$, y CLAIRAUT fx. El concepto general de función algebraica, incluso no expresable por radicales (§ 23-8), fué claramente definido por EULER, quien llamaba trascendentes a las funciones definidas por algoritmos indefinidos, lo que no es correcto; pero debe sobrentenderse que se refiere a las funciones definidas por series potenciales [23-8] y que no son algebraicas.

El concepto bernoulliano y euleriano de variable *y dependiente* de x, o *función* de x, coincidía con el de *expresión aritmética* formada con la variable x, y ciertos números fijos o constantes. La palabra continua significa para EULER función dada por una sola expresión.

El problema de la cuerda vibrante, resuelto por D'ALEMBERT (1747), indujo a EULER a admitir funciones arbitrarias definidas gráficamente, puesto que la forma inicial de la cuerda puede ser arbitraria. Por otra parte, dió BERNOULLI (ver § 112-7, nota 3) una expresión por serie trigonométrica a la forma de la cuerda en todo momento, y en vista de ello

hubo que suprimir esa distinción entre función matemática y función arbitraria, ya que también éstas son expresables por las operaciones aritméticas. Todo esto condujo a prescindir del modo de dar la correspondencia entre los valores de x y los de y, para atender solamente a la correspondencia en sí misma, y así quedó establecido por DIRICHLET el concepto general de función (1854) como correspondencia arbitraria entre dos variables.

6. Expresión algorítmica de funciones. — Aunque históricamente fueron las series trigonométricas (§ 98 en vol. III) las que permitieron dar expresión única a las funciones definidas por dos o más expresiones distintas, conduciendo así al concepto general de función, se puede llegar a esto mismo más sencillamente. Así, por ejemplo:

a) Para la función "valor absoluto de x" (§ 3-6),

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0; \qquad |x| = -x \quad \text{si} \quad x < 0,$$

se tiene la expresión única:

$$|x| = +\sqrt{x^2}.$$

b) Para la función llamada "signo de x":

$$\text{sg}\, x = -1 \quad \text{si} \quad x < 0; \qquad \text{sg}\, 0 = 0; \qquad \text{sg}\, x = +1 \quad \text{si} \quad x > 0,$$

que permite descomponer todo número real en producto de su valor absoluto por su signo, esto es: $x = (\text{sg}\, x) . |x|$ se tienen las expresiones únicas:

$$\text{sg}\, x = \lim \sqrt[2n-1]{x}; \qquad \text{sg}\, x = \frac{2}{\pi} \lim \text{arc tg}\, n x,$$

para $n \to \infty$.

c) Así llegamos a dar expresión única a lo que en tiempos de EULER se consideraba como dos funciones distintas: dadas las funciones $y = \text{f}(x)$ e $y = \text{g}(x)$, la expresión

$$y = \tfrac{1}{2} [\text{f}(x) + \text{g}(x)] + \tfrac{1}{2} (\text{sg}\, x) [\text{f}(x) - \text{g}(x)]$$

coincide con $\text{f}(x)$ para $x > 0$, y con $\text{g}(x)$ para $x < 0$, y da el promedio de ambas para $x = 0$ (verificarlo). Esto muestra la utilidad de la función $\text{sg}\, x$.

d) La función de DIRICHLET (definida en § 23-3, ej. 4) admite entre otras, como expresiones únicas, las siguientes:

$$\text{f}(x) = \lim_{m \to \infty} [\lim_{n \to \infty} (\cos m!\, \pi x)^{2n}],$$

$$\text{f}(x) = 1 - \lim_{m \to \infty} [\text{sg}\, (\text{sen}\, m!\, \pi x)^2],$$

como puede verse observando que si es racional $x = p/q$, entonces $m!\, x$ es entero para todo $m \geqslant q$, y que esto nunca ocurre si x es irracional.

CONCLUSIÓN GENERAL: *Lo interesante en una función no es su expresión algorítmica, que puede tener formas muy diferentes para una misma función, sino la correspondencia misma.*

7. Funciones racionales y funciones enteras. — Una función *racional* de x es la que se puede obtener *efectuando sobre la variable x solamente operaciones racionales* (suma, resta, multiplicación y división) en número finito de veces, y con números cualesquiera: $5, \pi, a^c$, etc.

Por ejemplo: $\text{f}(x) = x^4$ es una función racional, pues se construye basándose en la multiplicación solamente: $\text{f}(x) = x . x . x . x$. También son racionales las funciones:

$$g(x) = 3\,x^5 - x \log 2; \quad h(t) = \frac{\sqrt{5}\,t^4 - 2\,t}{4 - t};$$

donde las operaciones de logaritmación y radicación se han aplicado a ciertas constantes pero no a la variable independiente. En cambio, no son racionales las funciones:

$$F(x) = 4^x; \quad G(t) = 3\,t - 2 \log t; \quad K(x) = |x|.$$

Entre las funciones racionales, las más sencillas son las funciones *racionales enteras*, o sea las que se pueden obtener efectuando sobre la variable independiente x solamente las operaciones de suma, resta y multiplicación (operaciones enteras) un número finito de veces, con coeficientes numéricos cualesquiera. La expresión más sencilla de una función entera es, por lo tanto, un *monomio* o un *polinomio* en x. De las funciones que acabamos de considerar sólo son enteras $f(x)$ y $g(x)$.

EJEMPLO 1. La función

$$\varphi(x) = \frac{x^2 - 3\,x + 2}{x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2}$$

coincide *para* $x \neq 2$ con la función entera

$$\psi(x) = x - 1,$$

pero, a diferencia de $\psi(x)$, no está definida para $x = 2$. ¿Por qué?

Llamaremos *grado* de la función entera, monomio o polinomio, al mayor de los exponentes de x; entonces, la *función entera de grado n* será de la forma:

[23-5] $$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes, que pueden ser nulas, excepto $a_0 \neq 0$.

Para $n = 1$ se tiene la función de primer grado:

$$y = a_0\,x + a_1 \qquad (a_0 \neq 0),$$

llamada también *función lineal*, porque su gráfica es una línea recta. A pesar de que también es una recta la gráfica de la función-constante (fig. 40), no suele llamarse a ésta lineal, salvo convenio especial.

Para $n = 2$ se tiene la *función de segundo grado*, o *función cuadrática*:

$$y = f(x) = a_0 x^2 + a_1\,x + a_2 \qquad (a_0 \neq 0),$$

cuyo diagrama es una parábola de eje vertical.

Toda función racional se puede expresar como cociente de dos polinomios (o monomios). Las no enteras se llaman *fraccionarias*.

EJEMPLO 2. Son fraccionarias las funciones racionales

$$y = 1/x; \qquad y = (x^2 - 1)^2/(x - 2).$$

La segunda, expresada como cociente de polinomios, es:

$$y = (x^4 - 2\,x^2 + 1)/(x - 2).$$

8. **Funciones algebraicas y curvas algebraicas. Funciones trascendentes.** — *a*) Llamaremos *función algebraica explícita* de x a toda función que se pueda obtener efectuando sobre la

variable x solamente operaciones racionales y radicaciones en número finito de veces. Por ejemplo:

$$f(x) = x^2 \sqrt{x^2 - 1}; \quad g(t) = 1 - \frac{\sqrt[5]{1-t}}{t}$$

La palabra "explícita" proviene de que la definición de función algebraica es más amplia. Se dice que y es función *algebraica* de x si satisface a una ecuación de la forma:

[23-6] $$P_0(x)\, y^n + P_1(x) y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x) y + P_n(x) = 0,$$

donde $P_0(x)$, ..., $P_n(x)$ son polinomios en x. Esta condición es equivalente a:

[23-7] $$P(x, y) = 0,$$

donde $P(x, y)$ es un polinomio en dos variables.

El estudio de estas funciones es el problema fundamental del Álgebra.

Se sabe (cfr. Cap. IV, nota I. a) que toda función *algebraica explícita* verifica la condición [23-6], es decir, es algebraica.

Por ejemplo, de $y = f(x) = x^2 \sqrt{1 - x^2}$ resulta:

$$y^2 - x^4(1 - x^2) = 0,$$

ecuación de la forma:

$$P_0(x) y^2 + P_1(x) y + P_2(x) = 0,$$

con:

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -x^4 + x^6.$$

La recíproca no es cierta: *existen funciones algebraicas que no pueden expresarse como funciones algebraicas explícitas;* las llamaremos *funciones algebraicas implícitas.* Tales son, por ejemplo (Cap. IV, nota II, a), las definidas por las ecuaciones

$$y^5 - x\,y + 1 = 0, \qquad x\,y^6 - y + x = 0.$$

NOTA: Si para el valor x_0 corresponden n raíces $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación algebraica, por adecuado análisis que veremos en § 41-2, d), resultan n funciones uniformes al variar x en un entorno suficientemente pequeño de x_0; pero al ampliar éste se confunden y entrecruzan. Esto se ve más claramente en las ecuaciones que se descomponen en factores racionales; tal, por ejemplo, $y^2 - x^2 = 0$, que se descompone en $y = x$, $y = -x$. Si se parte de los valores $y_1 = +\sqrt{4} = 2$, $y_2 = -2$; y se amplía el entorno más allá del origen, el valor positivo se hace negativo, y viceversa.

b) La gráfica de una función algebraica se llama *curva algebraica.* El examen de la ecuación $P(x, y) = 0$ permite a veces deducir inmediatamente algunas propiedades de la curva:

b_1) Si todos los términos tienen coeficientes *positivos* y los exponentes son *pares,* no existe curva; porque el primer miembro toma valor positivo para todo (x, y), excepto si $x = y = 0$ y si no hay término constante, resultando punto único el origen.

Toda ecuación algebraica admite, sin embargo, soluciones complejas (x, y), que reciben el nombre de *puntos imaginarios*; y cuando no hay soluciones reales, o sólo hay número finito, se dice que representa una *curva imaginaria*; por ejemplo:

$$x^2 + y^2 = 0 \qquad 2x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

b_2) Si la y figura solamente con exponentes *pares*, al punto (x, y) de la curva corresponde también el $(x, -y)$; es decir, la curva es *simétrica* respecto del eje x.

EJEMPLO: Son simétricas respecto del eje x:

$$x^2 - 2y^2 + 3x - 1 = 0 \qquad (\textit{cónica}),$$
$$y^2(2a - x) = x^3 \qquad (\textit{cisoide}).$$

Son simétricas respecto de ambos ejes las curvas:

$$(x^2 + y^2)^2 - (a^2 x^2 + b^2 y^2) = c.$$

b_3) Si en cada término los exponentes de x, y, son ambos pares o ambos impares, al punto (x, y) de la curva corresponde el $(-x, -y)$, es decir: la curva es simétrica respecto del origen O.

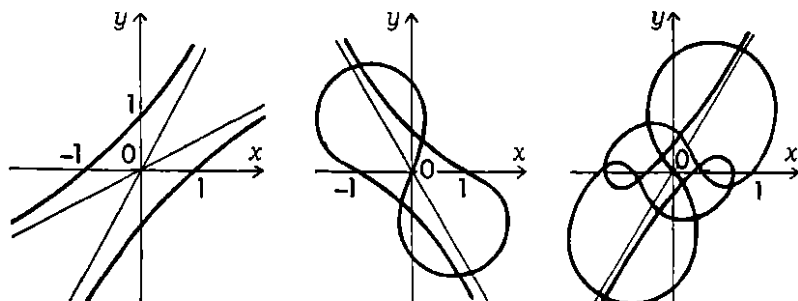


Fig. 44.

EJEMPLOS: Son simétricas respecto de O las curvas representadas en la figura 44. La 1ª es la hipérbola $2x^2 + 2y^2 - 5xy = 2$; la 3ª es de grado 25; la 2ª parecería de 5º grado, pero su ecuación, de 9º grado, es:

$$(2x + y)\ (x^2 + y^2)^4 + 2y(5x^4 + 10x^2y^2 - 3y^4) - 2x + y = 0.$$

c) La observación b_1) hace prever que el estudio de las funciones o curvas algebraicas será más sencillo y natural en el campo complejo. La definición general de función dada en el § 23-3, subsiste para una *función compleja de variable compleja* $w = \mathrm{f}(z)$, en la que $z = x + iy$, $w = u + iv$ son variables complejas.

Los polinomios son las funciones más simples y, en cierto sentido, básicas del Análisis, pues todas las operaciones finitas hasta aquí estudiadas para definir funciones (operaciones racionales, raíces y resolución de ecuaciones algebraicas) pueden reemplazarse por un algoritmo único:

[23-8] $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

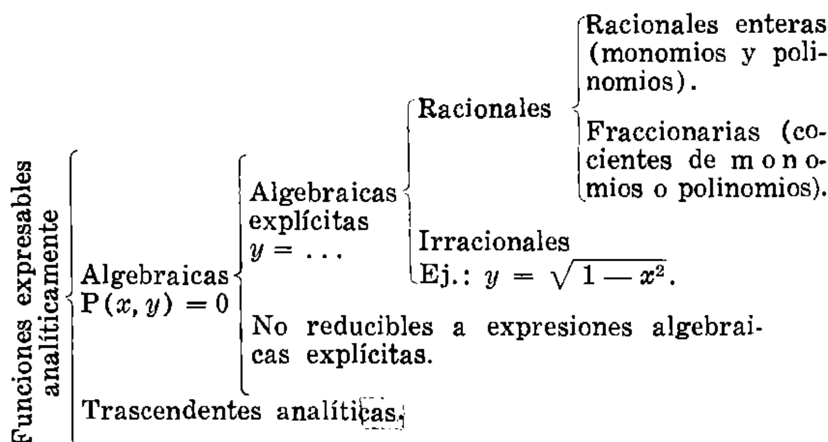
resultado de combinar la formación de polinomios con el paso al límite. Las funciones así expresables se llaman *analíticas*.

Toda función no algebraica que se pueda expresar mediante el algoritmo [23-8] se llamará *trascendente analítica*. Ejemplos:

$$\mathrm{f}(x) = 3 \log x; \quad \mathrm{g}(x) = \cos x; \quad \mathrm{h}(u) = \log \operatorname{tg} u.$$

En cambio, la función $y = \exp(1 + \ln x)$, poniendo como se acostumbra, por razones tipográficas, $e^u = \exp(u)$, aunque restringida a $x > 0$ si no queremos salir del campo real, no podría llamarse propiamente trascendente, pues en dicho campo coincide con la función lineal $y = e.x$.

Tenemos entonces la siguiente clasificación:



9. **Funciones pares e impares.** — La función $y = f(x)$ se llama *par*, cuando a valores opuestos de x corresponde el mismo valor de y: $f(-x) = f(x)$.

La función se dice *impar*, cuando a valores opuestos de x corresponden valores opuestos de y: $f(-x) = -f(x)$.

Es par $\cos x$; son impares $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje y, porque si el punto (x, y) está en la curva, también está el $(-x, y)$.

La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen O, porque si el punto (x, y) está en la curva, también está el $(-x, -y)$.

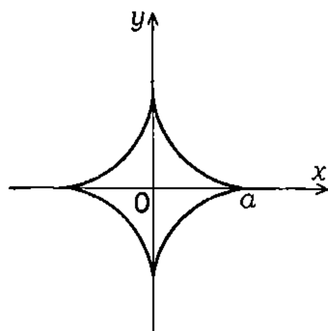


Fig. 45.

NOTA: Lo dicho en el § 23-8, *b*), vale si en vez de *potencias* pares o impares figuran funciones pares o impares, es decir: Si y figura solamente bajo funciones *pares*, la curva es simétrica respecto del eje x; si x figura solamente bajo funciones *pares*, la curva es simétrica respecto del eje y. Por ejemplo, la curva (fig. 45):

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (\textit{astroide}),$$

es simétrica respecto de ambos ejes.

Si en la ecuación polar $r = f(\alpha)$ la función es *par*, al punto (r, α) corresponde el $(r, -\alpha)$, y la curva es simétrica res-

pecto del eje x; si la función es *impar*, al punto (r, α) corresponde el $(-r, -\alpha)$, y la curva es simétrica respecto del eje y.

EJEMPLOS: He aquí tres curvas clásicas (figs. 46, 47 y 48) que tienen un eje de simetría, con sus correspondientes ecuaciones polares; compruébese en ellas el criterio enunciado para reconocer la simetría.

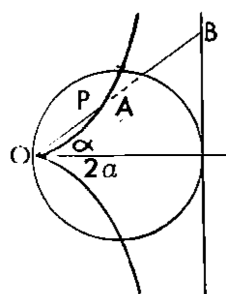


Fig. 46.

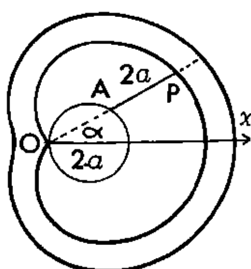


Fig. 47.

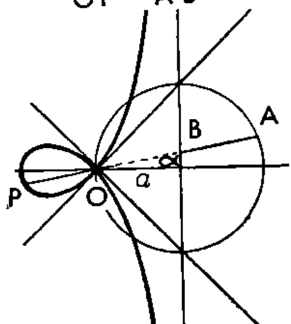


Fig. 48.

En el caso especial de los polinomios se tiene: la función es *par* si todos los términos son *de grado par;* es *impar* si sólo hay términos *de grado impar,* y no es ni par ni impar si hay términos de una y de otra clase.

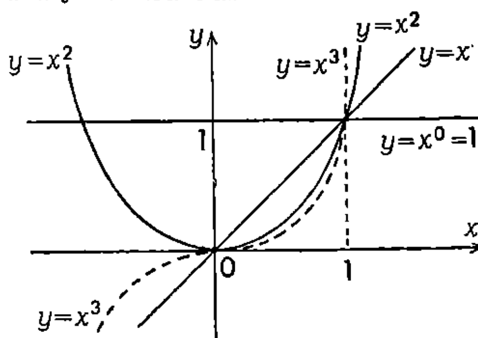


Fig. 49. — Para a entero no negativo es x^a entera.

10. **Función potencial.** — Se llama así a la función

$$y = x^a$$

que estudiaremos aquí para exponente racional, y en el § 27-4 cuando a es un *número real cualquiera.* Sólo en el caso de que a sea un número entero n: $a = n$, se obtiene una función racional, que será entera si $n > 0$; ejemplo:

$$y = x^0 = 1, \quad y = x, \quad y = x^2, \quad y = x^3,$$

que representan una recta, otra recta, una parábola, una parábola cúbica, etc. (fig. 49).

Si $a = n < 0$ es un entero negativo, la función es racional pero no entera, y está definida para los valores de x *distintos de cero;* ejemplos:

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \ (\textit{hipérbola}), \quad y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}, \text{ etc.}$$

Todas estas curvas (fig. 50) constan de dos ramas, que es-

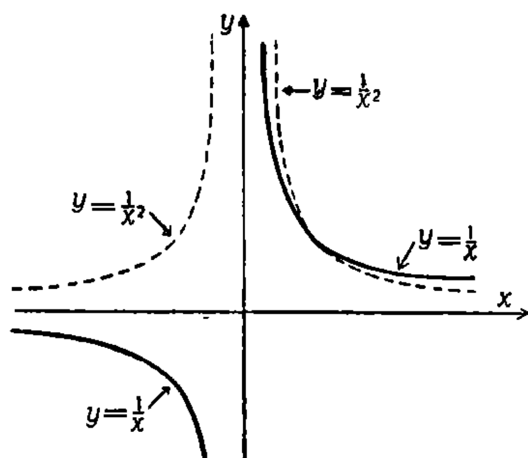


Fig. 50. — Para n entero negativo es x^n racional fraccionaria.

tán en el primer y tercer cuadrante cuando n es impar, y en el primero y segundo cuando n es par. (¿Por qué?).

Si a es un número fraccionario, la función *no es racional;* por ejemplo, las funciones:

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \ y = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$$

no son racionales, y representan una parábola y una curva llamada *parábola semicúbica* (fig. 51).

La función: $y = x^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ no está definida para $x = 0$.

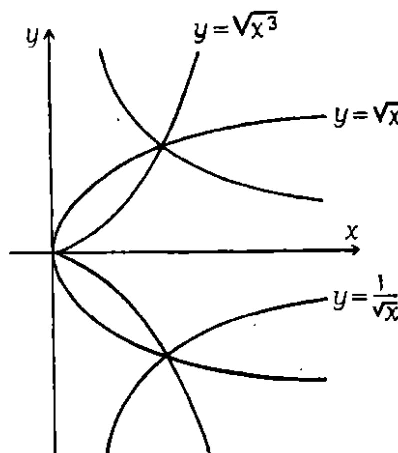


Fig. 51.

Notemos que en todos los casos considerados, la curva pasa por el punto (1, 1). ¿En qué casos pasa por el origen? ¿Cuándo por (0, 1)? (Cfr. § 25-3). ¿Qué otra cosa puede ocurrir cuando $x = 0$? Obsérvese en las gráficas de este apartado, cuáles corresponden a funciones pares, y cuáles a funciones impares.

11. Funciones crecientes o decrecientes. — Para funciones reales de variable real se puede formular la siguiente definición:

Diremos que una función $y = f(x)$ es *estrictamente creciente en un punto* x_0, cuando existe un número $\delta > 0$ tal que

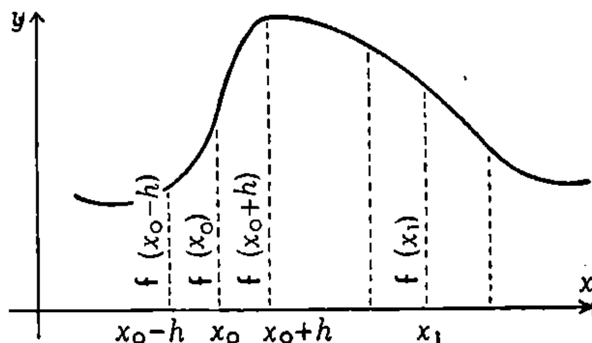


Fig. 52. — Función creciente en $x = x_0$ y decreciente en $x = x_1$.

para todo h que cumpla la condición $0 < h < \delta$ se tiene (figura 52):

[23-9] $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$,

y *estrictamente decreciente en* x_0 cuando:

[23-10] $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$.

Si en [23-9] la condición se expresa mediante $\leqq \ldots \leqq$, la función se llama *creciente* (en sentido amplio). Análogamente para función *decreciente.*

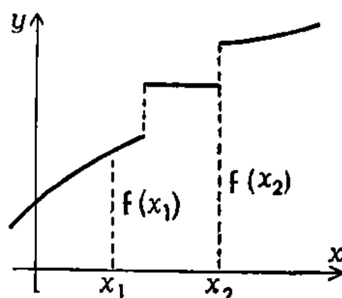


Fig. 53. — Función monótona creciente.

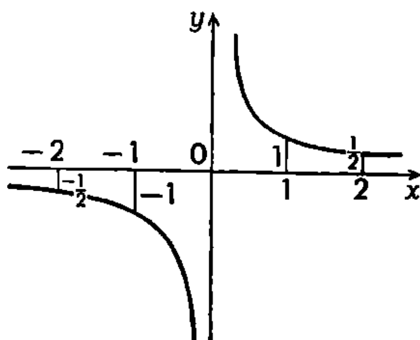


Fig. 54. — $y = 1/x$, decreciente pero no monótona.

Ejercicios: 1. Verificar, aplicando la definición anterior, que la función $y = f(x) = x^2$ (gráfica fig. 39) es creciente en $x_0 = 1$, decreciente en $x_0 = -1$ (hallando los máximos valores para δ), y que no es creciente ni decreciente en $x_0 = 0$.

2. Efectuar un estudio análogo para las funciones parte entera y mantisa (§ 23-3, ej. 3).

Una función se llama *creciente* (o *decreciente*) *en un in-*

tervalo, cuando lo es en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Una función $y = f(x)$ tal que, dentro de su campo de definición, cumpla la condición $f(x_1) \leq f(x_2)$ para $x_1 < x_2$, se llamará *monótona creciente* (fig. 53); si en cambio un aumento de x nunca origina un aumento de y, la función se llamará *monótona decreciente*. La función se llama *estrictamente monótona* si se cumple $f(x_1) < f(x_2)$ [ó $f(x_1) > f(x_2)$], para $x_1 < x_2$.

12. **Funciones inversas.** — De $y = x^2$ resulta $x = \pm\sqrt{y}$, lo que nos muestra que la correspondencia entre las dos variables puede considerarse de dos maneras diferentes, y se expresa diciendo que la *función inversa* de

[23-11] $$f(x) = x^2$$

es:

[23-12] $$g(y) = \pm\sqrt{y}.$$

En este caso, la función dada está definida para todo valor de x y es uniforme, pero la función inversa ofrece un comportamiento más complicado, porque por una parte no está definida para todo valor de y, y por otra, es multiforme.

En cambio, si la función dada es estrictamente monótona, lo que no ocurre en el ejemplo anterior, para cada valor de y hay un solo valor de x, y en consecuencia, la función inversa es uniforme.

Es inmediato que la función inversa de [23-12] es [23-11], pues recíprocamente, de $x = \pm\sqrt{y}$ resulta $y = x^2$. Por esta razón, ambas funciones pueden llamarse simplemente *inversas entre sí*.

EJEMPLOS: Análogamente, son inversas entre sí las funciones lineales:

$$y = h(x) = 2x - 3; \qquad x = k(y) = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2},$$

y también las funciones:

$$V = f(r) = (4/3)\pi r^3; \qquad r = g(V) = \sqrt[3]{3V/4\pi},$$

de las cuales la primera expresa el volumen de una esfera en función del radio, y la segunda expresa el radio en función del volumen (por ejemplo, permite medir el radio de una esfera por inmersión en el líquido de una probeta graduada).

Dada la función $y = f(x)$, el hecho de que la correspondencia entre las dos variables pueda considerarse de dos maneras no basta para asegurar siempre que x sea función de y, y menos aún función uniforme; *solamente cuando cada valor de y corresponda a valores aislados de x*, esta correspondencia de y a x recibe el nombre de *función inversa*, que se compone de varias uniformes, según hemos visto.

DEF.: Se dice que una función $y = y(x)$, definida en un intervalo $[a, b]$, admite *función inversa uniforme* en el intervalo correspondiente $[y(a), y(b)]$ ó $[y(b), y(a)]$, cuando sus

valores llenan éste una sola vez; esto es: cada punto y de él es correspondiente de uno, y sólo uno, de $[a, b]$, el cual se toma como correspondiente a aquél para definir dicha función inversa $x = \mathrm{x}(y)$.

Una misma gráfica representa una función y su inversa, según cuál de las variables se tome como independiente y cuál como función (fig. 55 *a*).

La función inversa de una función potencial es también función potencial (con exponente recíproco del primero), excepto para el caso de exponente nulo, pues $y = x^0 = 1$ no tiene función inversa. ¿Por qué? ¿Tiene función inversa la función parte entera de x: $\mathrm{E}(x)$?

Es costumbre, al hacer la inversión, permutar las letras x e y, de tal modo que x represente la variable independiente. Así, por ejemplo, diremos: la función inversa de la $y = x^2 - 1$ es la $y = \sqrt{x+1}$. En este caso, las gráficas superpuestas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz $y = x$. ¿Por qué? (fig. 55 *b*).

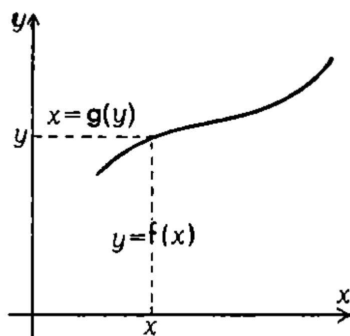


Fig. 55 *a*.

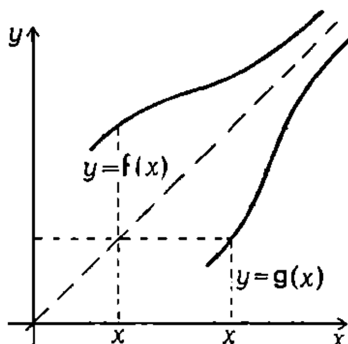


Fig. 55 *b*.

13. **Función de función.** — La dependencia de y respecto de x puede expresarse a través de una variable auxiliar u. Si tenemos:

[23-13] $$y = \mathrm{f}\ (u),$$

siendo:

[23-14] $$u = \mathrm{g}\ (x),$$

para cada valor de x tendremos, por [23-14], un valor de u, y para este valor de u, por [23-13], uno de y; luego, y es función de x.

Reemplazando la expresión de u dada por [23-14] en [23-13], se tiene:

[23-15] $$y = \mathrm{f}\ [\mathrm{g}\ (x)],$$

lo que pone más en evidencia que y es función de x, y además justifica el nombre *función de función*.

Recíprocamente, una función complicada se puede descom-

poner a veces como función de función para tener funciones más simples, y esto es lo que haremos con frecuencia.

Por ejemplo, la función $y = \operatorname{sen}(x^3)$ se puede descomponer así:

$$y = \operatorname{sen} u, \quad \text{siendo} \quad u = x^3.$$

En cambio, $y = \operatorname{sen}^3 x$ se descompondrá así:

$$y = u^3, \quad \text{siendo} \quad u = \operatorname{sen} x.$$

A veces se emplean más variables intermedias; por ejemplo, la función $y = \ln \operatorname{tg} x^2$ se descompondrá así:

$$y = \ln u, \quad u = \operatorname{tg} v, \quad v = x^2,$$

y la función $y = \sqrt{\ln \operatorname{tg}^2 x}$, así:

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \ln v, \quad v = w^2, \quad w = \operatorname{tg} x.$$

Teniendo en cuenta los campos de existencia de las funciones, debemos formular con más precisión el concepto de función de función, así:

Si los valores de una función $u = g(x)$ definida en un conjunto X pertenecen al campo de existencia de otra $y = f(u)$, es decir, si a cada valor x de X corresponde uno de u, y a éste uno de y, es y función de x en X, y se llama *función de función*. Designándola con F, se tiene $y = f[g(x)] = F(x)$.

EJEMPLO: Si es $y = \log u$; $u = \operatorname{sen} x$, resulta $y = \log(\operatorname{sen} x)$, solamente definida en el campo real para valores que hacen positivo el seno, es decir, para $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, con k entero cualquiera. En cambio, $y = \sqrt{u^2 - 1}$ no es función de x en el campo real, pues de los valores de u sólo ± 1 pertenecen al campo de existencia de y.

14. Cotas y extremos de variables o conjuntos reales. — *a)* Las consideraciones que preceden nos muestran la importancia que tiene el campo de existencia de una función, lo que justifica estudiar el comportamiento de una variable real x, cuyo campo de variación (§ 23-3), indicaremos con X.

Se dice que la variable real x (o el conjunto X) está *acotada superiormente* si sus valores no superan a un número fijo K, es decir, $x \leqq K$; y se dice que está *acotada inferiormente*, si existe un número k tal que $x \geqq k$ (para todo $x \in X$). Diremos que x está *acotada*, cuando lo está en ambos sentidos: $k \leqq x \leqq K$. Los números fijos k y K se llaman *cotas* (inferior y superior, respectivamente).

Por ejemplo: si $|x| \leqslant K$, los números $-K$ y K son cotas inferior y superior. Pero también lo son $-K-1$ y $K+3$.

El campo de existencia en el campo real de $\log x$ está acotado inferiormente, pero no superiormente. Cotas inferiores son 0 o cualquier número negativo. En cambio, el conjunto formado por los valores funcionales no está acotado ni inferior ni superiormente.

Una variable acotada superiormente puede carecer de valor máximo; por ejemplo: el conjunto de los números negativos carece de máximo, pues cero no pertenece a él. Pero existe un número que sustituye al máximo, y se llama *extremo superior.*

DEF.: Se llama *extremo superior* M de una variable acotada superiormente, *al menor de los números no superados por ella*. Está, entonces, caracterizado por esta doble condición:

α) Para todo x es $x \leqq$ M.

β) Dado M′< M, existe algún $x >$ M′.

Análogamente se define el *extremo inferior* de una variable x acotada inferiormente, como *el mayor de los números que no superan a ningún valor de x.*

La existencia de extremo superior para las variables acotadas superiormente se demuestra en forma constructiva (es decir, conjuntamente con un procedimiento para determinarlo), formando un par de sucesiones monótonas contiguas (o un encaje de intervalos). Como podrá verse, el proceso es aplicable para hallar cifras sucesivas de aproximación del punto buscado. Se parte de un intervalo de amplitud 1, cuyo extremo superior sea la menor cota superior entera del conjunto. (¿Por qué existe siempre?). Dividido el intervalo en diez subintervalos iguales no rampantes, se toma como segunda aproximación del encaje el situado más a la derecha entre los subintervalos *cerrados* que contienen algún punto del conjunto, y se sigue así indefinidamente. El encaje de intervalos así construído representa en forma decimal el extremo superior buscado M, por cumplirse (α) y (β).

Análogamente se construye el extremo inferior de una variable acotada inferiormente.

b) Cuando alguno de los extremos de la variable x o del conjunto X pertenece a éste, diremos que es *accesible;* e inaccesible en caso contrario. Usaremos, como sinónimos:

Máximo = extremo superior *accesible.*

Mínimo = extremo inferior *accesible.*

EJEMPLOS: El extremo superior inaccesible de los números negativos es cero; el extremo inferior inaccesible de los positivos es cero. Los valores de sen x tienen máximo 1 y mínimo —1. Los de $1/n$ (n entero positivo) tienen máximo 1 pero no tienen mínimo; el extremo inferior, inaccesible, es cero.

Si la variable x no está acotada superiormente (inferiormente), convendremos en decir que *su extremo superior es* $+\infty$ (*su extremo inferior es* $-\infty$). Este convenio es muy útil; con él, de la demostración anterior resulta el enunciado general: *Toda variable real tiene dos extremos, finitos o infinitos, accesibles o inaccesibles.*

Nótese que la palabra *extremo* concuerda, en el caso del intervalo, con el significado especial que para ellos tenía (§ 7-7), y ahora podemos decir que el paréntesis cuadrado significa extremo accesible, y el redondo, inaccesible.

Los extremos superior e inferior son los elementos que hemos llamado *supremo e ínfimo* en un conjunto parcialmente ordenado. (Ver Cap. I, nota I).

EJERCICIOS

1. Representar la función: $y = f(x) = 4x^3 - x$: *a*) Dando a x valores enteros, entre -2 y $+2$; *b*) Dando a x valores de 1/4 en 1/4, entre -1 y $+1$.

2. Gráficas de las funciones: $|x - 2|$, $|x - 2| - |x|$, $x[1/x]$, $[x]/x$, $\sqrt{x - [x]}$.

3. Probar que si $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, es $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

4. Probar que las expresiones algorítmicas: $\lim_{n\to\infty} (\cos \pi x)^{2n}$ y $1 + [x] + [-x]$ definen una misma función, y representarla.

5. Probar que las funciones $\lim_{n\to\infty} \cos^{2n+1} \pi x$ y $[1 - x] - [x]$ coinciden en los puntos del intervalo cerrado $[0, 1]$, y sólo en ellos.

6. Estudiar y representar las funciones:
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \cos^n \pi x, \quad g(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}^{2n} \pi x, \quad h(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}^n \pi x.$$

7. Probar que toda función $f(x)$ definida para todo x es suma de una función par y de una función impar.

8. Trazar el diagrama de $y = x^3$, y basándose en él, gráficamente, el de $y = \sqrt[3]{x}$.

9. Probar que mediante las gráficas de $f(x)$, de $g(x)$ y de $y = x$ puede construirse la de $f[g(x)]$, así: Dado el punto A sobre el eje Ox, se traza por él una paralela a Oy, hasta cortar a $y = g(x)$ en B; por B, la paralela a Ox, hasta cortar a $y = x$ en C; por C, la paralela a Oy, hasta cortar a $y = f(x)$ en D; y por D, la paralela a Ox, hasta cortar a AB en E; este último es un punto de la gráfica buscada.

10. Construir, por el procedimiento anterior, la gráfica de la función de función $y = \ln \frac{x-1}{x+1}$. ¿Cuál es su campo de existencia?

11. Determinar los extremos inferior y superior de los siguientes conjuntos, estableciendo si pertenecen o no a ellos ($m, n = 1, 2, 3, \ldots$):

a) Las fracciones irreducibles con cuadrado $\leqq 10$ y denominador par;

b) $\left\{n \pm \frac{1}{n}\right\}$; *c*) $\left\{n \pm \frac{1}{3}\right\}$; *d*) $\left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right\}$; *e*) $\left\{\pm \frac{1}{m} \pm \frac{1}{n}\right\}$;

f) Los números decimales de parte entera nula, expresados con un número finito de cifras 1, 2, 3;

g) Los números decimales de parte entera nula, con (infinitas) cifras decimales todas impares.

§ 24. EL LÍMITE FUNCIONAL

1. **El límite de una función.** — El concepto de límite de una sucesión de números (§ 20-1) tiene uno similar y tanto o más importante que él: el límite de una función $f(x)$, cuando la variable x tiende a un valor dado.

Se dice que la función $f(x)$ se aproxima infinitamente al **valor** l, **o converge o tiende hacia** l, **o tiene el límite** l, al tender x hacia a, y se **escribe:**

$$f(x) \to l \quad \text{o} \quad \lim f(x) = l \quad \text{para } x \to a,$$

o bien:

$$\underset{x \to a}{f(x) \to l} \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a} f(x) = l,$$

cuando la diferencia $f(x) - l$ se hace arbitrariamente pequeña, con tal de tomar x suficientemente próximo a a.

EJEMPLO 1. Es:

[24-1] $$\lim (x^2 + 2) = 6 \quad \text{para} \quad x \to 2,$$

pues $x^2 + 2$ puede hacerse *arbitrariamente próximo* a 6 con tal de tomar x *suficientemente próximo* a 2. Puede conseguirse, por ejemplo, que la diferencia $(x^2 + 2) - 6$ sea en valor absoluto menor que un centésimo:

[24-2] $$|(x^2 + 2) - 6| < 0{,}01,$$

con tal que x difiera de 2 en menos de dos milésimos:

$$1{,}998 < x < 2{,}002, \quad \text{ó} \quad |x - 2| < 0{,}002;$$

en efecto, cuando x crece desde $2 - 0{,}002 = 1.998$ hasta $2 + 0{,}002 = 2{,}002$, $x^2 + 2$ crece desde

$$(1{,}998)^2 + 2 = 5{,}992\,004 > 5{,}99$$

hasta

$$(2{,}002)^2 + 2 = 6{,}008\,004 < 6{,}01.$$

El número 0,002 se ha determinado teniendo en cuenta que [24-2] es equivalente a $3{,}99 < x^2 < 4{,}01$, y que $\sqrt{3{,}99} < 1{,}9975$; $\sqrt{4{,}01} > 2{,}0024$.

Pero esto no basta para que valga [24-1]. Es preciso que la aproximación indicada en [24-2] pueda mejorarse tanto como se quiera; en otras palabras: que dado un número positivo *arbitrario* (por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}000\,001$), se pueda hallar un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$|(x^2 + 2) - 6| < \varepsilon$$

con tal que

$$0 < |x - 2| < \delta.$$

Estas consideraciones nos conducen a formular con precisión el concepto de límite, así:

DEF.: *Diremos que* $f(x)$ *tiene límite* l *al tender* x *hacia* a, *y escribiremos*:

$$\lim f(x) = l \quad \text{para} \quad x \to a,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *tal que*:

[24-3] $$|f(x) - l| < \varepsilon$$

para

[24-4] $$0 < |x - a| < \delta.$$

Llamando *entorno reducido* de un punto a a cualquier entorno de a excluído el mismo punto a, la definición anterior equivale a decir que $\lim f(x) = l$ para $x \to a$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entorno reducido [24-4] del punto a tal que $f(x)$ está definida en todo punto de él y se verifica [24-3].

Gráficamente, esto significa que dentro de la "faja horizontal" del plano (x, y), comprendida entre $y = l - \varepsilon$, e $y = l + \varepsilon$, están todos los puntos del trozo de gráfica que corresponde al entorno reducido [24-4] (fig. 56).

Observemos que con la indicación $x \to a$ decimos que x se aproxima indefinidamente al valor a, pero puede tomar valo-

res *menores o mayores* que a, es decir, puede acercarse a a por la izquierda o por la derecha.

Como en un entorno *reducido* es $x \neq a$, en la definición de límite no intervienen más que los valores de la función $y = f(x)$

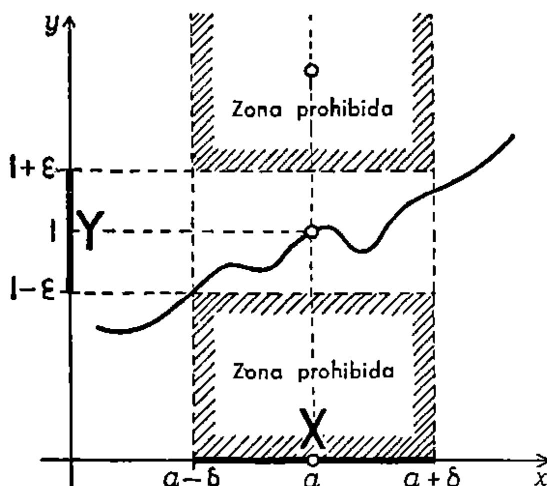


Fig. 56. — Interpretación gráfica de lim f $(x) = l$ para $x \to a$.

en la proximidad de $x = a$, pero no el mismo valor a, en el cual la función puede no tener valor ninguno, o tener un valor cualquiera. En consecuencia:

Dos funciones que son iguales para todos los valores de x distintos del $x = a$, tienen el mismo límite para $x \to a$.

Por lo tanto, es legítimo, antes de calcular el límite, hacer en la función todas las simplificaciones convenientes, incluso la supresión de factores comunes que se anulan para $x = a$, siempre que éstos no se anulen para otros valores de x próximos a a.

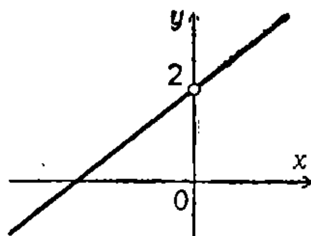


Fig. 57.

EJEMPLO 2. Sea la función $y = (x^2 + 2x) : x$. Su límite para $x \to 0$ es 2, puesto que para todo valor $x \neq 0$ es $y = x + 2$ (fig. 57), y por lo tanto: $y - 2 = x$ llega a ser tan pequeño como se quiera: luego, lim $(x^2 + 2x) : x = 2$. Sin embargo, para $x = 0$ la función no tiene valor correspondiente, pues carece de sentido aritmético dividir por cero.

EJERCICIO: Estúdiese en la misma forma la función $\varphi(x)$ considerada en el § 23-7, ej. 1. ¿Existe lim $\varphi(x)$ para $x \to 2$? ¿Existe $\varphi(2)$?

El límite de una función puede no existir, y por otra parte, una función puede alcanzar infinitas veces su límite mientras

x no alcanza el valor a. Los ejemplos que siguen ilustran estas dos circunstancias.

EJEMPLO 3. Representar gráficamente la función $y = \text{sen}\, \pi/x$ (fig. 58). Obsérvese que al tender x a 0, y oscila indefinidamente, sin tender

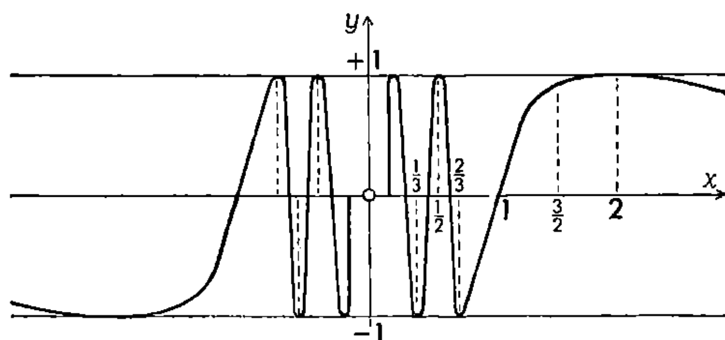


Fig. 58.

hacia ningún valor fijo; por lo contrario, toma infinitas veces todos los valores entre -1 y $+1$. El símbolo lim para $x \to 0$, aplicado a esta función, carece por lo tanto de sentido. Sin embargo, para $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ la correspondiente sucesión de valores funcionales tiene límite aritmético igual a cero.

EJEMPLO 4. Análogamente, si se representa la función $y = x . \text{sen}\, \pi/x$ (fig. 59), las ordenadas de la función anterior están multiplicadas por x.

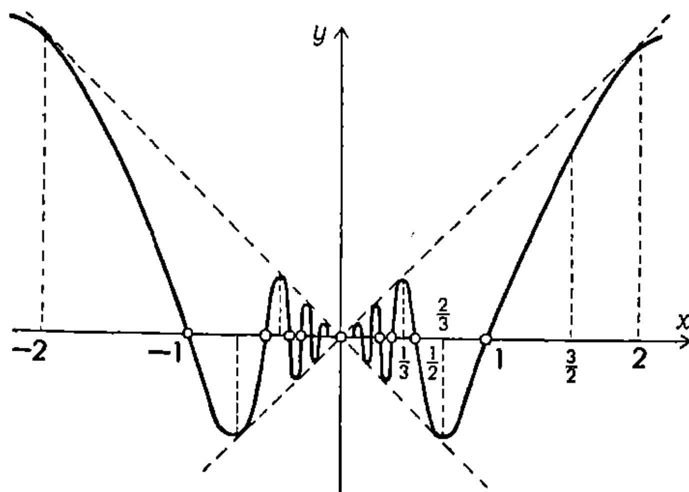


Fig. 59.

que va disminuyendo; las infinitas ondas de altura 1 decrecen y quedan entre las dos bisectrices de los ejes, puesto que el coeficiente angular de la cuerda que une cada punto con O es $y : x = \text{sen}\, \pi/x$, y por lo tanto

oscila entre -1 y $+1$; es decir: el ángulo oscila entre $-\pi/4$ y $+\pi/4$.
En este caso es:

$$\lim x \operatorname{sen} \pi/x = 0 \quad \text{para} \quad x \to 0,$$

pues, en valor absoluto, la diferencia con el límite es:

$$| x \,.\, \operatorname{sen} \pi/x | \leqq | x |,$$

y por lo tanto, llegará a ser menor que ε con sólo tomar $| x | < \varepsilon$.

En este caso, la función alcanza infinitas veces su límite. Otro tanto ocurre en el ejemplo más simple de la *función-constante* (§ 23-2, obs. C), cuyo límite es el valor constante de la función, o más brevemente: *El límite de una constante es la misma constante.*

2. **Propiedades de los límites.** — a) Si $l = \lim f(x)$ es positivo, como $f(x)$ difiere de l en menos de l para x suficientemente próximo a a, es $f(x) > 0$. Análogamente, si l es negativo, resulta $f(x) < 0$. Es decir: *Para x suficientemente próximo al valor a, la función tiene el mismo signo que su límite.*

COROLARIO: Si $l > c$, como $f(x) - c$ tiene límite $l - c > 0$, será para x suficientemente próximo a a: $f(x) - c > 0$, es decir, $f(x) > c$.

b) *Si dos funciones tienen límites distintos para $x \to a$, la de mayor límite supera a la otra para todo x suficientemente próximo a a.*

Basta aplicar a) *a la diferencia* $f(x) - g(x)$ entre esas funciones.

COROLARIO: *Si para todo valor de x es $f(x) < g(x)$, y ambas funciones tienen límite, entonces es:*

$$\lim f(x) \leqq \lim g(x) \,.$$

Porque si fuese: $\lim f(x) > \lim g(x)$, llegaría a ser $f(x) > g(x)$, contra la hipótesis.

ESCOLIO: Nótese que no excluímos la posibilidad de que los límites sean iguales, a pesar de que sea siempre $f(x) < g(x)$.

Por ejemplo, es constantemente $-[1 - x^2] < x^2$, siendo $[u]$ la función parte entera de u (§ 23-3, ej. 3), y sin embargo, para $x \to 0$, el límite de ambas funciones es cero.

c) Si $f(x)$ está comprendida entre dos funciones $g(x)$ y $h(x)$, que tienen el mismo límite para $x \to a$, la diferencia entre $f(x)$ y l está comprendida entre las diferencias $g(x) - l$ y $h(x) - l$; luego, será menor que ε en valor absoluto si éstas lo son. Por lo tanto: *Si una función está comprendida entre otras dos que tienen el mismo límite para $x \to a$. tiene este mismo límite.*

3. **Infinitésimos.** — Decir que para $x \to a$.

[24-5] $$\lim f(x) = l,$$

equivale, como vimos, a decir que la diferencia

[24-6] $$\varphi(x) = f(x) - l,$$

que es una nueva función de x, tiene límite cero para $x \to a$:

[24-7] $$\lim \varphi(x) = 0.$$

Esto nos señala la importancia que tiene para el cálculo de límites la consideración de las funciones con límite cero, y la conveniencia de dar un nombre a tales funciones.

Llamaremos *"infinitésimo o infinitamente pequeño para $x \to a$"*, a toda función $\varphi(x)$ que tienda a cero para $x \to a$; es decir, que verifique [24-7].

Por ejemplo, $\cos x$ es infinitésimo para $x \to \pi/2$, pero no lo es para $x \to 0$.

La condición esencial del infinitésimo es la *variabilidad* y tener por *límite* 0. Hablar de *números* no nulos infinitamente pequeños es un contrasentido, porque siendo un número invariable, si no es nulo no puede llegar a ser menor que cualquier otro número, que es la condición esencial del infinitésimo.

De [24-6] resulta:

[24-8] $$f(x) = l + \varphi(x),$$

es decir: *toda función con límite es igual a éste más un infinitésimo, y recíprocamente: si a una constante se le suma un infinitésimo, la función obtenida tiene por límite dicha constante* *.

a) Valen las siguientes propiedades, cuyas demostraciones son inmediatas.

a_1) *La suma de dos infinitésimos* (ambos para $x \to a$, lo mismo que en los enunciados que siguen) *es un infinitésimo*: de

[24-9] $$\lim \varphi(x) = 0.$$

y

[24-10] $$\lim \psi(x) = 0,$$

resulta:

[24-11] $$\lim [\varphi(x) + \psi(x)] = 0.$$

De aquí resulta, por inducción completa: la suma de un número *finito* de infinitésimos es un infinitésimo. En cambio, si la suma es infinita, nada podremos afirmar.

EJEMPLO 1. La suma $x + x + \ldots + x$ con un número de sumandos igual a $[1/x]$ vale:

$$\left[\frac{1}{x}\right] . x = \left(\frac{1}{x} - \text{mant}\,\frac{1}{x}\right) . x = 1 - x . \text{mant}\,\frac{1}{x},$$

y tiende a 1 para $x \to 0$.

a_2) *El producto de un infinitésimo por una función acotada en un entorno de $x = a$, es infinitésimo*: De $|f(x)| < K$, y $\lim \varphi(x) = 0$, resulta $\lim [f(x) . \varphi(x)] = 0$.

---

* Se sobrentiende en este enunciado, que si el límite se toma para $x \to a$, el infinitésimo lo es para $x \to a$. Conviene sea interpretado gráficamente el enunciado.

EJEMPLO 2. $x \cdot \operatorname{sen} 1/x$ es infinitésimo para $x \to 0$, aun cuando $\operatorname{sen} 1/x$ no tenga límite para $x \to 0$.

a_3) *El cociente de un infinitésimo por una función que en valor absoluto se conserva mayor que una constante positiva, es un infinitésimo*: De $\lim \varphi(x) = 0$ y $|f(x)| > k > 0$, se deduce $\lim \varphi(x)/f(x) = 0$.

b) *Comparación de variables.* — Para comparar las magnitudes de dos variables dependientes, $f(x)$ y $g(x)$, cuando $x \to a$, son útiles las siguientes notaciones:

b_1) Si existe una constante K tal que en un entorno de a es $|f(x)/g(x)| < K$, pondremos: $f = O(g)$ para $x \to a$.

b_2) Si $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = 0$, pondremos: $f = o(g)$ para $x \to a$.

b_3) Si $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \alpha \neq 0$, pondremos: $f \sim \alpha g$ para $x \to a$. Si $\alpha = 1$, es decir $f \sim g$, diremos que f y g son *variables equivalentes*.

EJEMPLOS: 3. $f = O(1)$; $f = o(1)$; $f \sim \alpha$; significan, respectivamente, que $f(x)$ se mantiene acotada, tiende a cero, o tiende a α, para $x \to a$.

4. Si $f(x) = 3x^2 + x^3$ se tiene:

Para $x \to 0$	*Para* $x \to \infty$ (§ 24-5)
$f(x) = O(x^h)$ para todo $h \leqslant 2$	$f(x) = O(x^h)$ para todo $h \geqslant 3$
$f(x) = o(x^h)$ „ „ $h < 2$	$f(x) = o(x^h)$ „ „ $h > 3$
$f(x) \sim 3x^2$	$f(x) \sim x^3$

Observemos que hasta ahora hemos definido expresiones como $f(x) = O(1)$ ó $f(x) = o(x)$, pero no $O(1)$, $o(x)$ aisladamente. Convendremos en indicar con $O(g)$, $o(g)$ una función $f(x)$ arbitraria tal, que $f = O(g)$, $f = o(g)$, respectivamente. Con esta convención podemos escribir, por ejemplo:

$$O(1) + O(1) = O(1),$$

para indicar que la suma de dos funciones acotadas es acotada.

c) *Comparación de infinitésimos.* — Si $\varphi(x)$ es infinitésimo para $x \to a$, podemos compararlo con un *infinitésimo tipo*, también llamado *principal*; por ejemplo: $h(x) = x - a$, y sus potencias de exponente $p > 0$ real.

c_1) Dados dos infinitésimos, $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, diremos que son *del mismo orden* si $\varphi = O(\psi)$ y $\psi = O(\varphi)$, y que φ es *de orden superior* a ψ si $\varphi = o(\psi)$.

c_2) Diremos que $\varphi(x)$ es *de orden p* (con respecto al infinitésimo h), si existen dos constantes positivas k y K tales que en un entorno de a: $0 < k < |\varphi(x)/h^p| < K$, o lo que es lo mismo, si $\varphi(x)$ y h^p son del mismo orden. Si $\varphi(x) = o(h^p)$ diremos simplemente que φ es *de orden superior a p*.

c_3) Diremos que $\varphi(x)$ es *por lo menos de orden p*, si $\varphi(x) = O(h^p)$. En este caso, para $p > q$, es también $\varphi(x) = o(h^q)$.

En particular, son del mismo orden φ y ψ si existe y es dis-

tinto de cero el límite de su cociente: lim $\varphi/\psi = \alpha \neq 0$. En este caso tendremos $\varphi \sim \alpha\psi$. Cuando $\alpha = 1$, es decir, $\varphi \sim \psi$, diremos que φ y ψ son *infinitésimos equivalentes* (cfr. b_8).

TEOR. 1: *Si a un infinitésimo $\varphi(x)$ se le suma uno de orden superior $\psi(x)$, se obtiene un infinitésimo equivalente al primero.*

DEM.: $(\varphi + \psi)/\varphi = 1 + \psi/\varphi \to 1$.

Como, recíprocamente, para $\psi = \chi - \varphi$, de $\chi/\varphi \to 1$, resulta $\psi/\varphi \to 0$, se tiene:

TEOR. 2: *La diferencia de dos infinitésimos equivalentes es otro de orden superior a ellos.*

Del teorema 1 resulta, además:

TEOR. 3: *El orden de una suma de r infinitésimos es el del sumando que lo tenga menor, siempre que éste sea único.*

Este sumando se llama *término* o *parte principal.*

NOTA: Si hay varios sumandos del mismo orden mínimo, nada podrá asegurarse respecto del orden de la suma, pues el teorema 2 demuestra que la diferencia de dos infinitésimos del mismo orden puede ser de orden superior, y lo mismo acontece con la suma de dos o más infinitésimos.

4. **Cálculo de límites.** — En muchos casos, el problema de calcular un límite es muy simple. El límite [24-1] se halla observando que cuando x se aproxima a 2, x^2 se aproxima a $2^2 = 4$ (pues cuando x varía poco, lo mismo ocurre con x^2), y entonces $x^2 + 2$ se aproxima a 6. Éste es simplemente el valor de la función para $x = 2$, y en la consideración que precede hemos usado simplemente una propiedad de la función llamada *continuidad;* que definiremos en breve. Menos trivial es el ejemplo de la función de § 24-1, ej. 2), donde el reemplazo directo es imposible (¿por qué?) y hemos calculado el límite directamente.

Para el cálculo de límites en casos más complicados, son útiles los siguientes teoremas, análogos a los que vimos para sucesiones (§ 21-1), y que demostraremos mediante las propiedades de los infinitésimos.

a) *El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites.*

Si:

[24-12] $\lim f(x) = l$, y $\lim g(x) = l'$,

por el teorema [24-8] existen infinitésimos $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ tales que:

[24-13] $f(x) = l + \varphi(x)$; $g(x) = l' + \psi(x)$

$$\therefore\ f(x) + g(x) = (l + l') + \varphi(x) + \psi(x),$$

y entonces, por § 24-3, a_1) y el teorema [24-8], resulta:

[24-14] $\lim [f(x) + g(x)] = l + l'$.

b) *El límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites.*

Multiplicando las igualdades [24-13] se tiene:

$$f.g = l.l' + (l.\psi + l'.\varphi + \varphi.\psi),$$

y de aquí resulta el teorema, aplicando primero § 24-3, a_2 y a_1, para probar que el paréntesis del segundo miembro es un infinitésimo, y luego el teorema [24-8].

Como $f - g = f + (-1).g$, resulta de los teoremas anteriores que el límite de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de sus límites, y reiterando:

c) *Una suma algebraica (un producto) de varias funciones con límites finitos tiene como límite la suma algebraica correspondiente (el producto) de los límites de esas funciones.*

d) *El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero*:

[24-15] $$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{l}{l'} \quad \text{siempre que } l' \neq 0,$$

pues ya sabemos (§ 6-4) que la división por cero no es admisible.

Por esta razón no se puede aplicar este teorema al cálculo de lim $(x^2 - a^2)/(x - a)$ para $x \to a$, pero esto no impide que el límite exista, pues observando que para $x \neq a$ es:

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x+a)\ (x-a)}{x-a} = x + a,$$

vemos que aquel límite existe y vale $2a$.

La demostración del teorema *d*) puede hacerse siguiendo las líneas de la del teorema análogo para sucesiones (§ 21-1).

5. **Límite infinito y límite para** $x \to \infty$. — a_1) Veamos lo que ocurre con la función $f(x) = 1/x^2$ en el punto $x = 0$ y su vecindad:

1) Para $x = 0$, la función *no está definida.*

2) Cuando x se aproxima a cero, $f(x)$ *crece tanto como se quiera*, es decir, dado un número M arbitrariamente grande, existe un número $\delta = \delta(M) > 0$ tal que:

[24-16] $$f(x) > M \quad \text{para} \quad 0 < |x - 0| < \delta.$$

En este caso no existe lim $f(x)$ para $x \to 0$, pues $f(x)$ no se aproxima a ningún valor cuando $x \to 0$. Sin embargo, convendremos en indicar este comportamiento de la función diciendo que para $x \to 0$, $f(x)$ "*crece infinitamente*" o "*tiende a infinito*" o "*tiene límite infinito*", lo que se indica:

$$\lim f(x) = +\infty \text{ para } x \to 0 \text{ (fig. 60)}.$$

Observemos que esto no implica dar un significado a la palabra *infinito* considerada aisladamente, sino a las expresiones entre comillas, las

que significan sencillamente que f(x) crece más allá de todo límite. Tampoco decimos que 1/0 sea infinito, pues precisamente la función no está definida para $x = 0$, es decir, 1/0 carece de sentido.

a_2) Diremos que lím f (x) $= -\infty$, o bien: f (x) $\to -\infty$, cuando $-$ f (x) $\to +\infty$.

a_3) Una función también puede tender a infinito sin signo

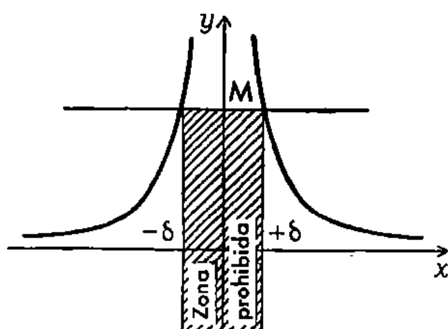


Fig. 60. — lím $1/x^2 = +\infty$ para $x \to 0$.

determinado. Por ejemplo, f(x) $= 1/x$ para $x \to 0$ (fig. 61). Diremos entonces, en general, que lím f (x) $= \infty$ para $x \to a$ cuando para cada número M arbitrariamente grande, exista un número $\delta = \delta$ (M) > 0, tal que:

[24-17] $$| f(x) | > M \quad \text{para} \quad 0 < | x - a | < \delta.$$

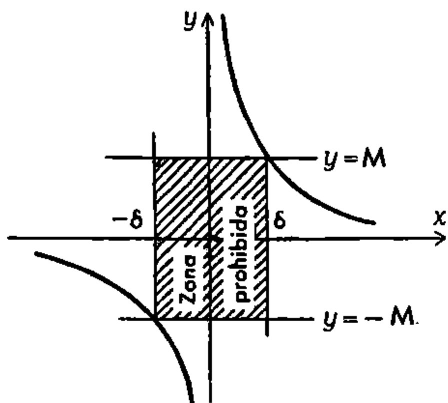


Fig. 61. — lím $1/x = \infty$ para $x \to 0$.

Estas definiciones excluyen siempre el valor $x = a$, es decir, consideramos como antes entornos *reducidos* de a.

b_1) En ocasiones interesa conocer el comportamiento de

una función, no cuando x se aproxima a un valor a, sino cuando x crece indefinidamente. Si en tal caso f (x) se acerca tanto como se quiera a un número l, pondremos:

[24-18] $\lim f(x) = l$ para $x \to +\infty$.

En otras palabras: [24-18] significa que a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un número $H = H(\varepsilon)$ tal que:

[24-19] $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo $x > H$.

Por ejemplo, $\lim 1/x = 0$ para $x \to +\infty$, pues cuando x aumenta, $1/x$ se hace tan próximo como se quiera a cero.

b_2) Análogamente definiremos lim f (x) para $x \to -\infty$ reemplazando en [24-19] $x > H$ por $x < H$.

Por ejemplo, $\lim e^x = 0$ para $x \to -\infty$.

b_3) A veces ocurre que el valor límite corresponde a valores de x crecientes a infinito en valor absoluto, aun sin un signo determinado. Esto equivale a reemplazar en [24-19] $x>H$ por $|x| > H$, y en tal caso pondremos $\lim f(x) = l$ para $x \to \infty$.

EJEMPLOS: Para $x \to \infty$, $\lim e^{-x^2} = 0$. En cambio, no existe $\lim e^{-x}$ para $x \to \infty$, pero sí para $x \to +\infty$, y vale 0. Cuando no hay lugar a confusión, muchas veces se emplea la notación $x \to \infty$ en lugar de $x \to +\infty$, aun cuando su significado no sea el mismo.

Los tres primeros casos se combinan con los tres últimos de varias maneras. Ejemplos:

$a_1 - b_1$) $\lim x^2 = +\infty$ para $x \to +\infty$;

$a_1 - b_3$) $\lim x^2 = +\infty$ para $x \to \infty$;

$a_3 - b_1$) $\lim \sqrt{x} = \infty$ para $x \to +\infty$;

$a_2 - b_1$) $\lim (1 - x) = -\infty$ para $x \to +\infty$;

$a_3 - b_3$) $$\lim \frac{x^2 - 2}{x + 1} = \lim \frac{x - 2/x}{1 + 1/x} = \frac{\lim (x - 2/x)}{\lim (1 + 1/x)} = \pm \infty$$

para $x \to \pm \infty$, es decir, a $+\infty$ ó a $-\infty$, respectivamente.

Finalmente, para $x \to \infty$, lim sen x no existe, pero es $\lim (\text{sen } x)/x = 0$.

El ejemplo $a_3 - b_3$) muestra que para calcular el límite para $x \to +\infty$, $-\infty$ o ∞ de una función racional, que podemos suponer ya en la forma de un cociente de monomios o polinomios, el numerador y el denominador se dividen previamente por la mayor potencia de la variable en el denominador. (Cfr. § 21-4, b).

EJERCICIO: Calcular los límites de $(3t - 2)/(5t^2 + 1)$, de $(3t - 2)/(5t + 1)$, y de $(3t^2 - 2)/(5t + 1)$ para $t \to \infty$, y para $t \to -1/5$.

6. **Forma topológica de la definición de límite.** — Observando que [24-3] indica que los valores de $y = f(x)$ se mantienen dentro de un entorno Y de l, de amplitud arbitrariamente prefijada, la definición de límite dada en el § 24-1 toma la forma siguiente (ver fig. 56):

DEF.: *Se dice que* lim $f(x) = l$ *para* $x \to a$, *si a cada entorno* Y *de l corresponde un entorno reducido* X *de a tal, que a todo punto x de* X *corresponde un punto* $y = f(x)$ *de* Y.

Esta forma de la definición de límite se llama *topológica*, porque utiliza solamente la noción de entorno.

Bajo esta forma, la definición de límite puede extenderse a los casos considerados en el apartado anterior, sin más que reemplazar X o Y por uno de los conjuntos definidos a continuación:

1) Entorno de $+\infty$ es toda semirrecta $x > K$, o sea $(K, +\infty)$;

2) Entorno de $-\infty$ es toda semirrecta $x < H$, o sea $(-\infty, H)$;

3) Entorno de ∞ es todo par de semirrectas $x < H$, $x > K$, siendo $H < K$.

Se tiene así el siguiente cuadro, con los conjuntos que deben tomarse para X e Y en cada caso en la definición topológica.

	X	Y
Para $x \to a$:		
lim $f(x) = l$	entorno reducido de a	entorno de l
a_1) lim $f(x) = +\infty$	„ „ „ „	„ „ $+\infty$
a_2) lim $f(x) = -\infty$	„ „ „ „	„ „ $-\infty$
a_3) lim $f(x) = \infty$	„ „ „ „	„ „ ∞
Para $x \to +\infty$:		
b_1) lim $f(x) = l$	entorno de $+\infty$	„ „ l
Para $x \to -\infty$:		
b_2) lim $f(x) = l$	„ „ $-\infty$	„ „ „
Para $x \to \infty$:		
b_3) lim $f(x) = l$	„ „ ∞	„ „ „

7. **Criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy.** — La función f (x) se llama *convergente* para $x \to \xi$ (o para $x = \xi$), cuando tiene límite finito para $x \to \xi$; se dice que es *divergente a* ∞ $(+\infty; -\infty)$, cuando existe límite ∞ $(+\infty; -\infty)$, y se llama *oscilante*, cuando carece de límite.

Cualquiera sea el significado de ξ (x_0, ∞, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$, cfr. §§ 24-6 y 25-4, cambiando convenientemente la expresión "entorno reducido" fuera del primer caso), vale el siguiente criterio, llamado de CAUCHY, aunque es de BOLZANO:

TEOR.: *Condición necesaria y suficiente para que la función* f (x) *sea convergente cuando* $x \to \xi$ *es que, para cada número* $\varepsilon > 0$, *se verifique en todo par de valores* x', x'' *de un cierto entorno reducido de* ξ *la acotación* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

La condición es *necesaria*, pues si existe el límite finito η, todos los valores de f (x) en un cierto entorno de ξ, difieren de η en menos de $\varepsilon/2$, y por lo tanto, dos cualesquiera de ellos difieren entre sí en menos de ε.

La condición es *suficiente*. Supongamos que se cumple la acotación del teorema, y consideremos un encaje de intervalos

J_1, J_2, ..., que determine ξ. En cada intervalo J_n, la función está acotada, y por lo tanto, el conjunto de sus valores funcionales tiene un extremo superior M_n y un extremo inferior m_n (§ 23-14). Evidentemente, la sucesión m_n es creciente, y la M_n es decreciente, pero además ambas son contiguas, pues en otro caso no podría cumplirse la acotación del teorema. Su elemento de separación es el límite de la función para $x \to \xi$.

8. **Límites de oscilación.** — Cuando existe el límite l de una función f (x) para $x \to \xi$, esta función está sometida a la doble acotación:

[24-20] $$l - \varepsilon < \mathrm{f}\,(x) < l + \varepsilon$$

para todo x de un entorno reducido de ξ. Una generalización inmediata se obtiene en forma análoga a lo que hicimos en § 20-5 para sucesiones, desdoblando la condición [24-20] en dos, y conduce a definir los *límites de oscilación o de indeterminación.*

DEF.: Se dice que L es el *límite superior de oscilación* de f (x) (o simplemente *límite superior*) para $x \to \xi$, si para cada número positivo ε se verifica:

f $(x) < \mathrm{L} + \varepsilon$ en *todo un entorno reducido* de ξ.

f $(x) > \mathrm{L} - \varepsilon$ en *algún punto* de *cada entorno reducido* de ξ.

El número l se llama *límite inferior* de f (x) para $x \to \xi$ si *todos* los valores de f (x) en un cierto entorno reducido de ξ se conservan superiores a $l - \varepsilon$, y en *cada* entorno reducido de ξ hay valores inferiores a $l + \varepsilon$.

NOTACIÓN: $l = \underline{\lim}\ \mathrm{f}\,(x) = \lim\inf \mathrm{f}\,(x)$, $\mathrm{L} = \overline{\lim}\ \mathrm{f}\,(x) = \lim\sup \mathrm{f}\,(x)$.

Los nombres están justificados por el hecho de que la función *oscila* dentro del intervalo $(l - \varepsilon;\ \mathrm{L} + \varepsilon)$ desde un entorno en adelante, pasando de la izquierda de $l + \varepsilon$ a la derecha de $\mathrm{L} - \varepsilon$ por muy pequeño que se elija el número ε, en algún punto de todo entorno de ξ.

El símbolo ξ puede representar un número x_0, o bien ∞, o también x_0^+; x_0^-; $-\infty$; $+\infty$; casos en que los límites de oscilación se llaman *laterales* (cfr. § 25-4). En cada caso habrá que reemplazar convenientemente la expresión "entorno reducido de ξ" (§ 24-6).

EJEMPLOS: 1. La función $y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$ tiene en el punto 0 los límites $l = -1$, $\mathrm{L} = 1$, pues siempre es $-1 \leqslant y \leqslant 1$, y en todo entorno hay valores $y < -1 + \varepsilon$ e $y > 1 - \varepsilon$.

2. La función de DIRICHLET (§ 23-3, ej. 4) tiene en todo punto $l = 0$, $\mathrm{L} = 1$.

De igual modo que se generalizan los límites ordinarios mediante los límites infinitos, se definen los límites infinitos de oscilación. Cuando la función no está acotada superiormente en la proximidad de ξ, es decir, en todo entorno de ξ toma f(x) valores positivos mayores que cualquier número, se conviene en decir que el límite superior para $x \to \xi$ es $+\infty$, y cuando en todo entorno de ξ toma f(x) valores menores que cualquier

número negativo, se dice que el límite inferior es $-\infty$. La función puede tener infinito uno de los dos límites de oscilación, o serlo ambos.

EJEMPLOS: La función $1 : \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ tiene en el punto $x = 0$ los límites $l = -\infty$ y $L = +\infty$. En cambio, para $x \to \infty$ es $l = L = \infty$ límite ordinario.

Con el mismo procedimiento seguido para sucesiones en el § 20-5, se demuestra (hacerlo, sustituyendo los entornos del infinito del índice n por los entornos reducidos del punto considerado) que con la ampliación anterior, que incluye los límites infinitos: *Para toda función definida en un intervalo, existen ambos límites de oscilación en cada punto de él (laterales* (§ 25-4) *en los extremos)*. Esto no acontece con el límite ordinario, que no siempre existe; de ahí la importancia del concepto de límite de oscilación.

De la definición anterior resulta:

TEOR.: *Condición necesaria y suficiente para que la función* f (x) *admita límite ordinario en el punto* ξ, *es que coincidan en él los dos límites de oscilación.*

9. **Límite aritmético y límite funcional.** — Puesto que la definición de límite $f(x)$ para $x \to \xi$ impone la condición de aproximación indefinida a todos los valores de un entorno, resulta que para toda sucesión $x_n \to \xi$, los correspondientes valores convergen hacia el límite de $f(x)$.

La recíproca no es cierta; si la sucesión $f(x_n)$ tiene límite, no puede deducirse de ahí que lo tenga $f(x)$, y puede acontecer que para otras sucesiones de valores de x, resulten límites distintos. Tal sucederá cuando sea $l < L$ en virtud del teorema siguiente:

TEOR. 1: *Se puede elegir de infinitos modos una sucesión de valores* $x_1, x_2, x_3, \ldots, \to \xi$ *tal que* $\lim f(x_n) = L$, *cuando* $n \to \infty$; *y, análogamente, otra sucesión de valores tal que* $\lim f(x_n) = l$ *cuando* $n \to \infty$.

En la definición de límite superior (y análogamente en la de límite inferior) figura la condición de que en todo entorno de ξ, haya infinitos valores de $f(x)$ comprendidos en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Luego, si tomamos sucesivamente los entornos de ξ de amplitudes $\delta, \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{4}, \ldots$, y vamos *eligiendo* valores de x en cada uno, obtenemos una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \to \xi$, tal que los valores correspondientes de $f(x)$ convergen hacia L. Análogamente, si es $\xi = \infty$, subsiste esta conclusión tomando una sucesión de entornos $|x| > H_n \to \infty$.

En cambio, el teorema siguiente permite pasar del límite aritmético al límite funcional:

TEOR. 2: *Si para cada sucesión* $x_n \to \xi$ *converge la correspondiente sucesión de valores funcionales* $f(x_n)$, *se verifica: todos los límites de estas sucesiones son iguales, y este valor es el límite de* $f(x)$ *para* $x \to \xi$.

En primer lugar, si todas las sucesiones tienen límite, éste debe ser el mismo para todas; porque si fuese $f(x_n) \to l$ y $f(x'_n) \to l' \neq l$, la sucesión mixta

$$f(x_1),\ f(x'_1),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(x'_n),\ \ldots$$

no tendría límite, contra lo supuesto.

Siendo iguales todos los límites, por teorema 1 resulta $l = L$, y el teorema queda demostrado.

Ejercicios

1. En la función $f(x) = 5x$, hallar δ tal que $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ para $|x - 1| < \delta$: *a*) para $\varepsilon = 0{,}1$; *b*) para $\varepsilon = 0{,}001$.

2. Probar que $\lim 5x = 5$ para $x \to 1$, e interpretar geométricamente la relación entre ε y δ.

3. Probar directamente, con la definición de límite: *a*) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$; *b*) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 5x) = 6$, hallando un δ para cada ε tal que $0 < \varepsilon < 1$.

4. Probar que la expresión $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4{,}001$ es falsa.

5. ¿Existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}(1/x)}$?

6. Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo infinitésimo, obtener elementos suyos infinitésimos.

7. ¿Cómo deben ser los ángulos de un triángulo, para que sus tres lados sean infinitésimos: *a*) del mismo orden; *b*) equivalentes?

8. Probar que

$$\frac{a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \dots}{x^n + b' x^{n-1} + c' x^{n-2} + \dots} = a + \frac{b - a b'}{x} + \eta(x),$$

siendo $\eta(x) = O(x^{-2})$ para $x \to \infty$. ¿Qué condición debe cumplirse para que sea $\eta(x)$ del mismo orden que x^{-2}? Dar, en tal caso, una equivalencia potencial para $\eta(x)$.

9. Probar que si $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, $(a_0 \neq 0)$, es para $x \to \infty$:

$$P(x + h) - P(x) \sim n h a_0 x^{n-1};$$
$$P(x + 2h) - 2P(x + h) + P(x) \sim n(n-1) h^2 a_0 x^{n-2}.$$

10.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 2x + 3}{5 - x^2}; \quad \lim_{x \to -3} \left(\frac{3x^3 - x^2}{x^3 + 7} - \frac{4x^2 - 2}{x^2 + 8} \right); \quad \lim_{t \to 0} \frac{3t^2 - 2t}{9t + 2}.$$

11.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}; \quad \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}; \quad \lim_{u \to 3} \frac{u^4 - 81}{u^2 - 9};$$

$$\lim_{t \to 4} \frac{t^2 - 2t - 8}{t^2 + 2t - 24}; \quad \lim_{u \to -2} \frac{u^3 + 5u^2 + 8u + 4}{u^2 + 4u + 4}.$$

12. *a*) $\lim\limits_{x \to 0} [\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}]/x$; *b*) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$.

13.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + 1}{x^2}; \quad \lim_{x \to 1} \frac{2x - 3}{x^3 - 2x + 1}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{2x - 1}{x^3}.$$

14. Dividiendo numerador y denominador por una potencia de x, calcular para $x \to \infty$ los límites de:

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1}, \quad \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - 2x + 1}, \quad \frac{4x^3 - 1}{x + 5}.$$

15. Calcular, por simplificación, el límite para $x \to \infty$ de la expresión

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2}.$$

16. Límites para $x \to +\infty$ de:

$$x \operatorname{sen} x; \quad x \operatorname{sg} \operatorname{sen} x; \quad x \operatorname{sg}(\operatorname{sen} x + \cos x).$$

17. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$.

18. Si $R(x)$ es una función racional de x, probar que:

$$\lim R(x+h)/R(x) = 1 \quad \text{para} \quad x \to \infty.$$

19. Límites para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ de:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

20. Probar que $\lim\sup [f(x) - g(x)] \leqq \lim\sup f(x) - \lim\inf g(x)$; $\lim\sup f(x) + \lim\inf g(x) \leqq \lim\sup [f(x) + g(x)] \leqq \lim\sup f(x) + \lim\sup g(x)$.

§ 25. Noción de continuidad. Discontinuidades

1. **Continuidad.** — *a*) La mayor parte de las funciones que hemos considerado hasta ahora, y sus gráficas, exhiben una propiedad de la mayor importancia, que es la *continuidad*. Intuitivamente, la continuidad de una función $y = f(x)$ significa que pequeños cambios en x ocasionan variaciones pequeñas de y, y no, por ejemplo, un brusco salto de su valor; es decir, la gráfica que la representa "no se rompe".

Para formular estas consideraciones de un modo más preciso, consideremos, por ejemplo, la función

$$y = f(x) = +\sqrt{x}.$$

que representa un trozo de parábola, y observemos atentamente su comportamiento en la vecindad de un valor dado de x; por ejemplo: $x = 4$. Vemos que:

1) Para $x = 4$ es $f(x) = 2$.

2) Para x *muy próximo a* 4, $f(x)$ es *muy próximo a* 2; más precisamente, $f(x)$ *puede hacerse tan próximo a* 2 *como se quiera*, con tal que x sea suficientemente próximo a 4, o, en otras palabras, para $x \to 4$:

$$\lim f(x) = 2 = f(4).$$

Esto último se demuestra observando que por ser

$$\sqrt{x} - 2 = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{4})(\sqrt{x} + \sqrt{4})}{\sqrt{x} + \sqrt{4}} = \frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2},$$

para todo ε positivo (y menor que 2) es:

$$|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon, \quad \text{siempre que} \quad |x - 4| < 2\varepsilon.$$

En estas circunstancias diremos que $f(x)$ es continua en $x = 4$, y en general, una función $y = f(x)$ se llamará *continua en* $x = a$; si:

1º) existe $\lim f(x)$ para $x \to a$; y

2º) existe $f(a)$ y es igual a dicho límite:

[25-1] $\qquad f(a) = \lim f(x)$ para $x \to a$,

o sea: $\qquad f(\lim x) = \lim f(x)$.

Si una función es continua para todo valor de x de su cam-

po de existencia, se llamará simplemente *continua*. Tal ocurre con la función $y = +\sqrt{x}$.

Recordando la definición de límite funcional (§ 24-1), resulta que la condición de continuidad en $x = a$ equivale a esta otra: a cada entorno del valor f (a) corresponde un entorno (completo) del punto a, tal que los valores de f (x) quedan comprendidos en aquél. O, expresado esto mismo aritméticamente:

La función f (x) se dice *continua* en el punto a, cuando a todo valor positivo ε corresponde otro número δ, tal que:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

para todos los valores de x que cumplan la condición $|x - a| < \delta$.

Esta condición, exenta de toda ambigüedad, suele expresarse así: *El incremento* $\triangle y =$ f (x) — f (a) *de la función se hace arbitrariamente pequeño tomando suficientemente pequeño el incremento* $\triangle x = x - a$ *de la variable.* O sea: a un incremento infinitésimo de x corresponde un incremento infinitésimo de y. De otro modo: *Si* $\triangle x \to 0$, *también* $\triangle y \to 0$.

Éste es el significado claro de la imprecisa frase con que los autores clásicos expresaban la continuidad, diciendo que la función "varía por grados insensibles", es decir, al variar muy poco la variable, varía poco la función. ¿Qué relación existe entre ambos incrementos? Este es uno de los problemas capitales del Cálculo diferencial, que pronto resolveremos (§ 30).

b) La gráfica de una función continua carece de puntos aislados (nota II, *b*), puesto que en todo entorno de x hay valores que difieren de f (x) tan poco como se quiera. En algunas de las funciones elementales que estudiaremos en el capítulo siguiente, todos los puntos de la gráfica pueden obtenerse de un solo trazo. Para funciones más complicadas, esto ya no es prácticamente posible; pero como sería difícil señalar límite para esta posibilidad, se ha convenido en adoptar esta definición general:

DEF.: Llamamos *curva uniforme* al conjunto de puntos representados por una función uniforme y continua en un intervalo finito o infinito.

EJEMPLOS: 1. Una vez demostrada la continuidad en $[-r, +r]$ de las dos funciones de la figura 62, que representan la semicircunferencia superior y la inferior, de radio r, cada una de ellas quedará incluída en la categoría de curva uniforme; pero la circunferencia no es una curva uniforme.

2. Es curva uniforme la sinusoide, por ser continua la función sen x (§ 28-6), pero la gráfica de tg x se compone de infinitas curvas.

NOTA 1. En el § 29-2 daremos un concepto más general de curva plana. Lo que precede nos muestra que no se define, como antiguamente, la continuidad de la función mediante la imprecisa intuición de *curva*, sino que, por lo contrario, el concepto de *curva* se define mediante la noción clara y precisa de *función continua*.

Arco de curva uniforme es la parte de ésta que corresponde a un intervalo de la variable independiente x.

Si en un punto $x = a$ no se verifica [25-1], diremos que f (x) es *discontinua*, o tiene una *discontinuidad* en él.

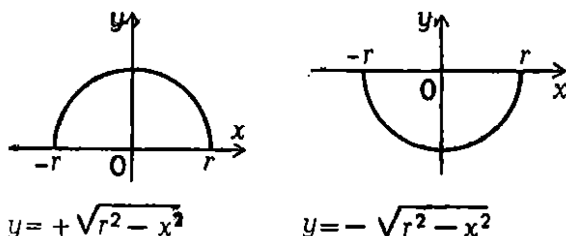


Fig. 62.

Todas las funciones elementales (§ 27-4, nota 2) y sus compuestas son continuas en todo punto en que tienen valor determinado; sus puntos de discontinuidad son aislados (nota II, *b*), y solamente aquellos en que la función no está definida. Sus gráficas se componen, pues, de arcos de curva. Esta propiedad general resultará más adelante (§ 27-2); pero podemos utilizarla ya, para calcular el límite de una función elemental cualquiera para $x \to a$, sustituyendo x por a.

EJEMPLO 3. He aquí el cálculo de algunos límites:

$$\text{Para } x \to 1, \lim \frac{x^2 + 1}{2x' - 5} = \frac{1 + 1}{2 - 5} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Para } x \to \pi, \lim \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \pi = 0.$$

NOTA 2. Demostrar directamente que una función es continua, es decir, verificar las condiciones de la definición, no es siempre fácil. Por otra parte, la continuidad es consecuencia (§ 30-8) de otra propiedad que estudiaremos en el Capítulo VIII: la derivabilidad, que aun siendo mucho más restrictiva, es fácil de establecer sistemáticamente para todas las funciones elementales y sus compuestas.

2. Diversas clases de discontinuidades. — La afirmación

[25-2] $\qquad \lim \mathrm{f}(x) = l \quad \text{para } x \to a$

se refiere a los valores de f (x) cuando x toma valores *cerca de a pero distintos de a.* No es un enunciado acerca de f (a). Entonces, aun cuando exista el límite [25-2], f (a) puede no existir, o bien no coincidir con l; en este caso, a se llama *discontinuidad evitable.*

Cuando el límite [25-2] no existe [es decir, cuando no se cumple la condición 1º)], la discontinuidad se llama *no evitable o esencial.* Éstas se clasifican en discontinuidades *de primera y de segunda especie.*

3. Discontinuidades evitables. Verdadero valor. — Hemos visto, en el ejemplo 2 del § 24-1, que la función $(x^2 + 2x) : x$ está bien determinada, es decir: tiene un valor numérico para

todo valor de x, excepto para el $x = 0$, en el cual carece de significado, pues en Aritmética no tiene sentido el cociente $0 : 0$. La función es igual a $x + 2$ para todo valor de $x \neq 0$, y su gráfica es una línea recta, excepto el punto en que corta al eje y. Parece natural, pues, *completar* la función, asignándole al valor $x = 0$ el correspondiente $y = 2$.

Regla general: si al sustituir $x = a$ en la función f (x) resulta una expresión aritmética que carece de valor numérico, completaremos la función, asignándole como valor, en el punto $x = a$, el límite a que tiende f (x) para $x \to a$; es decir, ya que f (a) carece de sentido, *le asignamos* el valor siguiente:

$$f(a) = \lim f(x) \text{ para } x \to a.$$

Este número con el cual completamos la función en el punto $x = a$, suele llamarse *verdadero valor* de f (x) en dicho punto, la justificación de este nombre es la siguiente: si asignáramos a f (x) otro valor cualquiera distinto del lim f (x), resultaría una función discontinua; en cambio, adoptando como valor en $x = a$ este límite, logramos que la función completada sea *continua* en el punto $x = a$. Por esta razón, la discontinuidad de la función dada, en $x = a$, se llama *evitable*.

Como la expresión "verdadero valor" podría prestarse a confusión, conviene tener presente que se tiene una función no definida en $x = a$, y que se busca su límite para $x \to a$. Como las reglas de cálculo de límites son ineficaces en estos casos, es preciso recurrir a artificios especiales; uno de ellos es la supresión de factores comunes.

¿Por qué no está definida $(x^2 + 2x) : x$ para $x = 0$? Porque el reemplazo directo de x por 0 nos conduciría a la expresión carente de sentido 0/0. Por eso diremos que "*la indeterminación es de la forma* 0/0".

Éste es el caso más importante, en que la función f (x) carece de valor para $x = a$, es decir: cuando f (x) es un cociente f $(x) = \varphi(x) : \psi(x)$, cuyos dos términos, numerador y denominador, se anulan para $x = a$.

Cuando $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son polinomios, ambos son divisibles (§ 16-5, c) por el binomio $x - a$, y simplificando la fracción antes de tomar límites, mediante la supresión del factor común $x - a$, si en la nueva fracción no se anulan numerador ni denominador, basta poner $x = a$ y resulta el límite buscado.

EJEMPLOS: 1. Hemos calculado:

$$\lim (x^2 + 2x) : x = \lim (x + 2) = 2, \quad \text{para } x \to 0.$$

2. Análogamente, resulta:

$$\frac{x-1}{x^4-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} = \frac{1}{x^3+x^2+x+1}.$$

El límite del primer miembro para $x \to 1$ es igual al del último, y éste se calcula sustituyendo x por 1; así resulta 1/4.

Vemos, en estos ejemplos, que el límite de una función que adopta la forma 0/0 puede ser distinto, según cual sea la función que da origen a dicha forma; de ahí el nombre de *expresión indeterminada*.

Puede ocurrir que exista el límite [25-2] y también f (a), pero que no sean iguales. En este caso, la discontinuidad también se llama evitable, pues se puede obtener una función continua sin más que *modificar* el valor de f (x) en el único punto $x = a$.

EJEMPLO 3. $$f(x) = [1 - x^2],$$
donde $[u]$ indica (§ 23-3, ej. 3), el mayor entero que no supera a u. Se tiene:
$$f(0) = [1] = 1,$$
pero si: $0 < x < 1$, o bien: $-1 < x < 0$, es $0 < 1 - x^2 < 1$, de donde
$$f(x) = [1 - x^2] = 0 \quad \therefore \quad \lim f(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \to 0.$$
Para obtener una función continua en $x = 0$ debemos modificar el valor en $x = 0$, reemplazando $f(0) = 1$ por 0.

4. Límites laterales y discontinuidades de primera especie. — *a*) Otro ejemplo de función discontinua en ciertos puntos es E (x) o $[x]$, parte entera de x (§ 23-3, ej. 3). Se tiene $[3] = 3$, pero no es cierto que para todo x muy próximo a 3 sea $[x]$ muy próximo a $[3] = 3$. [Ver fig. 42, en § 23-3].

Si nos limitamos a los valores de E (x) para los x *menores* que 3, su límite existe y vale 2; lo llamaremos *límite a la izquierda*, y escribiremos:
$$\lim_{x \to 3^-} E(x) = E(3^-) = E(3 - 0) = 2,$$
cuidando que las notaciones E (3^-) o E $(3 - 0)$ no nos induzcan a creer que se trata del valor de la función en un punto.

Si ahora nos acercamos por la derecha, es decir, por valores de x *mayores que* 3, el límite existe y vale 3. Lo llamaremos *límite a la derecha*:
$$\lim_{x \to 3^+} E(x) = E(3^+) = E(3 + 0) = 3.$$

En general, podemos dar la siguiente definición para los *límites laterales* de una función de variable real f (x), al tender x hacia a (*por la izquierda* $x \to a^-$, y *por la derecha* $x \to a^+$):

Diremos que:
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l_i \qquad [\lim_{x \to a^+} f(x) = l_d],$$
cuando para cada $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que*
$$| f(x) - l_i | < \varepsilon \qquad [\, | f(x) - l_d | < \varepsilon]$$
para

[25-3] $$a - \delta < x < a \qquad [a < x < a + \delta].$$

Estos límites se indican con las notaciones

$$f(a^-) = f(a - 0) \quad \text{y} \quad f(a^+) = f(a + 0).$$

Por ejemplo:

$$E(0 - 0) = -1, \quad E(0 + 0) = 0.$$

Los intervalos abiertos [25-3] se llaman *semientornos laterales* del punto a (*a la izquierda* y *a la derecha*, respectivamente). Con ellos puede adaptarse a este caso la definición topológica de límite (§ 24-6). (Hacerlo).

Los límites para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$ (§ 24-5) pueden considerarse como límites laterales, por oposición al límite para $x \to \infty$. Correlativamente, llamaremos semientornos laterales de ∞ a los conjuntos que en el § 24-6 llamamos entornos de $+\infty$ y de $-\infty$.

b) La existencia de lim f (x) para $x \to a$ exige que existan el límite a la izquierda y el límite a la derecha, y que ambos sean iguales. Cuando ambos límites existen, pero son desiguales, la discontinuidad se llama de *primera especie*. Ésta se dice finita cuando son finitos ambos, y se dice infinita cuando es infinito uno o los dos. En una discontinuidad de primera especie, llamaremos a la diferencia $f(a + 0) - f(a - 0)$ *salto de la función* en el punto a.

EJEMPLOS: 1. En la función $y = E(x)$ son puntos de dicontinuidad de primera especie todos los de abscisa entera; el salto es 1.

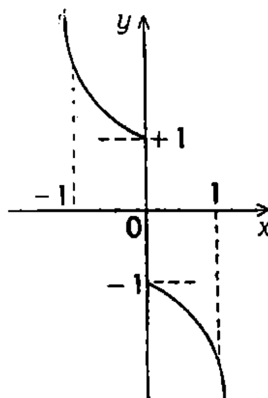


Fig. 63.

2. La figura 63 representa la función:

$$y = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{1 - e^{\frac{1}{x}}} = -1 + \frac{2}{1 - e^{\frac{1}{x}}}.$$

Si $x \to 0$ por la derecha, la exponencial $e^{\frac{1}{x}}$, cuyo exponente positivo crece infinitamente, crece también infinitamente, y la función tiende a -1.

Si $x \to 0$ por la izquierda, la exponencial de exponente negativo tiende a 0, y la función tiende a $+1$. El salto es -2.

3. La función $y = e^{\frac{1}{x}}$ (fig. 64) suministra un ejemplo de discontinuidad infinita de primera especie en el punto 0, porque, como acabamos de decir, tiene a la derecha límite infinito y a la izquierda límite 0. La curva se aproxima al origen; pero para $x = 0$, la función carece de valor numérico.

EJERCICIOS: 1. Estudiar las discontinuidades de las funciones $y = \text{mant}\, x$ (§ 23-3, ej. 3), e $y = \text{sg}\, x$ (§ 23-6, *b*).

2. Representar la función $f(x) = \lim (1 + x^{2n})^{-1}$ para $n \to \infty$, y estudiar sus discontinuidades.

Si ambos límites laterales son infinitos de igual signo: $f(a - 0) = f(a + 0) = +\infty$ ó $f(a - 0) = f(a + 0) = -\infty$ (ver fig. 60, en § 24-5), a se llama *punto de infinito* de f (x)

La discontinuidad resulta evitable cuando se admiten "valores infinitos" para la función.

5. **Continuidad lateral y continuidad en un intervalo.** — Diremos que la función f (x) es *continua a la derecha* (*izquierda*) *del punto* a, cuando exista f $(a+0) = \lim$ f (x) para

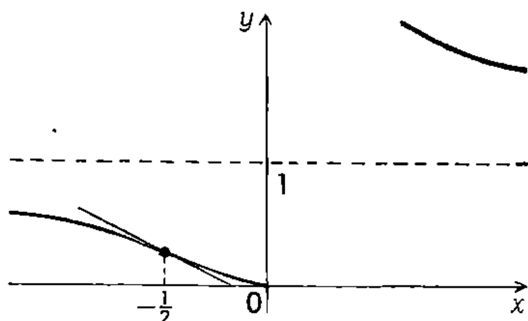


Fig. 64

$x \to a^+$ (ó f $(a-0) = \lim$ f (x) para $x \to a^-$), y este límite *finito* coincida con el valor f (a) que la función toma en dicho punto.

EJEMPLO: La función E(x) "parte entera de x" es continua a la derecha para todo valor de x. ¿En qué puntos es discontinua a la izquierda?

Se dice que f (x) es continua en el intervalo $[a, b]$, cuando lo es en cada uno de los puntos interiores y, además, es continua a la derecha de a y a la izquierda de b. Si f (x) solamente es continua a la derecha de a (o izquierda de b), siéndolo, desde luego, en los puntos interiores, se dice que es continua en el intervalo $[a, b)$ o en el $(a, b]$, respectivamente, y cuando ambas condiciones dejen de cumplirse, y solamente sea continua f (x) en cada punto interior, diremos simplemente que f (x) es continua en el interior del intervalo $[a, b]$, o que es continua en el intervalo abierto (a, b).

EJEMPLO: La función f$(x) = \lim(1 + x^{2n})^{-1}$ del ejercicio 2 del apartado anterior no es continua en el intervalo cerrado $[-1, +1]$, pero es continua en todo punto *interior* del mismo. Esta función no es continua ni a izquierda ni a derecha en los puntos -1 y $+1$.

6. **Discontinuidades de segunda especie.** — Se dice que la discontinuidad de f (x) en $x = a$ es *de segunda especie* cuando no es evitable ni de primera especie, es decir, cuando uno por lo menos de los límites laterales f $(a-0)$, f $(a+0)$ no existe.

La discontinuidad es *finita* cuando la función se conserva acotada, e *infinita* en caso contrario.

EJEMPLOS: 1. La función $y = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{x}$ ya considerada (§ 24-1, ej. 3), tiene en el origen una discontinuidad finita de segunda especie, carecien-

do de límite por ambos lados, pues el seno oscila infinitas veces entre -1 y $+1$.

2. La función:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

tiene en el origen una discontinuidad no finita de segunda especie; pues por la derecha, la curva tiene infinitas ondas de alturas infinitamente crecientes, pues $\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$. En cambio, es $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$, y como el factor $\operatorname{sen} \pi/x$ se mantiene acotado, se tiene (§ 24-3, a_3)

$$f(0^-) = f(0 - 0) = 0.$$

7. Operaciones con las funciones continuas. — TEOR. 1. *La suma de dos o más funciones continuas en un punto $x = a$, es una función continua en $x = a$.*

Si f (x) y g (x) son continuas en $x = a$ se tiene por la definición para $x \to a$:

$$\lim f(x) = f(a): \qquad \lim g(x) = g(a),$$

y por consiguiente (§ 24-4, a) se tiene:

$$\lim [f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) = f(a) + g(a),$$

lo que equivale a la continuidad de f (x) + g (x) en $x = a$.

Análogamente se demuestran los teoremas siguientes:

TEOR. 2. *El producto de dos o más funciones continuas en $x = a$ es una función continua en $x = a$.*

TEOR. 3. *El cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ de dos funciones continuas en $x = a$ es una función continua en $x = a$ si* g $(a) \neq 0$.

Evidentemente, los tres teoremas pueden enunciarse *para*

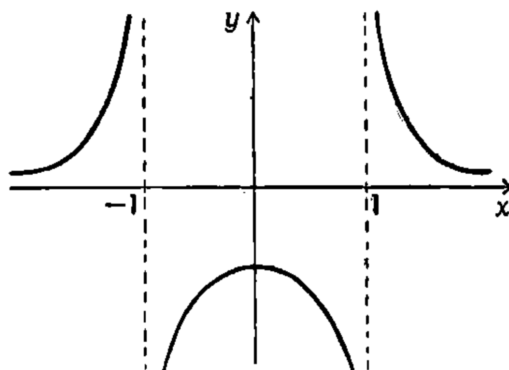


Fig. 65. — Función racional $y = 1/(x^2 - 1)$, discontinua en $x = 1$ y $x = -1$, raíces de $x^2 - 1 = 0$.

la continuidad en un intervalo o en todo el eje real. En el último habrá que suponer que g (x) no se anula en ningún punto del intervalo, o de todo el eje.

Veamos cómo pueden aplicarse estos tres teoremas al estudio de la continuidad de las funciones racionales.

La función $y = f(x) = x$ es continua para todo valor de x (es decir, simplemente, continua), pues cualquiera sea a se tiene para $x \to a$: $\lim f(x) = \lim x = a = f(a)$, y esto expresa justamente la continuidad en $x = a$.

Entonces, por el teorema 2, e inducción, cualquier potencia x^n cuyo exponente sea un número natural, es una función continua, y lo es también toda función de la forma $f(x) = a\,x^n$. Como un polinomio cualquiera es una suma de funciones de este tipo, tendremos por teorema 1: *Todo polinomio es una función continua.*

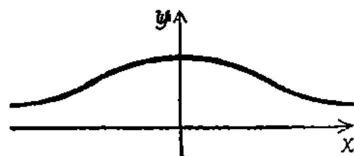


Fig. 66.—Función racional $y = 1/(x^2+1)$, continua pues $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

Puesto que toda función racional (§ 23-7) puede expresarse como cociente $P(x)/Q(x)$ de dos polinomios, se tiene por el teorema 3 y el resultado anterior: *Toda función racional es continua para los valores de x que no anulan el denominador $Q(x)$ de la expresión $P(x)/Q(x)$ de la función como cociente de polinomios.*

TEOR.: *Toda función continua de una función continua de x es función continua de x.*

La demostración se basa en que la continuidad de una función equivale a la permutabilidad de su característica con el paso al límite (§ 25-1, a), y entonces:

$$\lim f[g(x)] = f[\lim g(x)] = f[g(\lim x)]$$

(pero debe observarse que el primer límite se toma para $g(x) \to \lim g(x)$, y los otros dos, para $x \to a$).

EJERCICIOS

1. Representar las funciones $[x^2]$; $[\sqrt{x}]$; $\sqrt{[x]}$; $\sqrt{x - [x]}$; $[2x]$; e indicar en qué puntos son discontinuas.

2. Utilizando la continuidad de x^a, a real (§ 27), calcular:

$$\lim_{t \to 2} \left(\frac{3t + 10}{2t + 5}\right)^{5/2} \quad ; \quad \lim_{t \to 1} \frac{8}{(3 + t)\sqrt{3 - t}}.$$

3. Comprobar que

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} e^{-n^2x^2} = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq 0 \\ 1 & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

La discontinuidad evitable de una función $y(x)$ para $x = x_0$, suponiendo existente $y(x_0)$, se evita, sin modificar los demás valores funcionales, sumando la expresión

$$\lim_{n \to \infty} \left[\lim_{x \to x_0} y(x) - y(x_0)\right] e^{-n^2(x-x_0)^2}.$$

4. Diremos que una función $f(x)$, con una discontinuidad de primera especie en x_0, está *normalizada* (o es *regular*) en x_0, si:

$$f(x_0) = \tfrac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)] = \tfrac{1}{2}(l_d + l_i).$$

Probar que en tal caso, la discontinuidad de $f(x)$ en x_0 se "evita" sumándole una de las expresiones:

$$(l_d - l_i) \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{n(x - x_0)}} \qquad (l_i - l_d) \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{n(x_0 - x)}},$$

o la semisuma de las anteriores, según que queramos conservar l_d, l_i, ó

$f(x_0)$ como límite en el punto x_0. ¿Cómo se modifican los demás valores funcionales?

5. Límites laterales de $f(x) = \dfrac{7x+4}{x^2-9}$ para $x \to 3$.

6. Estudiar las discontinuidades en $x = 0$, de las funciones

$$f(x) = \frac{e^{\operatorname{cotg} x} - 1}{e^{\operatorname{cotg} x} + 1}; \quad g(x) = \left[\frac{x}{a}\right]\frac{b}{x}; \quad h(x) = \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right].$$

7. Representar y estudiar las discontinuidades de las funciones *característica y mantisa de logaritmo decimal*:

$$f(x) = [\lg x]; \quad g(x) = \lg x - [\lg x]; \quad (x > 0).$$

8. ¿Cuál es la naturaleza de la discontinuidad en $x = 0$ de las funciones $[x] + [-x]$; cosec x; $\sqrt{1/x}$; $\sqrt[3]{1/x}$; cosec $(1/x)$; $\dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}(1/x)}$?

9. Poniendo $\varphi(x) = \operatorname{sen} \pi/x$ para $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$, probar que la función $f(x) = x \cdot \varphi[\varphi(x)]$ tiene infinitas discontinuidades de 2ª especie en los puntos $x_n = 1/n$, pero es continua en $x = 0$, que es punto de acumulación de aquéllas. (Ver también nota IV, ej. 1).

10. R. Baire clasificó las funciones en la siguiente forma: la llamada "clase 0", formada por las funciones continuas; la clase 1, formada por las funciones discontinuas que son límites de funciones continuas; la clase 2, formada por las que no siendo de clase 1 son límites de sucesiones de funciones de clase 1, etc. Esto origina un proceso llamado *trasfinito*, por existir funciones de clase determinada y mayor que todo número natural n.

Todas las funciones definidas en este parágrafo son de primera clase, con excepción de la función de Dirichlet, que es de segunda clase. Demostrar que no es de clase mayor.

§ 26. Propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado

1. **Conservación de signo en el entorno de un punto.** — Si $f(x)$ es continua y $f(a) > 0$, hay un entorno en el cual difiere de $f(x)$ en menos de $f(a)$, es decir, $f(a) - f(x) < f(a)$; luego, $f(x) > 0$. Análogamente, si $f(a) < 0$, es $f(x) < 0$ en un entorno del punto a.

Corolario: Si $f(x)$ es continua en el punto a, y es $f(a) > c$, se conserva $f(x) > c$ en todo un entorno de a; si es $f(a) < c$, se conserva $f(x) < c$. Basta, en efecto, observar que siendo $f(a) - c > 0$ en el primer caso, debe ser $f(x) - c > 0$ en un entorno; y análogamente en el otro caso.

2. **Ceros de las funciones continuas.** — Def.: Se llama *cero* de $f(x)$ a todo valor de x en que ésta se anula.

La existencia de ceros. — *Si* $f(x)$ *es continua en el intervalo* $[a, b]$, *y en los extremos toma valores* $f(a)$ *y* $f(b)$ *de signos opuestos, se anula por lo menos en un punto interior* (Bolzano).

Para nuestra intuición geométrica, el teorema es trivial, pues expresa simplemente que una curva que comienza debajo

del eje x y termina encima de él, o recíprocamente, debe cortarlo. La demostración se obtiene fácilmente con el proceso constructivo de encaje de intervalos:

Sea, por ejemplo, f $(a) < 0$ y f $(b) > 0$. Dividiendo $[a, b]$ en 2 partes iguales, si no se anula en el punto de división sea $[a_1, b_1]$ el intervalo parcial en cuyos extremos cambia de signo, es decir, f $(a_1) < 0$, f $(b_1) > 0$; subdividido $[a_1, b_1]$ en 2 partes iguales, sea $[a_2, b_2]$ el intervalo en el que f$(a_2) < 0$, f $(b_2) > 0$, etc. Así siguiendo, o se llega a un punto de subdivisión en el que se anula f (x), o se obtiene un par de sucesiones indefinidas monótonas que definen un número ξ:

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots \leqq \xi \leqq \ldots \leqq b_n \leqq \ldots \leqq b_2 \leqq b_1,$$

puesto que cumplen la condición de contigüidad:

$$b_n - a_n = (b - a) : 2^n \to 0.$$

En el punto ξ es f $(\xi) = 0$, en virtud del § 26-1, puesto que en todo entorno, por pequeño que sea, toma valores de signos opuestos.

3. **Resolución de ecuaciones.** —Los ceros de la función f (x) suelen llamarse *raíces* de la ecuación f $(x) = 0$. Resolver la ecuación es calcular sus raíces.

El mismo proceso de demostración anterior se utiliza en la práctica para resolver las ecuaciones, esto es, para calcular los ceros de las funciones.

En las subdivisiones sucesivas suelen tomarse 10 partes iguales, y de este modo, la obtención de cada nuevo intervalo $[a_n, b_n]$ que comprende la raíz buscada, determina una cifra decimal de ésta.

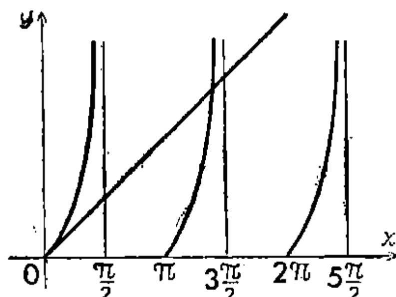


Fig. 67.

EJEMPLO: Hallar la menor raíz positiva de la ecuación tg $x =$ $= x$ que se presenta en Física.

El simple examen de la gráfica (fig. 67), permite reconocer que hay un cero en cada uno de los cuadrantes 3º, 5º, 7º, pues la recta bisectriz $y = x$ corta en un punto a cada una de las ramas.

Para calcular la menor raíz positiva de la ecuación tg $x - x = 0$, observamos en las tablas de tangentes naturales los valores siguientes:

$$\text{tg}(180° + 77°) = 4{,}33, \quad x = \pi + 1{,}34 = 4{,}48, \quad f(x) \text{ signo } -$$
$$\text{tg}(180° + 78°) = 4{,}70, \quad x = \pi + 1{,}36 = 4{,}50, \quad f(x) \text{ signo } +$$

considerando entre ambos arcos intervalos de 10′, se acota el cero buscado entre 257° 20′ y 257° 30′, y después se llega a

$$257° \, 27' = 4{,}493 \ldots$$

4. **La propiedad D de las funciones continuas.** — Como corolario del § 26-2, resulta: *Si* f(x) *es continua en el intervalo* $[a, b]$ *y* η *es un valor comprendido entre* f(a) *y* f(b), *toma*

f (x) *el valor* η *por lo menos una vez dentro del intervalo* $[a, b]$.

Porque la función f $(x) - \eta$ es continua en $[a, b]$, y en sus extremos, a, b, toma valores de signos contrarios; luego, por lo menos en un punto ξ del intervalo, es f $(\xi) - \eta = 0$, o sea f $(\xi) = \eta$.

NOTA: Suele enunciarse también esta propiedad diciendo que una función continua pasa de un valor a otro alcanzando todos los intermedios. Pero una función puede tener esta propiedad sin ser continua. Por ejemplo, en el intervalo $[-1, +1]$ está definida la función $\operatorname{sen} \pi/x$; en él toma todos los valores comprendidos entre 1 y -1, infinitas veces cada uno, y pasa de un valor a otro cualquiera tomando todos los intermedios; sin embargo, es discontinua en el punto $x = 0$. Por lo tanto, no puede tomarse tal propiedad como definición de la continuidad.

Esta propiedad de tomar todos los valores intermedios entre cada dos de sus valores, se llama *propiedad* D. DARBOUX y LEBESGUE han dado ejemplos de funciones discontinuas en todo intervalo por pequeño que sea, y que sin embargo tienen en cada uno la propiedad D. Ver CARATHÉODORY (citado en Cap. IX, nota VIII, 3), pág. 228, o SAGASTUME BERRA (citado en Cap. IX, nota VIII, 2), pág. 64.

Tampoco basta con que $f(x)$ tenga en $[a, b]$ la propiedad D y tome cada valor *una sola vez* para que sea continua, como lo enseña el ejemplo de la función:

$$f(x) = \begin{cases} = 0 & \text{para } x = 0 \\ = 1 - x & \quad ,, \quad 0 < x < 1 \\ = 1 & \quad ,, \quad x = 1. \end{cases}$$

Para funciones monótonas, la propiedad D equivale a la continuidad. (Pruébese).

5. **Máximos y mínimos de funciones continuas.** — **TEOR.** de BOLZANO-WEIERSTRASS. — *Entre los valores de una función* f (x) *continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *hay un valor máximo absoluto* M *no superado por ningún otro: y un mínimo absoluto* m, *que no supera a ningún otro* f (x).

Esta propiedad de las funciones continuas no la tienen todas las funciones. Así, por ejemplo: la función $y = 1/x$ no es continua en todo el intervalo $[0,1]$, puesto que deja de serlo en el extremo $x = 0$; y no tiene valor máximo en $(0,1)$, sino que, por lo contrario, llega a exceder a cualquier número, por grande que sea, tomando x suficientemente pequeño.

También la función f $(x) = x$ muestra que para la validez del teorema es necesario que el intervalo sea *cerrado*. En todo intervalo abierto (a, b), esta función es continua (por serlo para todo x), pero no alcanza su extremo superior b. En otras palabras: la función no tiene máximo (§ 23-14) en (a, b).

DEM. *del teorema de* BOLZANO-WEIERSTRASS: Probemos, primero, que *si* $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$, *está acotada en* $[a, b]$, es decir, es acotado (§ 23-14) el conjunto de sus valores. Supongamos, por absurdo, que no fuera así; dividiendo $[a, b]$ en dos intervalos iguales, $f(x)$ no sería acotada en uno por lo menos de ellos, que elegiremos comenzando por la izquierda. Reiterando indefinidamente este proceso, se construye una suce-

sión de intervalos encajados (§ 7-4) que define un número real ξ. Todo entorno de ξ contiene un intervalo $[a_n, b_n]$ del encaje, donde $f(x)$ no está acotada, y entonces, $f(x)$ no es continua en $x = \xi$, contra la hipótesis.

Por § 23-14, $f(x)$ tiene en $[a, b]$ un extremo superior M, que veremos se alcanza en un punto $x = x_0$. Pues de lo contrario, la función $\varkappa(x) = [f(x) - M]^{-1}$, no acotada en $[a, b]$ por tomar $f(x) - M$ valores arbitrariamente pequeños, sería (por § 25-7, teor. 3) continua en $[a, b]$, lo que no es posible.

NOTA: Insistamos en que no basta la continuidad en el interior de $[a, b]$ para la validez de los teoremas anteriores; es indispensable también la continuidad (lateral) en los extremos.

Esto nos lleva a preguntar qué acontecerá en las funciones discontinuas. Un caso excepcionalmente importante, es el tratado en nota V.

6. Continuidad uniforme. Teorema de Heine-Cantor. — Para captar la esencia de este importante concepto, nada mejor que un ejemplo. La función $y = 1/x$ es continua en todo punto distinto de 0, como se ve formando el incremento:

$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{(x+h)x} = -hyy_1$$

llamando y_1 a la ordenada correspondiente al punto $x + h$ (fig. 68).

Si se elige, por ejemplo, $x = 4$, $y = 1/4$, para lograr que sea $|\Delta y| < 0{,}1$ bastará, evidentemente, tomar $|h| \leqq 1$; pero esta amplitud resulta ya excesiva en el punto $x = 1$, pues en él es $y = 1$, mientras y toma en el entorno de radio 1 valores arbitrariamente grandes. Es claro que se logra hacer Δy menor que 0,1, tanto en el punto 4 como en el 1, tomando $|h| \leqq 0{,}09$; pero también esta amplitud resulta excesiva para todos los puntos comprendidos entre 0 y 0,1, pues en entorno de tal amplitud hay valores y *arbitrariamente* grandes.

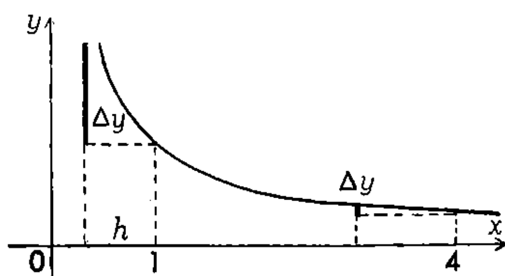


Fig. 68.

DEF.: La continuidad de $f(x)$ se dice *uniforme en un intervalo*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe otro número positivo δ, tal que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ para todo par de puntos x', x'' que distan menos de δ. (HEINE.)

Resulta, pues, que la continuidad de $1/x$ *no es uniforme* en ningún intervalo $(0, a)$, porque aunque en un cierto entorno de cada punto los valores de $f(x)$ difieren del que toma en él en menos de ε, y por lo tanto difieren entre sí en menos de 2ε, como hay infinitos de tales intervalos, y los hay arbitrariamente pequeños, no es posible elegir una amplitud mínima, válida para todo punto x.

Tal cosa no puede ocurrir con una función continua en un intervalo *cerrado* en virtud del teorema siguiente:

TEOR. DE HEINE-CANTOR: *La continuidad en todo intervalo cerrado es uniforme.* Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \text{ si: } |x' - x''| < \delta.$$

Porque si existiera un $\varepsilon > 0$ tal que para pares x', x'' arbitrariamente próximos fuese $|\Delta y| \geqslant \varepsilon$, habría, como probaremos, algún punto de discontinuidad en el intervalo $[a, b]$. En efecto, dividido $[a, b]$ en dos intervalos iguales por el punto medio c, habrá uno por lo menos $[a_1, b_1]$ que contendrá tales pares, ya que todos ellos no pueden estar separados por c, por ser $f(x)$ continua en él. Bisecado $[a_1, b_1]$, sea $[a_2, b_2]$ el intervalo parcial que contiene tales pares; siguiendo así, queda determinado un número ξ, tal que en todo entorno suyo existen intervalos $[a_n, b_n]$, y por lo tanto, pares de puntos donde $f(x)$ difiere en más de ε; luego, el punto ξ es de discontinuidad. Tal punto puede coincidir con el extremo a, o con el b, o ser interior al intervalo. c. q. d.

En la nota III puede verse otra demostración de este teorema, basada en un importante lema de BOREL.

EJERCICIOS

1. Probar que la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \text{ racional,} \\ 1 - x & \text{para } x \text{ iracional,} \end{cases}$

toma en $[0; 1]$ todo valor de $[0; 1]$ sólo una vez, pero es discontinua para todo x, salvo $x = \frac{1}{2}$. Permutando los valores en $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, es decir: $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 0$, se tendrá una función que toma todos los valores una sola vez y es discontinua en todo punto.

2. La función $y = 1/x$ es continua en el intervalo $(0; 1]$, y sin embargo carece de máximo, pues toma valores infinitamente grandes. Explicar esta aparente contradicción con el teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS.

3. A cada valor racional $x = p/q$ (fracción irreducible) del intervalo $[0, 1]$ le asignamos como correspondiente el valor $y = \frac{p}{1 + q}$. A cada valor irracional le asignamos el valor 0. Esta función es, evidentemente, acotada. ¿Tiene máximo? ¿Es continua?

4. Probar que la función sen (π/x), continua en $(0; 1)$, no es uniformemente continua en dicho intervalo abierto.

5. Para la función $f(x) = \sqrt{x}$, continua en $[0; 1]$, hallar un número $\delta > 0$ tal, que en cualquier intervalo de longitud $< \delta$ contenido en $[0; 1]$ sea la oscilación $< 1/1\,000$.

6. Probar que si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $\varphi(x)$, cuya gráfica es una quebrada inscrita en la gráfica de $f(x)$, y tal que $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ para todo x de $[a, b]$.

7. Probar que toda *función poligonal* (es decir, aquella cuya gráfica es una quebrada) puede expresarse en la forma $\varphi(x) = a + bx + \Sigma c_n |x - x_n|$, siendo x_n las abscisas de los vértices intermedios, o bien $\Sigma d_n |x - x_n|$ con todos los vértices. Expresar así la poligonal de vértices $(0; 0)$, $(1; 4)$, $(3; 0)$.

8. Definamos la continuidad en un punto y en un intervalo, tomando en consideración los valores de $f(x)$ para valores racionales de x sola-

mente. Probar con la función definida para todo x *racional* de $[0; 2]$, mediante $f(x) = (x - \sqrt{2})^{-1}$, que dada una función continua en el campo racional en un intervalo $[a, b]$, no siempre existe una función $F(x)$ continua en el campo real en $[a, b]$ y que coincida con $f(x)$ para x racional.

9. ¿En qué condiciones es posible tal prolongación de la función del campo racional al campo real, conservando la continuidad?

10. Una función $f(x)$ se llama *absolutamente continua* en $[a, b]$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} | f(x_i + h_i) - f(x_i) | < \varepsilon$$

para todo conjunto finito de subintervalos $[x_i, x_i + h_i]$ de $[a, b]$ sin puntos interiores comunes (no rampantes) tal que $\Sigma h_i < \delta$.

Probar que en esta definición, la desigualdad (*) puede reemplazarse por:

$$| \Sigma \; f(x_i + h_i) - f(x_i) | < \varepsilon.$$

11. Probar que toda función absolutamente continua en $[a, b]$ es también uniformemente continua en $[a, b]$.

12. Probar que la suma, diferencia y producto de dos funciones absolutamente continuas en $[a, b]$ son absolutamente continuas en $[a, b]$.

13. Probar que $y = f(x) = \sqrt{x}$ y $x = g(t) = t^2 | \cos (\pi/t) |$ con $g(0) = 0$, son absolutamente continuas en $[0; 1]$, mientras que la función absolutamente continua de función absolutamente continua $y = f[g(t)] \equiv \equiv t \sqrt{|(\cos \pi/t)|}$ con $y(0) = 0$, no es absolutamente continua en $[0; 1]$, aunque sí continua (uniformemente).

14. Probar que si $f(x)$ y $g(t)$ son absolutamente continuas, y $g(t)$ es monótona, entonces la función de función $f[g(t)]$ es absolutamente continua.

Notas al capítulo VI

I. **Nota histórica sobre la continuidad.** — El teorema sobre existencia de extremos de las variables acotadas (§ 26-5), generalmente atribuído a Weierstrass, así como el criterio general de convergencia que suele llamarse de Cauchy, son de Bolzano (1817), con motivo de su demostración de existencia de ceros. Bernardo Bolzano (1781-1848) fué uno de los primeros que introdujeron el concepto moderno del rigor en las demostraciones del Análisis. En su trabajo titulado *Paradoxien des Unendlichen*, publicado en 1850, se reconoce por primera vez que muchos enunciados aparentemente obvios sobre funciones continuas, pueden y deben *demostrarse*. Un ejemplo característico es su teorema sobre existencia de ceros (§ 26-2). Aun en épocas más recientes, muchos autores han tomado como condición equivalente a la continuidad de $f(x)$ (o bien como definición de la misma), el que no pase de un valor a otro sin tomar todos los intermedios, lo que como vimos (§ 26-4) es falso.

La idea de fundamentar el Análisis sobre base aritmética se desarrolla a comienzos del siglo XIX, sobre todo por obra de A. L. Cauchy (1789-1857), para dotar de rigor lógico a la magnífica obra del siglo XVIII, en que los conceptos del Análisis se manejaban sobre la base de una intuición del resultado correcto, y no estaban siempre libres de asociaciones místicas (particularmente los "infinitamente pequeños").

La notación $f(a + o)$ para el límite a la derecha, es de Dirichlet, y su origen es la notación de Newton para los infinitésimos, que designaba por o.

Según Dini-Lüroth (1840), clasificó Heine la continuidad de $f(x)$

en un intervalo en uniforme y no uniforme (CRELLE, 71, 1872, p. 361), y CANTOR logró demostrar la equivalencia de ambos conceptos (§ 26-6).

II. **Conjuntos lineales.** — *a) Clasificación de los puntos de la recta sostén.* — Consideremos un conjunto M, *lineal*, es decir, formado por puntos de una recta. Dado un punto *a* de esta recta, se presenta uno, y sólo uno, de estos casos:

1º Existe un entorno de *a* formado por puntos de M (incluso el *a*). En este caso, diremos que *a* es *interior* a M.

2º Existe un entorno de *a* que no contiene ningún punto de M (no perteneciendo tampoco *a* a M). En este caso, diremos que *a* es *exterior* a M. [Es inmediato ver que estos puntos son los interiores del complemento CM (Cap. I, nota I)].

3º Todo entorno de *a* contiene puntos de M y de CM. En este caso diremos que *a* es un *punto frontera* de M.

En un intervalo abierto (a, b), son interiores todos sus puntos. No así en un intervalo cerrado. En ambos casos, los puntos frontera son los extremos, y los puntos exteriores los restantes puntos de la recta.

b) Puntos de acumulación. — Se dice que *a* es un *punto de acumulación* del conjunto M si en todo entorno de *a* hay puntos de M diferentes de *a* (demuéstrese que entonces hay infinitos). Un punto de acumulación puede pertenecer o no al conjunto (ej.: los extremos de un intervalo cerrado, o abierto). Todo punto de M que no sea de acumulación se llama *aislado*; por ejemplo, son aislados todos los puntos de un conjunto finito.

Demuéstrese, como ejercicio, la propiedad siguiente:

Si a es punto de acumulación del conjunto M, *se pueden formar con elementos de* M *infinitas sucesiones indefinidas*: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *que tienen a a como punto límite.*

TEOR. *de* BOLZANO-WEIERSTRASS: *Todo conjunto acotado de infinitos puntos admite por lo menos un punto de acumulación.*

Este teorema, casi trivial desde el punto de vista intuitivo, es de gran importancia en la fundamentación del Análisis. Lo demostraremos por el método constructivo de la dicotomía, que ya hemos usado.

Sea H una cota inferior y K una cota superior del conjunto. Dividamos el intervalo [H, K] en dos intervalos iguales. Uno de ellos, por lo menos, contendrá infinitos puntos del conjunto; si ello ocurre con ambos, tomemos el de la izquierda, prosiguiendo con él la división, y así indefinidamente se determina, por el principio de encaje de intervalos, un número l. En todo entorno de l hay un intervalo de los anteriores y, por consiguiente, infinitos puntos del conjunto. El punto l es entonces de acumulación.

Si el conjunto no es acotado, uno de los puntos, $+\infty$, $-\infty$, es de acumulación. Por lo tanto, todo conjunto de infinitos puntos admite por lo menos un punto de acumulación, finito o infinito.

c) Límites de oscilación. — El conjunto de los puntos de acumulación de M se llama *conjunto derivado* de M; lo indicaremos con M′. El número l hallado en la demostración anterior es el menor de los puntos de acumulación, es decir: el extremo inferior accesible, o mínimo (§ 23-14), del conjunto derivado. Análogamente se prueba que M′ tiene máximo, es decir: extremo superior accesible L. Los números l y L se llaman *límites de oscilación* (inferior y superior) del conjunto acotado M.

Llamando e y E a los extremos (accesibles o no) del conjunto acotado M, se tiene:

$$e \leqq l \leqq L \leqq E.$$

EJEMPLO: En el conjunto formado por los puntos $(-1)^n + 1/n$ (n número natural) se tiene:

$e = -1$ (inaccesible), $l = -1$, $L = 1$, $E = 3/2$ (accesible).

Los límites de oscilación *de la sucesión* $a_n = (-1)^n + 1/n$ son también -1 y 1, pero no siempre hay coincidencia, y se trata de conceptos diferentes, como muestra la sucesión $a_n = (-1)^n$, donde para $n \to \infty$ lim sup $a_n = 1$, lim inf $a_n = -1$, pero el conjunto formado por los elementos distintos de la sucesión es finito, y no tiene, por lo tanto, puntos de acumulación (§ 20-5).

Cuando $l = L$, éste es el único punto de acumulación, y se llama *punto límite* del conjunto.

d) Conjuntos densos, cerrados y perfectos. — Puede ocurrir que entre un conjunto M y su derivado M′ valga una de las relaciones siguientes:

$$M (\leqq) M' \quad M (\geqq) M', \quad M = M'.$$

En el primer caso, todo punto de M es de acumulación; el conjunto está caracterizado por no tener puntos aislados, y se llama *denso en sí*. Ejemplo: el conjunto de los números racionales, cuyo derivado es el de los números reales.

En el segundo caso, todo punto de acumulación pertenece al conjunto; el conjunto se llama *cerrado*. Ejemplo: todo intervalo cerrado. El conjunto $M \cup M'$ (Cap. I, nota I), que se obtiene agregando a M todos sus puntos de acumulación, es el menor conjunto cerrado que contiene a M; se llama *clausura de* M, y se suele indicar $\overline{M}$.

En el tercer caso, el conjunto es a la vez cerrado y denso en sí; se llama *perfecto*. Ejemplo: todo intervalo cerrado.

III. El lema de Borel y sus aplicaciones. — He aquí una sencilla propiedad de los intervalos cerrados, que no vale para los no cerrados, y que por efectuar el tránsito de lo infinito a lo finito, es muy útil en Análisis.

Si a cada punto de un intervalo cerrado $[a, b]$ *se hace corresponder un entorno del mismo, hay un número finito de éstos, tales que cada punto del intervalo tiene alguno de ellos como entorno.* (Borel).

Supongamos, por el absurdo, que para todo conjunto finito de tales entornos e haya puntos x no cubiertos; bisecado $[a, b]$, en alguna de sus mitades $[a_1, b_1]$ habrá de tales puntos, si ello acontece en ambas, tomemos la de la izquierda; bisecada ésta, en alguna de sus dos partes, que llamaremos $[a_2, b_2]$, acontecerá lo mismo; etc. Formamos así una sucesión de intervalos encajados (§ 7-4), que determina un punto ξ, contenido en todos estos intervalos, el cual, por la hipótesis, es interior a uno de los entornos e; y éste es también entorno de todos los puntos de los $[a_n, b_n]$ que desde un n en adelante son interiores a él. Habíamos supuesto que no podían cubrirse con *ningún número* finito de entornos e y resultan cubiertos con un e; contradicción que prueba la imposibilidad de tal supuesto.

Ejercicio: Asígnese a cada x de $(0, 1]$ el entorno $(\frac{1}{2}x, 2)$ y véase que no es posible cubrir todo ese intervalo $(0,1]$, con un número finito de tales entornos.

Vemos, así, cuán esencial es que el intervalo sea *cerrado*.

La posibilidad de reemplazar un conjunto de infinitos intervalos por un número finito de ellos, permite demostrar muy rápidamente los teoremas sobre funciones continuas del § 26. (Véase: Rey Pastor, *Teoría de las funciones reales*, edición 1925, pág. 91). Lo haremos solamente para el teorema de Heine-Cantor (§ 26-6):

Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada punto x_0 hay un entorno $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$, tal que en la intersección de él con $[a, b]$ es: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Por el lema de Borel se puede cubrir $[a, b]$ con un número *finito* de estos entornos. Si δ es el mínimo de las amplitudes de estos últimos, dos puntos x', x'' que disten menos de δ deben estar en un mismo entorno, en cuyo caso los valores de $f(x)$ difieren en menos de 2ε; o bien en dos entornos con un punto ξ común, en cuyo caso:

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(\xi)| + |f(\xi) - f(x'')| < 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon$$

lo que prueba que la continuidad es *uniforme* en $[a, b]$.

IV. Discontinuidades puntuales y totales. — Las funciones discontinuas más sencillas son aquellas que sólo tienen discontinuidades aisladas, es decir (nota II), hay un entorno de cada punto de discontinuidad en el cual es continua la función, salvo en ese punto. Tales son todas las funciones que hemos citado, excepto la de DIRICHLET (§ 23-3, ej. 4), que es discontinua en todo punto. He aquí otro tipo intermedio:

EJEMPLO 1. Pongamos $y = 0$ para x irracional, e $y = 1/q$ para $x = p/q$ [fracción irreducible en el intervalo (0,1)]. Fijado un número natural, por ejemplo, 1 000, hay un número finito de fracciones cuyo denominador es menor que 1 000, y si δ es la distancia mínima al número irracional x_0, todos los números racionales que distan menos de x_0 tienen denominador mayor que 1 000, y por lo tanto, la función es menor que 0,001 en el entorno de semiamplitud δ. He aquí, por lo tanto, una función continua en los puntos irracionales y, evidentemente, discontinua en los racionales, mientras que la de DIRICHLET es discontinua en todo punto.

DEF.: Se llaman *totalmente discontinuas* en un intervalo, las funciones que son discontinuas en todos sus puntos; *puntualmente discontinuas*, las que sin ser continuas en todo el intervalo, en todo intervalo parcial tienen algún punto de continuidad.

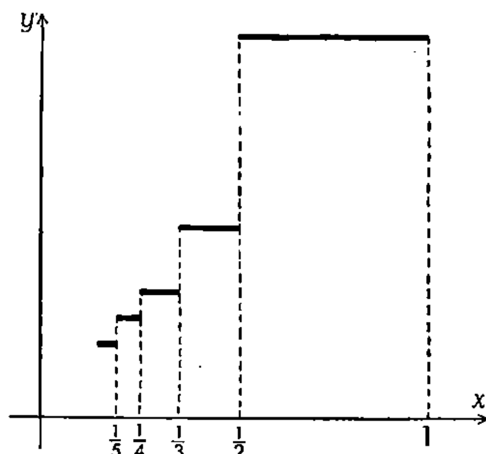


Fig. 69.

EJEMPLOS: 2. La función de DIRICHLET es totalmente discontinua; la función del ejemplo anterior es puntualmente discontinua; también lo son las que solamente tienen discontinuidades aisladas.

3. La función (fig. 69):

$$f(x) = \begin{cases} = 1 : E(1/x) & \text{para } x \neq 0 \\ = 0 & \text{,, } x = 0 \end{cases}$$

tiene solamente discontinuidades aisladas. El origen es punto de acumulación (nota II) de discontinuidades, pero no es una discontinuidad.

V. Funciones semicontinuas. — Repasando la demostración del teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS (§ 26-5) se observa que de las dos acotaciones que caracterizan la continuidad en el punto x, o sea: que en un cierto entorno de x_0 se verifique:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

solamente la segunda ha sido utilizada para demostrar la existencia de

un máximo de $f(x)$; y es en cambio la primera la que interviene en la demostración de existencia del mínimo.

Esta observación indujo a BAIRE a estudiar separadamente las funciones que solamente satisfacen a una u otra acotación.

Si solamente se exige la acotación superior, es decir, si dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno de x_0, donde:

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

la función se llama *semicontinua superiormente* en x_0; y si se verifica la acotación inferior, la función se dice *semicontinua inferiormente*; unas y otras se llaman *semicontinuas*.

La continuidad en x_0 significa, por lo tanto, continuidad superior e inferior.

Por ejemplo: La función de DIRICHLET es continua superiormente en los puntos racionales, y lo es inferiormente en los irracionales.

Con esta nomenclatura, el teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS se desdobla en estos dos:

Toda función semicontinua superiormente en un intervalo alcanza en él un valor máximo absoluto; toda función semicontinua inferiormente, alcanza un mínimo absoluto.

De las definiciones de semicontinuidad resulta inmediatamente:

a) Si $f(x)$ *es semicontinua superiormente, su opuesta* $-f(x)$ *lo es inferiormente, y viceversa.*

b) La suma de funciones semicontinuas superiormente (inferiormente) lo es también.

c) La diferencia entre dos funciones semicontinuas de sentido opuesto, es semicontinua del mismo sentido que el minuendo.

Estas propiedades pueden referirse a un punto fijo o a todos los puntos de un intervalo.

En Cap. XV, nota II, usaremos el concepto de semicontinuidad en la siguiente forma, equivalente a la anterior como es fácil demostrar (hágase): $f(x)$ es semicontinua superiormente (inferiormente) en x_0 si para toda sucesión $x_n \to x_0$ se verifica:

$$f(x_0) \geqslant \lim\sup f(x_n), \qquad [f(x_0) \leqslant \lim\inf f(x_n)].$$

VI. **Bibliografía.** — 1. A fines del siglo XVIII, escrita bajo la inspiración de las ideas de J. LAGRANGE, y abarcando todos los resultados entonces conocidos del cálculo infinitesimal, aparece:

S. F. LACROIX: *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (París, 1797; edic. elemental, Courcier, París, 1806), que según indica F. KLEIN (en libro citado en el Cap. I, nota IV-12) tiene señalada importancia histórica como manantial de muchas obras de cálculo infinitesimal que se publicaron en el siglo XIX.

Sin embargo, la primera exposición sistemática de las funciones reales, que representa el primer esfuerzo serio de depuración de los conceptos básicos del análisis matemático y el comienzo del proceso de su "aritmetización", está en:

A. L. CAUCHY: *Cours d'analyse de l'École Polytechnique.* (París, 1821; Oeuvres, Sér. II, t. III, Gauthier-Villars, París, 1897).

Merece indicarse que con este curso comienza la gran tradición didáctica de la Escuela Politécnica de París, dedicada a la preparación de los futuros oficiales e ingenieros del Estado francés, prueba de la envidiable base científica en que se apoyan sus estudios. Así también marcó época, por su contenido, el curso de la misma escuela de C. JORDAN, en ediciones que van de 1885 a 1913, y modernamente han mantenido la tradición los grandes cursos de J. HADAMARD (1930) y P. LEVY (1931).

Las lecciones de K. WEIERSTRASS, impartidas desde 1860 (no publicadas hasta 1886), contienen la primera exposición rigurosa, pues hace el estudio aritmético de las variables independientes, que falta en CAUCHY.

Siguieron los cursos de C. MÉRAY (1872), R. LIPSCHITZ (1877), U. DINI (1878), P. DU BOIS REYMOND (1882); mientras que las obras contemporáneas francesas de C. STURM (1850), J. BERTRAND (1864-70), J. A. SERRET (1868), C. HERMITE (1873), J. HOÜEL (1878-81) y P. M. H. LAURENT (1885-91), que siguen el modelo de CAUCHY, son poco rigurosas. Después del olvidado precursor MÉRAY, las primeras obras francesas que introducen la teoría aritmética del número real y consiguiente estudio de las variables independientes, son la citada de JORDAN (1885) y la de J. TANNERY (1886).

Un progreso en la vía del rigor significa el *Cálculo*, de A. GENOCCHI-G. PEANO (1884), y el *Análisis infinitesimal*, de G. PEANO (1893), así como el *Manual de Ejercicios críticos*, de E. PASCAL (1895); en alemán es fundamental el riguroso tratado de O. STOLZ (1893).

Las fechas anteriores se refieren a la primera edición de cada obra.

Obra que en la Argentina merece citarse, es la de:

L. GÓMEZ DE TERÁN: *Lecciones de cálculo infinitesimal*, dictadas en la Escuela Nacional de Ingenieros de San Juan (Libr. Ch. Bouret, París-México, 1890), pues el autor, inspirado en los mejores tratadistas franceses de la época, tales como J. M. C. DUHAMEL, C. STURM, J. A. SERRET, etc., realiza una exposición depurada de disquisiciones seudofilosóficas, tan en boga entonces, sobre la noción de función, diferenciación, desarrollo en serie, cálculo integral, aplicaciones geométricas y ecuaciones diferenciales hasta nociones de cálculo de variaciones, constituyendo un ejemplo de honradez didáctica y científica y muestra del alto nivel de la formación que ya en aquella época obtenían los estudiantes de ingeniería de San Juan.

Del mismo tipo, y ya más modernizado, dando el mismo buen ejemplo de buena preparación de los futuros ingenieros, puede citarse la obra publicada por J. SORTHEIX en Tucumán.

2. Nos hemos basado en gran parte en las dos siguientes obras:

J. REY PASTOR: *Elementos de la teoría de funciones*. (3ª ed., Ibero-Americana, Madrid-Buenos Aires, 1953);

J. REY PASTOR: *Curso de cálculo infinitesimal*. (6ª ed., Bs. As., 1953).

La primera presenta una exposición amplia y rigurosa de introducción a la teoría de funciones reales y complejas; en ella se cuida preferentemente el aspecto conceptual y formativo, mientras que el instrumental y de aplicación técnica se reserva para la segunda.

Caracterizado por la prolijidad y cuidado, tanto de la presentación editorial como de la extensa exposición didáctica, es:

C. DE LOSADA Y PUGA: *Curso de Análisis matemático*. (3 vols., Universidad Católica del Perú, Lima, 1945-47-54).

Obra del mismo tipo, abarcando desde el número real hasta integrales dobles, es:

J. ABDELHAY: *Curso de análise matemática*. (2 vols., 2ª ed., Univ. Brasil, Río de Janeiro, 1953).

Una obra muy reputada, de gran valor didáctico, es:

R. COURANT: *Vorlesungen über Differential und Integralrechnung* (I. *Funktionen einer Veränderlichen;* II. *Funktionen mehrerer Veränderlicher;* 3ª ed., Springer, Berlín, 1955); trad. inglesa: *Differential and integral calculus* (2 vols., 2ª ed., Blackie, Glasgow, 1942).

El primer volumen de la obra anterior estudia simultáneamente la integración y derivación de las funciones reales de una variable, y el segundo volumen estudia las funciones de varias variables y una iniciación a la teoría de ecuaciones diferenciales y funciones de variable compleja. El desarrollo sigue un plan elemental, empleando conceptos poco generalizados, pero fundamentados en forma precisa y clara, y luego ampliados en complementos adecuados. Sin faltar al rigor, se saca todo el partido posible de la intuición, se muestra constantemente la aplicación práctica en las ciencias naturales de los conceptos introducidos, y numerosos ejemplos, ejercicios graduados y figuras facilitan la total compren-

sión del texto. Éste está muy influído por las conocidas ideas de KLEIN sobre la enseñanza de la matemática elemental (en obra citada en Cap. I, nota IV-12).

Obras de más amplios horizontes teóricos, aunque también dirigidas tanto a estudiantes de matemática pura como a los que cursan la propedéutica de la ingeniería, son la de SEVERI (citada en el Cap. IV, nota III-1), y la de:

L. TONELLI: *Lezioni di Analisi matematica.* (Pisa, 1946).

También excelente por su rico contenido, en apretado volumen, debe citarse:

B. LEVI: *Analisi matematica algebrica ed infinitesimale.* (Zanichelli, Bolonia, 1937).

3. De más fácil lectura son las obras:

S. PINCHERLE: *Lezioni di Calcolo infinitesimale.* (2 vols., 3ª ed., Zanichelli, Bolonia, 1927).

U. CISOTTI: *Lezioni di Analisi matematica.* (Edit. Politécnica, Milán, 1926).

La primera más teórica y formativa; la segunda, dirigida a dar una base matemática simplificada a futuros ingenieros.

Obra muy elemental, correcta y con multitud de ejercicios prácticos y aplicaciones, es la de:

W. A. GRANVILLE y P. F. SMITH: *Elements of the differential and integral calculus.* (3ª ed. en colab. con W. R. LONGLEY, Ginn, Boston, 1941; trad. castellana: *Cálculo diferencial e integral*; Uteha, México, 1952, reimpr. 1955; trad. francesa de A. A. M. SALLIN, 11ª ed., Lib. Vuibert, París, 1952).

En castellano, merecen también citarse:

P. MIQUEL: *Cálculo diferencial e integral.* (2 vols., Cultural, La Habana, 1944).

P. CASTELLS: *Análisis matemático.* (Barcelona, 1944).

Un carácter más teórico corresponde a:

R. SAN JUAN: *Lecciones de Análisis matemático (2º curso).* (Dossat, Madrid, 1946);

y los cursos (preliminar, general y superior) de *Análisis matemático para ingenieros*, de F. NAVARRO BORRÁS en colaboración con S. RÍOS.

4. Cursos altamente formativos célebres por la personalidad de sus autores, su claridad de exposición, rigor completo, profundidad y riqueza de contenido, apropiados para alumnos que quieran adquirir una seria y sólida base científica en su iniciación universitaria, son el de G. H. HARDY (citado en el Cap. II, nota IV-2), y el de:

CH. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Cours d'analyse infinitésimale.* (Vol. I, 10ª ed., 1947; vol. II, 8ª ed., 1949, con la colaboración de F. SIMONART; A. Uystpruyst, Louvain; Gauthier-Villars, París; repr. fotogr., Dover, Nueva York, 1946).

Éste contiene el cálculo diferencial e integral en funciones reales de una y varias variables, aplicaciones geométricas, integrales generalizadas, integrales curvilíneas, integrales eulerianas, series de FOURIER y trigonométricas, números y polinomios de BERNOULLI, teoría elemental de ecuaciones diferenciales, y un breve resumen de cálculo de variaciones. Así constituye uno de los mejores fundamentos para pasar, sea a las aplicaciones del cálculo a las teorías mecánicas y físicas, sea a estudios monográficos en las ramas del análisis superior.

Obra breve y aun de carácter elemental, dirigida por el examen de puntos críticos a completar la formación teórica de alumnos que conozcan el manejo práctico del instrumental matemático, es:

W. F. OSGOOD: *Functions of real variable.* (Hafner, Nueva York, 1938).

5. Tratado más amplio y completo que los anteriores, de exposición clara y elegante, es el ya clásico de:

E. GOURSAT: *Cours d'analyse mathématique.* (Vol. I, 5ª ed., 1943; II, 7ª ed., 1949; III, 5ª ed., 1942; Gauthier-Villars, París).

Más moderno y actual es el de

G. VALIRON: *Cours d'analyse mathématique.* (Vol. I, *Théorie des fonctions*, 2ª ed., 1948; vol. II, *Équations fonctionnelles, Applications*, 1945; Masson, París).

Más sintético y antiguo es:

E. PICARD: *Traité d'analyse.* (3 vols.,; 3ª ed., Gauthier-Villars, París, 1922-28).

A estos tratados y a los de la Escuela Politécnica antes citados se pasaba en Francia mediante cursos preparatorios de *Mathématiques générales* y *Mathématiques spéciales* (L. ZORETTI, R. GARNIER, etc.), que carecían de todo rigor, por adaptarse a un grado de enseñanza elemental, pero así, los fundamentos no quedaban establecidos de modo adecuado en parte alguna. Se ha procurado solventar esta deficiencia mediante la refundición de cursos clásicos, como el de:

P. APPELL y G. VALIRON: *Analyse mathématique.* (2 vols., 6ª ed., Gauthier-Villars, París, 1951), o por la redacción de amplios cursos de información, pero en los que los fundamentos quedan claramente señalados, aun sin entrar profundamente en ellos, como se hace en:

G. BOULIGAND y J. DUFRESNOY: *Mathématiques pures et appliquées.* (2 vols., 2ª ed., Viubert, París, 1945).

Curso de iniciación universitaria en Alemania, riguroso, objetivo y sobrio, es el de:

E. L. LINDELÖF y E. ULLRICH: *Einführung in die höhere Analysis.* (Teubner, Leipzig-Berlín, 2ª ed., 1950).

Más extensa y muy difundida es la antigua obra:

H. v. MANGOLDT (refundición de K. KNOPP): *Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum Selbstudium.* I. *Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre*; II. *Differentialrechnung. Unendliche Reihen, Elemente der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie*; III. *Integralrechnung und ihre Anwendungen, Funktionentheorie, Differentialgleichungen.* (9ª ed., Hirzel, Stuttgart, 1948).

Cursos alemanes de cálculo infinitesimal muy en boga, son también los de G. KOWALEWSKI, L. BIEBERBACH y R. FRICKE. Continuación de la breve obra sobre fundamentos de E. LANDAU (citada en el Cap. I, nota IV-6) es la *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung* (P. Noordhoff, Groningen, 1934; trad. ingl.: *Differential and integral Calculus*, Chelsea, Nueva York, 1951), del mismo autor, construída con el mismo rigor lógico y extrema concisión de la obra anterior.

Más didáctica y extensa, adaptada a los programas modernos de cálculo infinitesimal, es:

A. DUSCHEK: *Vorlesungen über höhere Mathematik.* (Vol. I, 3ª ed., 1960; vol. II, 2ª ed., 1958; vol. III, 2 ªed., 1960; Springer, Viena).

Una introducción al Cálculo infinitesimal con método genético y numerosas y oportunas referencias históricas da:

O. TOEPLITZ y G. KÖTHE: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung.* (Springer, Berlín, 1949).

Un tratamiento meticuloso del análisis infinitesimal clásico, resaltando los aspectos teóricos, con abundancia de ejercicios y ejemplos de naturaleza estrictamente matemática, da la excelente obra que por su propósito deja casi totalmente de lado las aplicaciones:

A. OSTROWSKI: *Vorlesungen über Differential - und Integralrechnung.* (I. *Funktionen einer Variablen*, 2ª ed., 1960; II. *Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen*, 2ª ed., 1960; III. *Integralrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen*, 1954, Birkhäuser, Basilea).

Muy completo y extenso es el tratado:

O. HAUPT, G. AUMAN y C. PAUC: *Differential - und Integralrech-*

nung unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse. (Vol. I, 2ª ed., 1948; vol. II, 2ª ed., 1950· vol. III, 1954; Walter de Gruyter, Berlín).

Con amplia generalidad en las conceptuaciones y desarrollos, y la constante tendencia a adecuar las demostraciones a los fines del cálculo numérico, está la obra en dos tomos:

M. PICONE y G. FICHERA: *Trattato di analisi matematica* (Tumminelli, Roma; vol. I, 1954; vol. II, 1955).

6. Sobre infinitésimos existe la monografía de:

G. H. HARDY: *Orders of infinity.* (2ª ed., Cambridge Univ. Press, 1924).

Todos los libros modernos contienen ejemplos y ejercicios críticos y aclaratorios. Colecciones especializadas de gran reputación son las de G. POLYA y G. SZEGÖ (citada en el Cap. V, nota IV-2), la breve, ya citada y clásica, de:

E. PASCAL: *Esercizi critici di calcolo differenziale e integrale.* (Man. Hoepli, Milán, 1909);

la de soluciones discutidas y plenamente desarrolladas de:

G. JULIA: *Exercices d'analyse.* (4 vols., Gauthier-Villars, París, 1944-48),

por no citar las antiguas francesas de A. L. CAUCHY y F. J. FRENET, aun plenas de sugerencias actuales, o las más modernas de D. LEIB y E. LAINÉ sobre cálculo diferencial e integral.

En castellano existen diversas colecciones, tales como las de J. Mª IÑIGUEZ ALMECH, de F. NAVARRO BORRÁS y la más reciente de:

S. SELZER y L. M. DE LUCHINI: *Ejercicios de Algebra y Análisis matemático.* (Rozas, Buenos Aires, 1953).

Entre las colecciones italianas citaremos también las de G. FUBINI y G. VIVANTI (2ª ed., Viglongo, Torino, 1947) y de M. PICONE y C. MIRANDA (2ª ed., Tumminelli, Roma, 1945).

Un libro de consejos didácticos, que contiene sugerencias e instrucciones para resolver problemas y cuestiones matemáticas planteadas, y además un "diccionario de heurística", formado por artículos caracterizados por palabras o frases breves, tales como "analogía", "idea brillante" "luz improvisa" ("bright idea", "seing the light"), apropiado para invitar a la reflexión y también para obtener un momento de esparcimiento, es:

G. POLYA: *How to solve it. A new aspect of mathematical Method.* Princeton Univ. Press, 1945).

Del mismo estilo pero de mayor alcance es la obra en dos tomos del mismo autor:

G. POLYA: *Mathematics and plausible reasoning.* Vol. I: *Induction and analogy in Mathematics.* Vol. II: *Patterns of plausible reasoning* (Princeton Univ. Press, 1954).

Capítulo VII

LAS FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES

27. Funciones exponencial, logarítmica y potencial

1. **Función exponencial.** — Se llama así a la función

[27-1] $$y = \mathrm{f}(x) = a^x \quad (a > 0),$$

es decir, una potencia donde *la variable independiente es el exponente*, siendo la base una constante positiva.

Tendremos, por ejemplo, $\mathrm{f}(3/2) = a^{3/2} = \sqrt{a^3}$. Tomando la raíz aritmética (§ 8-1), la función [27-1] queda unívocamente definida para todo *x racional*, y su variación en este campo resulta de lo establecido en el § 8-5, *b*.

Como los números racionales forman un conjunto *denso* (§ 6-6) es natural que al observar las figuras 28 y 29 de § 8-5, nos preguntemos si será posible extender la definición de la función a todos los valores reales de *x* "*por continuidad*", es decir, de modo que la función que resulte sea continua. Pero esto es exactamente lo que hicimos al definir la potencia de exponente real (§ 8-6, *a*), con lo cual vemos que *esa extensión por continuidad es posible y de una sola manera.*

Si $a = 1$, [27-1] se reduce a la función constante $\mathrm{f}(x) = 1$ y no la consideraremos como función exponencial.

Con las proposiciones establecidas en el § 8-5 y 6, podemos enunciar las siguientes *propiedades de la función exponencial* (visibles en las gráficas, fig. 28 y 29 de § 8-5) :

1º) Para todo x es $a^x > 0$. En particular, *la función exponencial no se anula nunca.*

2º) $\mathrm{f}(0) = a^0 = 1$. [Todas las gráficas pasan por el punto (0;1)].

3º) $\mathrm{f}(1) = a^1 = a$.

$a > 1$	$0 < a < 1$
4º) a^x es estrictamente creciente.	a^x es estrictamente decreciente.
5º) $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.	$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$.
6º) $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.	$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

PROBLEMA: ¿Cómo son entre sí las gráficas de a^x y de $(1/a)^x$?

Cuando no se especifica cuál es la base, se entiende de ordinario por *función exponencial* la función $y = e^x$, donde la base es el número irracional $e = 2{,}718\ldots$ (definido en el § 8-8, c_1). La llamaremos también exponencial *natural*, y cualquier otra se reduce a ella, pues:

[27-2] $$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x.\ln a}.$$

2. **La continuidad en las funciones monótonas.** — El teorema siguiente es muy útil para el estudio de la continuidad de las funciones elementales:

TEOR.: *Si una función* $y = \mathrm{f}(x)$, *estrictamente monótona en el intervalo* $[a, b]$, *admite función inversa* $x = \varphi(y)$ *en el intervalo* $[\mathrm{f}(a), \mathrm{f}(b)]$ ó $[\mathrm{f}(b), \mathrm{f}(a)]$, *ambas son continuas en sus respectivos intervalos.*

Supongamos, por ejemplo, que $\mathrm{f}(x)$ sea estrictamente cre-

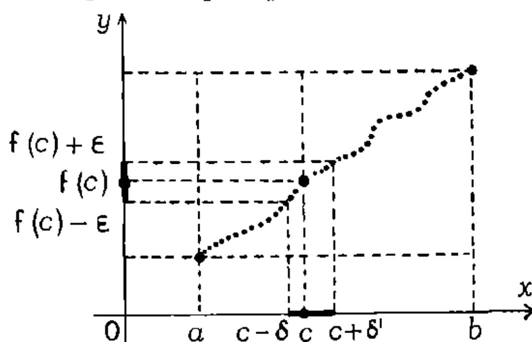


FIG. 70.

ciente; si son x' y x'' los valores de x correspondientes a los valores $y' < y''$ es $x' < x''$; de lo contrario, si fuese $x' \geqq x''$ resultaría $y' \geqq y''$, contra lo supuesto; luego, la función inversa $x = \varphi(y)$ es estrictamente monótona creciente (fig. 70).

Al intervalo cerrado determinado por dos valores cualesquiera de una de las variables, corresponde el intervalo cerrado determinado por los valores correspondientes de la otra; luego, los valores de y quedan dentro del entorno $[\mathrm{f}(c) - \varepsilon, \mathrm{f}(c) + \varepsilon]$ sin más que tomar x en el intervalo homólogo $[c - \delta, c + \delta']$, y recíprocamente; es decir, $y = \mathrm{f}(x)$ y $x = \varphi(y)$ son funciones continuas.

3. **Función logarítmica.** — Se llama así a la función inversa de la exponencial [27-1], que existe en virtud de lo demostrado en el § 8-7:

[27-3] $$x = \varphi(y) = \log_a y,$$

y está definida para $0 < y < +\infty$, *si* $a > 0$ *y* $a \neq 1$.

Escribamos ahora la función en otra forma:

[27-4] $$y = \varphi(x) = \log_a x,$$

donde llamamos de nuevo x a la variable independiente e y a la función, y observemos (§ 23-12) cómo se obtiene de la gráfica de la función exponencial (figs. 28 y 29 de § 8-5), la gráfica de la función logarítmica (figs. 30 y 31 de § 8-7) por simetría respecto a la bisectriz de primer y tercer cuadrantes.

Las propiedades 1ª) a 4ª) de § 8-7, y las correspondientes al caso $0 < a < 1$ pueden enunciarse ahora así (ver también las gráficas):

1º) La función $\log_a x$ sólo está definida para $x > 0$.

2º) $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$.

$a > 1$	$0 < a < 1$
3º) $\log_a x$ es estrictamente creciente.	$\log_a x$ es estrictamente decreciente.
4º) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.
5º) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$.	$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$.

PROBLEMA: ¿Cómo son entre sí las gráficas de $\log_a x$ y de $\log_{(1/a)} x$?

Del teorema de § 27-2 resulta nuevamente la continuidad de la función exponencial en todo el campo real, y además que *la función logarítmica es continua en todo el campo real positivo.*

Como hasta ahora esta función está definida en ese campo solamente, podemos decir simplemente: *es continua.*

Cuando no se especifique cuál es la base, entenderemos por *función logarítmica* la de base e, o sea § 8-8, c_2) : $y = \ln x$.

NOTA: Como los logaritmos en distintas bases son proporcionales (§ 8-8, c), una misma gráfica representa distintas funciones logarítmicas con sólo cambiar la escala en el eje y (y eventualmente su sentido). En cambio, la escala en x queda fijada, pues todas las curvas logarítmicas cortan al eje x en el punto de abscisa 1.

4. **Función potencial.** — Esta función:

[27-5] $$y = g(x) = x^a,$$

ya fué considerada para $a = m/n$ racional en el § 8-5, a, y para exponente a real cualquiera en el § 8-6; también podemos definirla en el campo real $x > 0$ como la exponencial de su logaritmo, lo que permitirá prolongarla al campo complejo (§ 45). Como ese logaritmo vale (§ 8-8, b) $a . \ln x$, se tiene:

[27-6] $$y = g(x) = e^{a \ln x} \quad (x > 0).$$

Ejercicio: Expresar como funciones compuestas de exponencial y logarítmica las funciones x^r, $x^{1/x}$, x^{-x^2}.

Notas: 1. En el § 23-10 hemos considerado para ciertos exponentes la función potencial definida *en todo el campo real* o en todo $x \neq 0$ real, y además tomábamos no sólo el valor aritmético de la raíz, como conviene en ciertos casos. La restricción $x > 0$ desaparecerá al ampliar el logaritmo al campo complejo (§ 45).

2. Como funciones elementales suelen considerarse, además de las que ya vimos, las circulares y las hiperbólicas. Estas últimas serán definidas en el § 29 a partir de la exponencial, y otro tanto puede hacerse con las circulares en el campo complejo, como veremos (§ 45). Por lo tanto, *todas las funciones elementales resultan de la exponencial* mediante formación de inversas y compuestas.

Ejercicios

1. Probar que $\lim\limits_{x \to 0} 2^{-1/x^2} = 0$ hallando un δ para cada $\varepsilon > 0$ (§ 24-1).

2. Admitida la proporcionalidad entre el interés y el tiempo, deducir la fórmula del *interés continuo*, siendo r el *tanto por uno* anual. Para ello, divídase el año en n períodos y calcúlese el capital acumulado al cabo de t años, pasando después al límite para $n \to \infty$. Resulta así la fórmula final: $C = c\,e^{rt}$, siendo c el capital inicial y t el período de tiempo, expresado por años.

3. Constrúyase la gráfica de la fórmula del interés continuo para $c = 1$, y compárese con la de la función $(1 + r)^t$ que da el capital final con acumulación anual de intereses. Supóngase, por ejemplo, $r = 0{,}04$, es decir, 4 %.

4. Represéntese gráficamente la variación de la función $(1 + 1/x)^x$. Complétese en el intervalo $(-1, 0)$, adoptando la interpretación $|1 + 1/x|^x$ que coincide con ella en el resto del campo real y está definida en dicho intervalo. Estudiar especialmente el comportamiento de ambas funciones en $x = 0$.

5. Probar que la función exponencial a^x, definida en el campo racional, es *uniformemente continua sobre el campo racional* (ej. 8 de § 26), en cada intervalo finito, y que, en consecuencia, es prolongable al campo real por continuidad (ej. 9 de § 26).

6. Probar que para $x > 0$ es $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

7. Señalar el paso erróneo en el siguiente razonamiento: Si log indica logaritmo de base ½, de $2 = (\frac{1}{2})^{\log 2} < 3 = (\frac{1}{2})^{\log 3}$, se deduce $2^{\log 2} > 2^{\log 3}$, es decir: $\log 2 > \log 3$, y por lo tanto, $2 > 3$.

8. Representar en papel logarítmico la función $y = x^x$, y probar que es continua para $x > 0$.

§ 28. Funciones circulares

1. **Funciones circulares.** — En este parágrafo adoptamos para las funciones circulares la definición *geométrica* usual en Trigonometría, pero una vez hallados (§ 45) sus desarrollos en serie, se comprenderá que es posible partir de éstos, como definición *aritmética*, la cual vale para valores complejos de la

variable. Es claro que entonces desaparecen las nociones usuales: circunferencia, cuerdas, grados, etc.; la variable es un número abstracto. Este significado de número puro es el único admisible en Análisis, aun en el campo real.

Se llama *circunferencia unidad* a una circunferencia de ra-

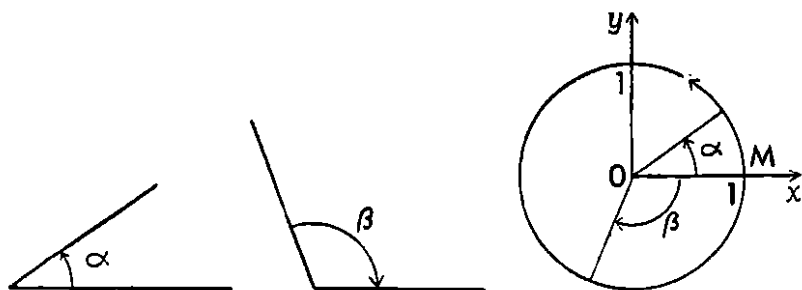


Fig. 71a. — Ángulo positivo. Fig. 71b. — Ángulo negativo. Fig. 71c. — Ambos centrados.

dio $r = 1$ con centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, y sobre la cual se ha elegido un *sentido positivo* de recorrido: el que lleva el eje x a coincidir con el eje y girando un ángulo recto, y en consecuencia consideramos *ángulos orientados*, es decir, ángulos positivos y ángulos negativos.

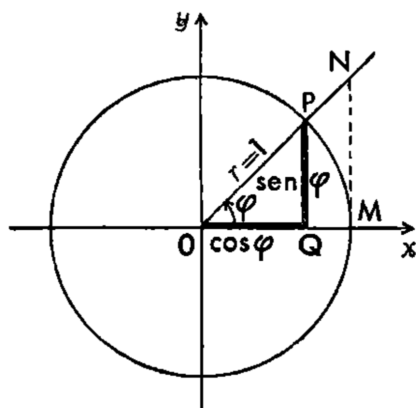


Fig. 72.

En la figura 71 *c* observamos que al "centrar" un ángulo en la circunferencia unidad, lo colocamos "a partir del eje O x"; por esta razón, el punto M se llama *origen de los arcos.*

A cada ángulo orientado φ, una vez centrado, corresponde *un punto* P *de la circunferencia unidad* (fig. 72), cuyas coordenadas se llaman *coseno* y *seno* del ángulo φ:

[28-1] abscisa de P: $x = \text{O Q} = \cos\varphi$;

[28-2] ordenada de P: $y = \text{Q P} = \operatorname{sen}\varphi$.

Tenemos aquí un primer ejemplo de funciones *definidas mediante un proceso geométrico.* Para el ángulo β de la figura 71, ambas funciones toman valores negativos.

La función *tangente* puede definirse por la relación

[28-3] $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi},$$

y por consiguiente, *no está definida para los ángulos φ cuyo coseno es cero.* Esta función resulta igual a la ordenada del punto N de la figura 72.

[28-4] $$\operatorname{tg} \varphi = \text{M N}$$

como es fácil ver por semejanza de triángulos. Obsérvese es esencial haber tomado O M = 1.

Las figuras 73 y 74 muestran cómo se construyen a partir de [28-2] y [28-4] las gráficas de las funciones sen φ y tg φ.

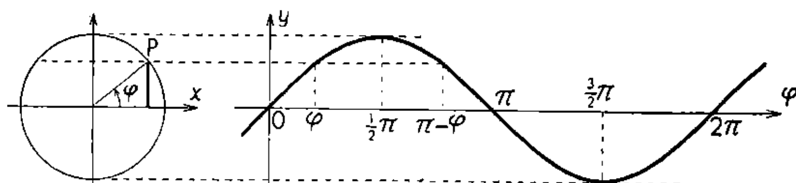


Fig. 73.

De las definiciones anteriores se deduce fácilmente (hágase) que ángulos complementarios (es decir, cuya suma sea un ángulo recto) tienen el seno del uno igual al coseno del otro,

$$\operatorname{sen} \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right);$$

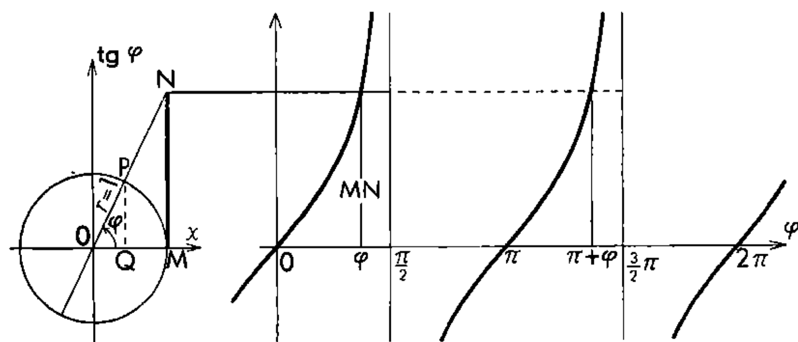


Fig. 74.

y también que el seno es función impar y el coseno función par (§ 23-9):

$$\operatorname{sen} (-\varphi) = -\operatorname{sen} \varphi; \quad \cos (-\varphi) = \cos \varphi.$$

Por lo tanto, será sen $(\pi/2+\varphi)$ = sen $[\pi/2-(-\varphi)] = \cos(-\varphi) =$ $= \cos \varphi$. Esto nos dice que si en la figura 73 corremos el eje de las ordenadas una longitud $\pi/2$ hacia la derecha, obtenemos

mediante la *misma curva* de la figura 73 la gráfica de cos φ. Dicha curva es una *sinusoide* (§ 28-4).

Las funciones *cotangente, secante* y *cosecante* se definen así:

[28-5] $$\cot g\,\varphi = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi};\quad \sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi};\quad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$$

pero también pueden definirse (como vimos para la tangente) geométricamente con la circunferencia unidad. Por eso estas seis funciones se llaman *circulares*, y también *trigonométricas* o *goniométricas*.

EJERCICIO: Hállense los segmentos que, referidos a la circunferencia *unidad*, puedan representar las funciones [28-5], y constrúyanse las gráficas de estas funciones.

Observando las abscisas en las figuras 73 y 74, vemos que los ángulos no se han medido en grados sexagesimales, sino como es frecuente en matemática, en el *sistema radial*, mediante la longitud del correspondiente arco de circunferencia, tomando el radio como unidad (o sea mediante la longitud del arco de circunferencia unidad), siempre con el signo que corresponda. Así un *ángulo de una vuelta entera* mide 2π, y por consiguiente, un ángulo recto mide $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Esto es posible, porque cualquiera sea la unidad adoptada para determinar el radio del arco de circunferencia que mide el ángulo dado, obtenemos *la misma* medida radial, por ser proporcionales las longitudes de los arcos correspondientes a *un mismo* ángulo a las de los radios con que se tracen. Igual ocurre con las funciones circulares, por semejanza de triángulos; de ahí que sea la medida radial de los ángulos la adecuada para ser aplicada a las funciones circulares. Así queda medido φ, por la razón entre el arco y el radio; sen φ, por la razón entre ordenada y radio; etc. Entonces, tanto φ como sus funciones circulares son números reales *abstractos;* por ejemplo: sen $1 = 0{,}84\ldots$

NOTA: Todo lo expuesto se basa en una suposición no probada: *que los ángulos son susceptibles de medida numérica.* Como acabamos de ver, el problema quedaría resuelto (con la medida radial) si supiéramos definir la longitud de un arco de circunferencia. Veremos, en § 55, cómo se define y se determina la longitud de un arco en general, pero por ahora contentémonos con mencionar que *la longitud de la circunferencia puede definirse como frontera de un par de sucesiones contiguas*: las de las longitudes de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos.

Las áreas de estos polígonos dan otro par de sucesiones contiguas, cuya frontera es el área del círculo. Cuando el radio es 1, la razón entre las medidas de longitud y área resulta 2.

Como el problema de definir y calcular la longitud de un arco (§ 55) es esencialmente más complicado que el de definir y calcular un área plana (§ 48-1), convendrá dar para la *medida radial* la siguiente definición equivalente:

Llamaremos medida del ángulo MOP (*fig.* 72) *al doble del área del sector correspondiente de la circunferencia unidad.*

2. El límite de $\frac{\text{sen } x}{x}$ para $x \to 0$. — La función

[28-6] $$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$$

no está definida para $x = 0$. Sin embargo, como ahora veremos, *existe el límite de dicha función para* $x \to 0$, *y vale* 1 **cuando los ángulos se miden en el sistema radial** (§ 28-1).

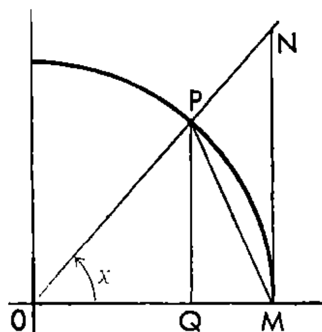


Fig. 75.

Como la función es par, basta considerar el límite lateral por la derecha. Si $0 < x < \pi/2$, el sector circular OMP (fig. 75) contiene en su interior al triángulo OMP, y a su vez está contenido en el triángulo OMN (demuéstrese, con la definición de circunferencia y los teoremas sobre perpendiculares y oblicuas). Por consiguiente (§ 48-1), el área de cada figura es menor que la de la siguiente, y teniendo en cuenta la definición dada para la medida radial (§ 28-1, nota), resulta:

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x$$

y de aquí, sucesivamente: $1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$; $1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$;

$0 < 1 - \frac{\text{sen } x}{x} < 1 - \cos x = 2 \text{ sen}^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$, y entonces:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{\text{sen } x}{x}\right) = 0 \quad \therefore \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Ejercicio: Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{4x}$ y $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

3. Periodicidad. — En la función sen x, cuando x aumenta en 2π (es decir, pasa de x a $x + 2\pi$), el punto P da una vuelta completa a la circunferencia y vuelve a ocupar la misma posición que antes. Por lo tanto:

[28-7] $$\text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x.$$

Como esta relación vale para todo valor de x, diremos que $f(x) = \text{sen } x$ es una *función periódica,* y que 2π es un *período* de sen x. *Basta conocer la gráfica de* sen x *en el intervalo* $(0, 2\pi)$, porque entonces se la puede prolongar hacia uno y otro lado, construyendo sucesivas réplicas de este trozo fundamental (onda de sinusoide).

Las aplicaciones de las funciones periódicas son sumamente importantes y variadas. Muchos fenómenos naturales tienen carácter periódico, tales como las ondas de sonido, las vibraciones de una cuerda de violín, las ondas luminosas o de radio, las oscilaciones de un péndulo, etc.

La curva $y = \text{sen}\, x$, llamada sinusoide, sugiere un movimiento ondulatorio en su forma más simple, y en efecto, las funciones seno y coseno deben considerarse (según veremos en vol. III), como las más simples de todas las funciones periódicas y el instrumento natural para el estudio de todos los fenómenos periódicos.

En general, diremos que una función $y = f(x)$ *es periódica con el período p*, cuando:

[28-8] $$f(x+p) = f(x) \text{ para todo } x.$$

En seguida se ve que *todo múltiplo n p de un período es también un período;* por ejemplo:

$$f(x+2p) = f(x+p+p) = f(x+p) = f(x).$$

TEOR.: *Si f (x) es una función periódica que no se reduce a una constante, sus períodos son los múltiplos enteros del menor período positivo p, y sólo ellos.*

La demostración se basa en el siguiente lema:

a) *Si p y q son períodos de f(x), lo es la diferencia $p - q$.*

En efecto, se tiene sucesivamente, por ser q y p períodos:

$$f(x+p-q) = f(x+p) = f(x).$$

Sea ahora q un período; probaremos que debe ser múltiplo de p. Dividiendo q por p se obtiene, llamando n al cociente entero y r al resto:

$$q = np + r \quad \text{con} \quad 0 \leqslant r < p \quad \therefore \quad r = q - np.$$

Por *a*), r es un período, por ser diferencia de dos períodos q y np. Como por hipótesis p es el *menor* período positivo, resulta:

$$r = 0 \quad \therefore \quad q = np \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

El número p se llama *período primitivo* de $f(x)$. Si en lugar de los múltiplos enteros de p hubiéramos tomado los de otro período, por ejemplo: $3p$, tendríamos sólo *algunos* de los períodos de $f(x)$; de ahí la importancia de encontrar un período que sea primitivo, para tenerlos *todos*.

La función $\text{tg}\, x$ tiene (como todas las funciones circulares) el período 2π, pero también tiene el período π (ver fig. 74), pues:

$$\text{tg}\,(x+\pi) = \frac{\text{sen}\,(x+\pi)}{\cos\,(x+\pi)} = \frac{-\text{sen}\, x}{-\cos x} = \text{tg}\, x.$$

EJERCICIOS: 1. Probar, estudiando las ecuaciones $\text{sen}\, x = 1$ y $\cos x = 1$, que 2π es período *primitivo* de $\text{sen}\, x$ y de $\cos x$ (y por lo tanto, de $\text{cosec}\, x$ y de $\sec x$).

2. Probar que π es período *primitivo* de $\text{tg}\, x$ y de $\text{cotg}\, x$.

4. **Función sinusoidal.** — *a*) Llamaremos así a la función

[28-9] $$y = f(x) = k \,\text{sen}\,(\omega x + \alpha),$$

donde $k > 0$ (*amplitud*), $\omega > 0$ (*pulsación*) y α (*fase inicial*) son tres constantes. Su período primitivo es $p = 2\pi/\omega$.

En efecto.

$$f(x + 2\pi/\omega) = k \text{ sen } [\omega(x + 2\pi/\omega) + \alpha] = k \text{ sen } (\omega x + \alpha) = f(x),$$

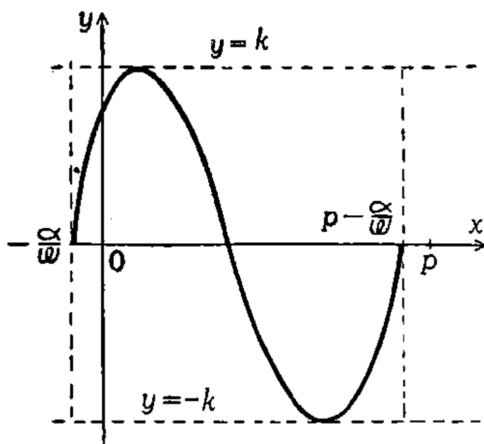


Fig. 76.

y, por otra parte, no hay ningún período positivo menor.

Cuando la pulsación ω es un número entero, indica el número de ondas de la gráfica, llamada *sinusoide*, que hay en cada intervalo de longitud 2π. Si es $\alpha \neq 0$ la sinusoide no pasa en general por el origen. Para tener un punto del eje x donde "arranca una onda", hagamos:

$$\omega x + \alpha = 0$$

$$\therefore \quad x = -\frac{\alpha}{\omega}.$$

Para construir una onda conviene dibujar antes el rectángulo (punteado en la figura 76) de lados:

$$x = -\frac{\alpha}{\omega}; \quad x = p - \frac{\alpha}{\omega} = \frac{2\pi - \alpha}{\omega};$$

$$y = -k; \qquad y = k,$$

dentro del cual está "inscripta" la onda (fig. 76).

Ejemplo: Para llevar la función

$$y = f(x) = -3 \text{ sen } \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

a la forma [28-9] con $k > 0$, la escribiremos en la forma equivalente:

$$y = f(x) = 3 \text{ sen } \left(2x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = 3 \text{ sen } \left(2x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

b) *Representación polar.* — Si sobre una circunferencia de radio k (fig. 77) se mueve un punto con velocidad angular constante ω, en el momento t habrá descripto el radio vector un ángulo ωt y si el ángulo (o *fase*) inicial es nulo, la proyección del punto sobre el eje y es el punto de ordenada $y = k \,.\, \text{sen}\, \omega t$. Al movimiento de esta proyección lo llamaremos *movimiento vibratorio armónico.* Si la fase inicial es α, la ecuación del movimiento es $y = k . \text{sen}\,(\omega t + \alpha)$.

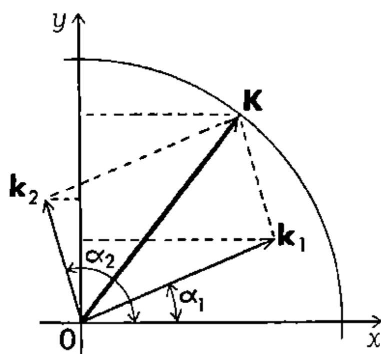


Fig. 77.

Dadas varias funciones sinusoidales de igual período, con amplitudes y fases distintas:

$k_1 . \text{sen}(\omega t + \alpha_1) + k_2 . \text{sen}(\omega t + \alpha_2) + \ldots + k_n . \text{sen}(\omega t + \alpha_n)$, si las representamos en el momento $t = 0$ por los respectivos vectores de módulos $k_1, k_2, \ldots, k_n$, y construímos el vector resultante K, la ordenada de su extremo A es la suma de las ordenadas de los extremos de los n vectores; por lo tanto, dicha ordenada y es la suma de las n funciones en el momento t. Al variar t, tenemos un movimiento vibratorio del punto Y sobre el eje y, que representa el movimiento vibratorio resultante, suma de los n movimientos dados.

En consecuencia: *la suma de dos funciones sinusoidales* **de igual período** *es una función sinusoidal del mismo período.*

Si las funciones sinusoidales tienen períodos p_1 y p_2 distin-

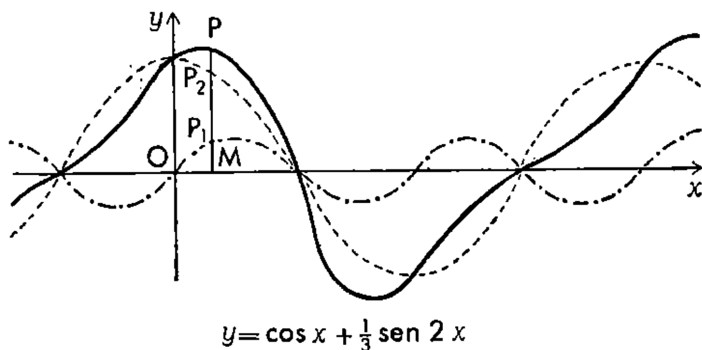


Fig. 78.

tos, su suma no es ya una función sinusoidal. No obstante, si los períodos son conmensurables, es decir, si su cociente $p_1/p_2 = m/n$ es racional, todo múltiplo común $n\,p_1 = m\,p_2$ es también un período de la suma, que resulta así una función periódica, aunque no sinusoidal (fig. 78: $MP = MP_1 + MP_2$).

NOTAS: 1. Si los períodos son inconmensurables, la suma no es una función periódica, pero las funciones así obtenidas tienen un carácter aproximadamente periódico y propiedades que las asemejan a las funciones periódicas; son casos especiales de las llamadas *funciones casiperiódicas*, de gran importancia en la matemática moderna.

2. Sumando funciones sinusoidales, aparece y puede estudiarse el importante fenómeno conocido en acústica y radio con el nombre de "batimiento". La suma $y = \text{sen}\,\omega_1 x + \text{sen}\,\omega_2 x\ (\omega_1 > \omega_2 > 0)$, de dos sinusoides que para mayor sencillez suponemos de igual amplitud 1 y fase inicial 0 puede escribirse así:

[28-10] $$y = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\,x \,.\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\,x.$$

Cuando $\omega_1 - \omega_2$ es muy pequeño con respecto a $\omega_1 + \omega_2$, es muy ilustrativo y útil interpretar [28-10] como una "oscilación":

$$y = \mathbf{k}(x) \,.\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\,x,$$

de "período" $4\pi/(\omega_1 + \omega_2)$ y "amplitud"

$$\mathbf{k}(x) = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\,x,$$

no ya constante, sino variable periódica, con un período mayor $4\pi/(\omega_1-\omega_2)$. Resultan así cambios rítmicos de amplitud, en forma de *onda diferencial* que dan lugar al "batimiento" o "batido" (fig. 79).

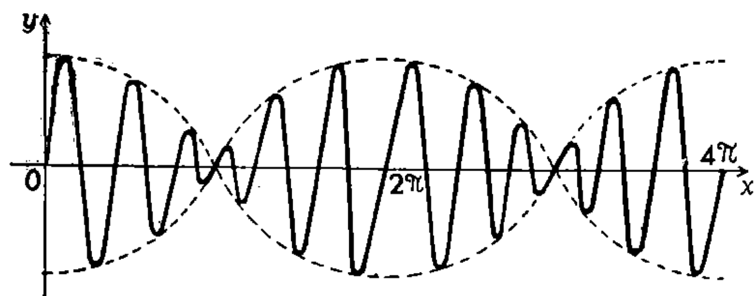


Fig. 79.

5. **Funciones circulares inversas.** — La función y inversa del seno, puesta en la forma:

[28-11] $$x = \text{sen } y,$$

se llama *función arco seno* (indicado con arc sen), de modo que [28-11] equivale a:

[28-12] $$y = \text{arc sen } x.$$

Esta función está definida para $-1 \leqq x \leqq 1$ (dedúzcase

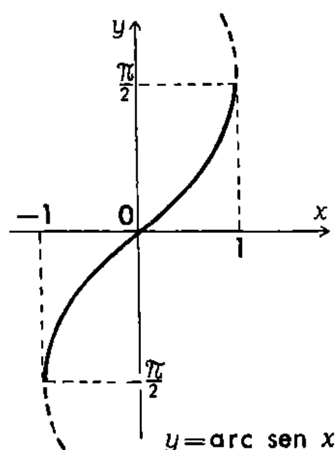


Fig. 80.

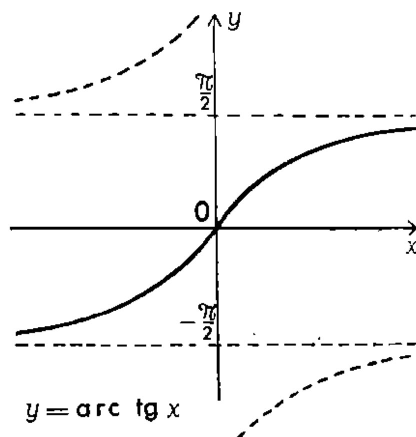


Fig. 81.

de las propiedades de intersección de circunferencia y recta) y es *multiforme*, admitiendo *infinitos valores* para cada valor de x donde esté definida. Para evitar este último inconveniente, nos limitaremos a los ángulos y, tales que:

[28-13] $$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2},$$

con lo que se obtiene el arco seno como función uniforme (trazo lleno en la gráfica, fig. 80). A esta *determinación* única del arco seno en el intervalo [28-13] se le llama *valor principal.*

Análogamente, a la función inversa de la tangente. escrita en la forma $x = \operatorname{tg} y$, la llamaremos *función arco tangente* (indicando con arc tg), y tendremos:

[28-14] $$y = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Como antes, para tener entre sus infinitas *determinaciones* una función uniforme (que llamaremos *valor principal* del arco tangente), impondremos la restricción [28-13], pero como la función $\operatorname{tg} y$ toma todos los valores reales, la función [28-14] está definida para todo valor de x (fig. 81).

En la función:

[28-15] $$y = \operatorname{arc\,cos} x,$$

inversa de $x = \cos y$, para tener un solo valor (*valor principal*) impondremos la restricción (fig. 82) $0 \leqq y \leqq \pi$.

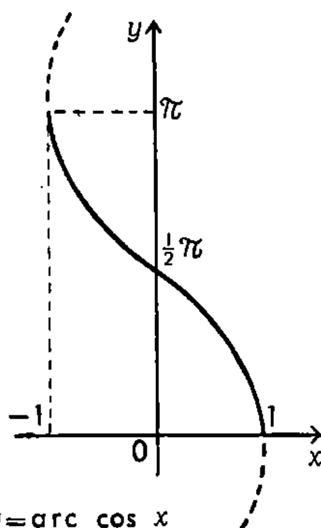


Fig. 82.

Ejemplo: Hallar la función inversa de:

$$y = f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x.$$

Se tiene, sucesivamente: $\frac{y}{2} = \operatorname{sen} 3x \quad \therefore \quad 3x = \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{2}$

$$\therefore \quad x = g(y) = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{2}.$$

6. **Continuidad de las funciones circulares.** — La función $y = \operatorname{sen} x$ es en cada cuadrante monótona y con función inversa definida en un intervalo; luego (§ 27-2), es continua en cada intervalo (cuadrante), incluso en sus extremos. Como lo mismo vale para $\cos x$, se tiene:

Teor. 1: *Las funciones* $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ *son continuas en todo el campo real. Sus inversas* (*valor principal*) *son continuas en el intervalo* $[-1, +1]$ *en que están definidas.*

Como $y = \operatorname{tg} x$ es creciente entre cada dos múltiplos impares sucesivos de $\pi/2$, excluyendo estos puntos de separación donde no está definida, y su inversa está definida para todo y, por § 27-2, tendremos:

Teor. 2: *La función* $\operatorname{tg} x$ *es continua para todo* x *real, sal-*

vo en los puntos $\pm (2n+1)\pi/2$, donde no está definida. La función inversa (valor principal) es continua en todo el campo real.

EJERCICIOS: 1. De $\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}h \cos(x + \frac{1}{2}h)$ deducir la continuidad de sen x.

2. Análogamente, deducir la continuidad de cos x, y con el resultado anterior, estudiar la continuidad de todas las funciones circulares directas

EJERCICIOS

1. Sabiendo que una milla marina representa un minuto de la circunferencia terrestre, supuesta de 40 000 Km, calcular su equivalencia en metros.

2. Construir las gráficas de las funciones:

$$\cos x, \qquad \sec x, \qquad \operatorname{cosec} x, \qquad \operatorname{cotg} x.$$

¿Para qué valores de x no está definida cada una de las tres últimas?

3. Así como sen x es la mitad de la cuerda del arco doble, se llama *seno verso* de x a la función $1 - \cos x$, o sea a la flecha. Construir la gráfica de $\operatorname{sen}^2 x$ utilizando el seno verso.

4. Estudiar la función $y = \ln \operatorname{sen} x$ en $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, y construir su gráfica mediante el ejercicio 9 del § 23.

5. Representar en papel milimétrico, en el intervalo $[-1, 1]$, la función $(\operatorname{sen} x)/x$ (unidad en y: 1 m, escala desde 0,84 hasta 1,00).

6. Límites para $x \to 0$ de:

$$\frac{3 \operatorname{sen} 4x}{2x}\ ; \quad \frac{x}{\operatorname{tg} x}\ ; \quad \frac{4 \operatorname{sen}(x/3) - 2 \operatorname{sen} x}{3x}.$$

7. La función $f(x) = (\operatorname{sen} \ln x)/\ln x$ está definida sólo para $x > 0$ $x \neq 1$. Definirla en 0 y en 1, de modo que resulte continua en $[0, +\infty)$.

8. Probar que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} |x|^r}{|x|^s} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos |x|^r}{|x|^{2s}} = \begin{cases} = 0 & \text{si } r > s \\ = 1 & \text{si } r = s \\ = +\infty & \text{si } r < s. \end{cases}$$

9. Determinar los períodos y construir las sinusoides:

$$y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right);$$

$$y = -\frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

10. Demostrar que:

$$\operatorname{sen} \operatorname{arc} \cos x = \sqrt{1 - x^2}; \qquad \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = 1/\sqrt{1 + x^2}$$

11. Simplificar las expresiones siguientes:

a) $\operatorname{sen} 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$; *b*) $\operatorname{tg} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$;

c) $\operatorname{tg} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \dfrac{1+x}{1-x}$; *d*) $\operatorname{sen} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

12. Gráfica de la función $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x)$.

13. Determinar el campo de existencia, y construir la gráfica del valor principal de $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \dfrac{x}{1+x}$.

§ 29. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

1. Funciones hiperbólicas. — Llamaremos *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* a las funciones:

[29-1] $$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

[29-2] $$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Estas funciones representan, como veremos en el apartado siguiente, la abscisa y la ordenada de un punto de una hipérbola equilátera, y podrían definirse geométricamente a partir de esta curva, en forma muy semejante a las funciones circulares. De ahí sus nombres. Por otra parte, cuando extendamos la exponencial al campo complejo (§ 45), veremos que las funciones circulares y las hiperbólicas son esencialmente las mismas, lo que explica el comportamiento parecido de ambas en el campo real.

De las definiciones [29-1] y [29-2] resulta:

[29-3] $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x,$

[29-4] $\operatorname{ch} 0 = 1 \qquad \operatorname{sh} 0 = 0.$

relaciones análogas a las de sen x y cos x.

Para construir las gráficas (fig. 83), si se han trazado las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$, simétricas entre sí, basta tomar respectivamente la semisuma y la semidiferencia de ordenadas.

La gráfica de $y = \operatorname{ch} x$ es una curva llamada *catenaria*, pues es la forma que toma un cable suspendido por sus extremos bajo la acción de la gravedad.

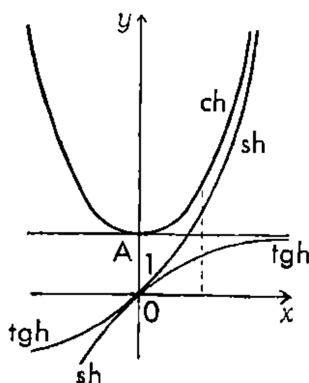


Fig. 83.

Sumando y restando [29-1] y [29-2] resulta:

[29-5] $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \qquad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$

La primera de estas relaciones expresa la exponencial en términos de las funciones hiperbólicas, y la segunda explica el comportamiento mutuo de las gráficas (fig. 83) para $x \to +\infty$. Multiplicándolas resulta la relación fundamental:

[29-6] $$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

De aquí se obtiene la expresión de cada función en términos de la otra:

[29-7] $\operatorname{ch} x = +\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}, \qquad \operatorname{sh} x = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1};$

la primera con signo +, pues dado sh x, por la monotonía queda unívocamente determinado x, y su ch x, que es > 0.

Discútase el doble signo de la segunda.

Se tiene:

$$\text{ch}\,(x+y) = \tfrac{1}{2}\,(e^x e^y + e^{-x} e^{-y}) = \tfrac{1}{4}\,[(\text{ch}\,x + \text{sh}\,x)(\text{ch}\,y + \text{sh}\,y) + (\text{ch}\,x - \text{sh}\,x)(\text{ch}\,y - \text{sh}\,y)]$$

[29-8] $\therefore\ \text{ch}(x+y) = \text{ch}\,x\ \text{ch}\,y + \text{sh}\,x\ \text{sh}\,y,$

y análogamente se hallan las relaciones:

[29-9] $\text{ch}(x-y) = \text{ch}\,x\ \text{ch}\,y - \text{sh}\,x\ \text{sh}\,y,$

[29-10] $\text{sh}(x+y) = \text{sh}\,x\ \text{ch}\,y + \text{ch}\,x\ \text{sh}\,y,$

[29-11] $\text{sh}(x-y) = \text{sh}\,x\ \text{ch}\,y - \text{ch}\,x\ \text{sh}\,y,$

muy análogas a las de la trigonometría, pero más simétricas que ellas, pues hay correspondencia entre los signos.

La función *tangente hiperbólica* se define así:

[29-12] $$\text{tgh}\ x = \frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x},$$

y queda definida para todo x (fig. 83), pues ch x no se anula nunca.

2. **Representación paramétrica.** — Considerando una curva C como engendrada por un punto móvil M (x, y), las coordenadas serán funciones del tiempo t:

[29-13] $$x = \text{f}(t)\,; \quad y = \text{g}(t),$$

y estas ecuaciones, que representan analíticamente la curva mediante una variable auxiliar o *parámetro* t, se llaman *ecuaciones paramétricas* de la curva.

El vago carácter intuitivo de esta noción se elimina mediante la siguiente definición analítica:

DEF.: *Curva plana* es el conjunto de puntos (x, y) dados por dos funciones continuas [29-13] al variar t en un intervalo. Cuando éste es finito $(t_0 \leqq t \leqq t_1)$, suele hablarse de un *arco* de curva plana, pero si $\text{f}(t_1) = \text{f}(t_0)$, y $\text{g}(t_1) = \text{g}(t_0)$, diremos que se tiene una curva plana *cerrada.*

Puede suceder que a dos valores distintos, t y t', que no sean los extremos, corresponda un mismo punto; es decir, la curva pasa varias veces por el mismo punto; éste se llama *múltiple.*

La curva se llama *simple* (o de JORDAN) cuando carece de puntos múltiples, es decir, cuando a dos valores distintos de t (que no sean los dos extremos t_0, t_1) corresponden puntos distintos.

En la definición de curva plana, el parámetro t no es ya el tiempo, sino un número real variable. El concepto de curva plana es más general que el de curva uniforme (§ 25-1, b), pues una curva plana puede ser cortada por cada paralela al eje y en más de un punto. Aun más: una curva plana puede llenar totalmente un área (nota I), contrariamente a lo que entendemos intuitivamente por "curva", pero se demuestra que esto no puede ocurrir si la curva es simple o de JORDAN.

EJEMPLO: Las ecuaciones

[29-14] $x = \cos t; \qquad y = \text{sen } t,$

donde:

[29-15] $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

representan la circunferencia unidad, que es una curva plana cerrada. (¿Por qué?). A cada valor de t corresponde un punto, y recíprocamente (salvo, para $x = 0$, $y = 1$) en virtud de [29-15]. Para obtener la ecuación cartesiana ordinaria debemos *eliminar el parámetro*, lo que se logra en [29-14], elevando al cuadrado y sumando: $x^2 + y^2 = 1$.

Las ecuaciones paramétricas

[29-16] $x = \text{ch } t, \quad y = \text{sh } t,$

representan una hipérbola equilátera. En efecto, elevando al cuadrado y restando se obtiene, en virtud de [29-6]:

[29-17] $x^2 - y^2 = 1.$

Análogamente, las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \text{ sen } t \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = a \text{ ch } t \\ y = b \text{ sh } t \end{cases}$$

representan, respectivamente, una elipse y una hipérbola, cuyas ecuaciones cartesianas se obtienen fácilmente, y son:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como ch $t > 0$, las ecuaciones [29-16] sólo pueden representar una rama de la hipérbola [29-17] (fig. 84). Veremos

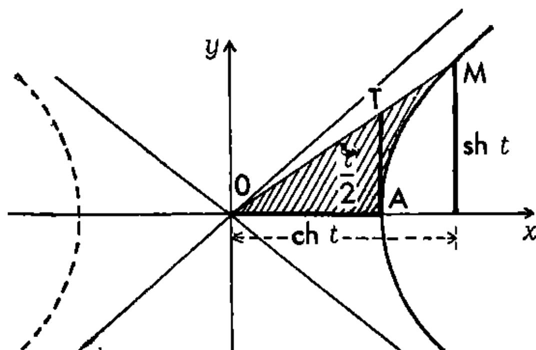


Fig. 84.

(§ 51-3, Ej. 14) que representan íntegramente esa rama, y que el parámetro t es el doble del área del sector A O M (con el signo de y). Si comparamos con la definición de la medida radial de un ángulo (§ 28-1, nota), vemos su gran analogía con la definición de las funciones circulares.

NOTA: En la figura 84 está también representada la función tgh t por el segmento AT, y así se ve que para $t \to +\infty$ ó $-\infty$ lim tgh $t = 1$ ó -1, respectivamente, pues el radio vector OM tiende a confundirse con una u otra asíntota de la hipérbola (§ 37-6).

Ejercicios

1. Demostrar la fórmula análoga a la de Moivre:

$$(\text{ch } x + \text{sh } x)^n = \text{ch } n x + \text{sh } n x.$$

2. De [29-9] y [29-4] obtener la relación fundamental [29-6]. De ésta, [29-8] y [29-10] obtener:

$$\text{ch } 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x = 2 \text{ ch}^2 x - 1 = 2 \text{ sh}^2 x + 1,$$
$$\text{sh } 2x = 2 \text{ sh } x \text{ ch } x,$$
$$\text{ch}^2 x = \tfrac{1}{2}(\text{ch } 2x + 1), \qquad \text{sh}^2 x = \tfrac{1}{2}(\text{ch } 2x - 1).$$

3. Expresar $\text{ch } \tfrac{1}{2} x$ y $\text{sh } \tfrac{1}{2} x$ en función de $\text{ch } x$. (Atención a los signos).

4. De [29-8] a [29-11] deducir las fórmulas de transformación de $\text{sh } p \pm \text{sh } q$ y $\text{ch } p \pm \text{ch } q$ en productos.

5. Demostrar que para las funciones inversas de $x = \text{sh } y$; $x = \text{ch } y$; $x = \text{tgh } y$, llamadas *argumento seno* (*coseno*; *tangente*) *hiperbólico* e indicadas arg sh; arg ch; arg tgh, se tiene: $\text{arg sh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\text{arg ch } x = \ln (x \pm \sqrt{x^2 - 1})$, $\text{arg tgh } x = \ln \sqrt{(1 + x)/(1 - x)}$. y representar gráficamente. ¿Cuál es el campo de existencia en cada caso?

Notas al capítulo VII

I. **Curvas de Peano.** — Se llaman así las que llenan un área. El primer ejemplo fué dado por Peano (1890), y otro análogo, de E. H. Moore y A. Schoenflies (1900), es el siguiente: puesto que una curva puede considerarse como límite de las poligonales inscriptas, bastará dar la ley de formación de estas poligonales inscriptas en el arco que vamos a construir, cuyos extremos sean los vértices opuestos de un cuadrado, y su diagonal, por lo tanto, la cuerda del arco; la primera poligonal inscripta será el eneágono equilátero de ángulos rectos dibujado en la figura 85, cuyos vértices numerados corresponden a los puntos de división de la escala puesta debajo; la segunda poligonal (fig. 86) consta de 81 lados, y se obtiene intercalando entre cada dos vértices de la primera ocho nuevos vértices, resultando asimismo equilátera y de ángulos rectos; estos nuevos vértices los hacemos corresponder con los nuevos puntos de división de la escala que se obtiene dividiendo los segmentos de la anterior en nueve partes iguales; prosiguiendo así, los puntos del cuadrado cuyas coordenadas tienen expresión finita en el sistema de numeración ternaria (Cap. I, nota II), tienen un homólogo en el segmento; cada punto no expresable en forma finita está contenido en una sucesión de cuadrados, cada uno contenido en el anterior, tales que sus lados tienden a cero, y cuyos segmentos homólogos, cada uno contenido en el anterior, tienen un sólo punto común, que asignaremos como homólogo de aquel punto del cuadrado.

Fácilmente se ve que la correspondencia establecida, (unívoca, pero no biunívoca), es continua, y se logra expresar las coordenadas del punto del cuadrado como funciones uniformes y continuas del punto del segmento.

II. **Tablas de funciones.** — *a*) Las primeras tablas de funciones, hechas en forma moderna y con fines prácticos, datan del siglo XVI y se refieren a las funciones circulares. Modernamente, las máquinas calculadoras han revolucionado el problema de la tabulación: en los últimos 30 años, casi todas las tablas extensas se han construído con ayuda mecánica o eléctrica, lo que ha permitido realizar cálculos prácticamente imposibles de otro modo. Con estos recursos se ha conseguido:

1º) Modificar los métodos de cálculo, aumentando la importancia de

las tablas de valores naturales de las funciones, en oposición con la de sus logaritmos;

2º) Obtener tablas prácticamente libres de errores.

b) Entre las colecciones de tablas construídas con procedimientos mecánicos están las inglesas de la British Association for the Advancement of Science (Cambridge Univ. Press, citadas BAAS) y las del grupo americano del Mathematical Tables Project, Nueva York (citadas MTP), publicadas por el National Bureau of Standards, Wáshington, D. C., y por la Columbia University Press, N. York.

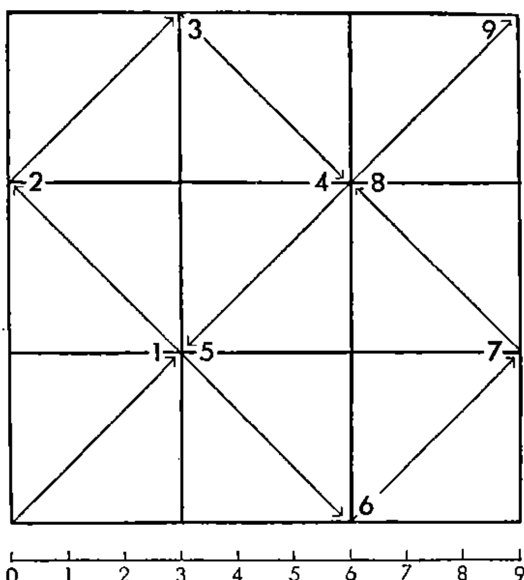


Fig. 85.

En el tránsito hacia las modernas calculadoras electrónicas, con progreso gradual de la conexión mecánica hacia la eléctrica, deben citarse los trabajos de la Universidad de Harvard, Aberdeen Proving Ground, Universidad de Pennsylvania, Massachusetts Institute of Technology, etc. La primera publica la serie *The Annals of the Computation Laboratory* (Harvard Univ. Press, citado ACL), de libros sobre calculadoras veloces y tablas construídas con el aparato "Automatic Sequence Controlled Calculator". Los números I y XXIV de la serie se ocupan, respectivamente de esta máquina y de otra (conocida como Mark II), que en 1948 se trasladó al Naval Proving Ground, Dahlgren, Virginia:

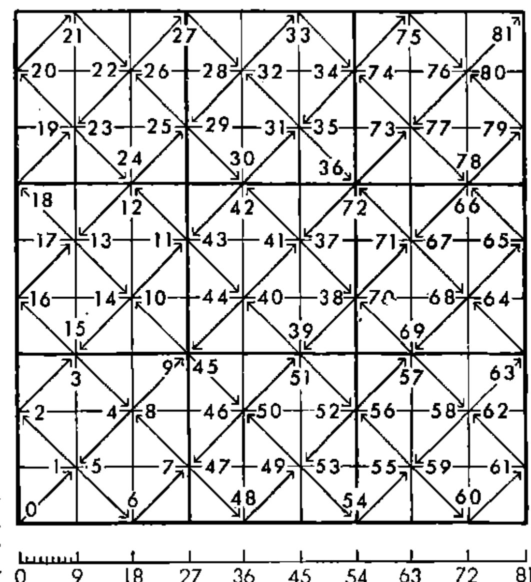


Fig. 86.

ACL, nº I. *A manual of operation for the Automatic Sequence Controlled Calculator.*

ACL, nº XXIV. *Description of a relay calculator.* 1949.

A la calculadora llamada Mark III (también trasladada, en 1950, al Dahlgren Proving Grounds), se refiere:

Description of a magnetic drum calculator. (*The Staff of the Computation Laboratory*; Harvard Univ. Press; Cambridge, Mass., 1952).

De la misma colección ACL deben citarse los siguientes volúmenes, de los cuales los dos primeros dan una visión completa del estado de conocimiento acerca de las máquinas calculadoras automáticas digitales en 1947 y 1949:

Proceedings of a Symposium on large-scale digital calculating machinery, 1948.

Proceedings of a second Symposium on large-scale digital computing machinery, 1951.

Synthesis of electronic computing and control circuits, 1951.

Trata de las máquinas digitales, y también de los recursos de tipo continuo o análogo, es decir, no digital, la obra de conjunto:

F. J. MURRAY: *The theory of mathematical machines.* (2ª ed., King's Crown Press, Nueva York, 1948).

Una obra sobre máquinas modernas, que destaca su fundamento lógico más que los detalles de su construcción y contiene excelente bibliografía, es:

D. R. HARTREE: *Calculating instruments and machines.* (Univ. of Illinois Press, Urbana, 1949).

Una exposición, "intended for everyone", con extensa bibliografía, es:

E. C. BERKELEY: *Giant brains or machines that think.* (Wiley, Nueva York, 1949).

Del mismo tipo es:

L. COUFFIGNAL: *Les machines à penser.* (Les Éditions de Minuit, París, 1952).

Entre otros varios tópicos, contiene breve historia, discusión y comparación de las máquinas calculadoras británicas, con muy breve referencia a las americanas, y aplicaciones, la colección de artículos editada por:

B. V. BOWDEN: *Faster than thought. A symposium on digital computing machines.* (Pitman, Londres, 1953).

Con especial referencia a la EDSAC (Electronic Delay Storage Automatic Calculator), una de las primeras calculadoras veloces, está la obra:

M. V. WILKES, D. J. WHEELER y S. GILL: *The preparation of programs for an electronic digital computer.* (Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1952).

Una discusión de los dispositivos mecánicos y circuitos eléctricos que pueden incorporarse en las máquinas calculadoras, con una breve sección sobre análisis numérico y discusión detallada de dos problemas, da:

High-speed computing devices. (*The Staff of Engineering Research Associates*; McGraw-Hill, Nueva York, 1950).

Sobre máquinas digitales está:

M. MANDL: *Fundamentals of digital computers* (Prentice-Hall, Englewood, 1958).

c) Una amplia orientación en la gran cantidad de tablas de distintas características, publicadas en volúmenes separados o en revistas, puede obtenerse en el valioso libro:

A. FLETCHER, J. C. P. MILLER y L. ROSENHEAD: *An index of mathematical tables.* (Scient. Computing Service, Londres; McGraw-Hill, Nueva York, 1946).

Desde enero de 1943, el National Research Council, Wáshington, D. C., publica la revista trimestral:

Mathematical tables and other aids to computations.

d) Daremos una bibliografía sobre tablas de funciones algebraicas y

trascendentes elementales, salvo las de logaritmos decimales, que se incluyen en el cálculo logarítmico (Cap. IX, nota I, *e*).

Tablas varias, muy breves, contienen los manuales de ingeniería, como los de traducción española:

"HÜTTE": *Manual del ingeniero.* (4 vols., G. Gili, Barcelona y Bs. As., 1948; trad. de la 26ª edic. alemana, Akad. Verein Hütte, Berlín, 1931);

M. FOERSTER: *Manual del ingeniero y del arquitecto.* (2 vols., Espasa-Calpe, Madrid, 1926; versión de la 4ª edic. alemana).

Colecciones más amplias de tablas de este tipo son:

F. EMDE: *Tafeln elementarer Funktionen - Tables of elementary functions.* (Teubner, Leipzig y Berlín, 1940, 2ª ed., 1948; reimpr. Edwards Bros. Ann Arbor, 1945).

H. B. DWIGHT: *Mathematical tables of elementary and some higher mathematical functions.* (Tercera impresión, con agregados, McGraw-Hill, Nueva York, 1944).

Una famosa colección de tablas de trascendentes superiores, con fórmulas e interesantes gráficas planas y proyecciones de relieve, y un extenso apéndice sobre funciones elementales, da la obra de edición bilingüe:

E. JAHNKE y F. EMDE: *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven - Tables of functions with formulae and curves.* (Teubner, Leipzig y Berlín, 1909, 1933, 1938; edic. ampliada, Dover, Nueva York, 1945). Una sexta edición, también bilingüe, de esta obra fue publicada con la colaboración de F. LÖSCH bajo el título: *Tables of higher functions.* (Mc Graw-Hill, Nueva York, 1960).

Semejantes a éstas, mejor impresas, pero abarcando menos funciones y sin figuras, son:

W. FLÜGGE: *Four-place tables of transcendental functions.* (McGraw-Hill, Nueva York, 1954).

Un compendio de más de 50 tablas de funciones elementales y algunas superiores, dadas en su mayor parte con 6 decimales y con tablas auxiliares cerca de las singularidades de las funciones, es la excelente obra de:

L. J. COMRIE: CHAMBERS's *six-figure mathematical tables*: vol. I, *Logarithmic Values;* vol. II, *Natural Values.* (Van Nostrand, Nueva York, 1949).

e) Muy útiles en cálculo numérico, además de las citadas (Cap. I, nota II), de CRELLE, son las tablas de BARLOW, que datan de 1814. Modernizadas y ampliadas con los recursos mecánicos por L. J. COMRIE, se publican con el título, que indica su contenido, de:

BARLOW'*s tables of squares, cubes, square roots, cube roots, and reciprocals of all integer numbers up to 12.500.* (4ª ed., Spon, Londres, 1941).

Tablas mucho más amplias y precisas de estas funciones son las de BAAS y de MTP (ver *b*).

f) Tablas de la función exponencial contienen las citadas en *d*) y la de MTP sobre e^x (3ª ed.; U. S. Government Printing Office, Wáshington, D. C.; 1951). También del MTP hay tablas de logaritmos naturales, con 16 decimales (4 vols., 1941).

g) Las tablas logarítmicas de funciones circulares se citan en el Cap. IX, nota I, e_2. Tablas breves de valores naturales de funciones circulares e hiperbólicas figuran en muchas colecciones generales (*d*).

Muy adecuadas son las tablas de:

L. M. MILNE-THOMSON y L. J. COMRIE: *Standard four figure mathematical tables.* (Macmillan, Londres, 1931);

K. HAYASHI: *Fünfstellige Funktionentafeln.* (Springer, Berlín, 1930); así como otras mayores de estas funciones y de trascendentes superiores, del mismo autor.

Entre las tablas mayores están las del MTP (ver *b*):

Tables of sines and cosines for radian arguments (1940),

Tables of circular and hyperbolic sines and cosines for radian arguments (1939; 3ª ed., 1953),

Tables of circular and hyperbolic tangents and cotangents for radian arguments (1943),

Table of arc tan x (1942),

Table of arc sin x (1945);

las alemanas de J. PETERS, de 6 y de 8 decimales, en argumento sexagesimal, de H. BRANDENBURG, de 6 y de 7 decimales y las de 7 decimales para funciones circulares e hiperbólicas directas e inversas, lg x, e^x, e^{-x}, etcétera:

F. LÖSCH: *Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen.* (Springer, Berlín, 1954).

En la serie ACL (ver *b*) figuran:

XX. *Tables of inverse hyperbolic functions* (1949),

XXII. *Tables of the function* $\frac{\operatorname{sen}\phi}{\phi}$ (1949).

Para muchos cálculos, por ejemplo de $\ln(x + iy)$ con x é y racionales, es útil

J. TODD: *Table of arctang of rational numbers.* (Nat. Bureau of Standards, Applied Math. Series, nº 11, Washington, D. C., 1951).

También recientes son las pequeñas tablas, la primera de pequeña diferencia tabular, y las otras dos de gran precisión:

Five-figure Tables of natural trigonometrical functions. (His Majesty's Stationery Office, Londres; British Information Services, Nueva York, 1947);

Table of sines and cosines to fifteen decimal places at hundredths of a degree. (Nat. Bureau of Standards, Appl. Math. Series, nº 5 1949).

Tables of secants and cosecants to nine significants figures at hundredths of a degree. (Ídem, nº 40, 1954).

De esta última procedencia hay también reediciones conjuntas (1954) de tablas citadas anteriormente.

CAPÍTULO VIII

FUNCIONES DERIVABLES

§ 30. CONCEPTO DE DERIVADA

1. **Incrementos y razón incremental.** — Si en la función de una variable $y = f(x)$ damos a la variable independiente x un incremento arbitrario, positivo o negativo, Δx (Δx se lee *incremento de* x, y no debe confundirse con un producto), es decir, si pasamos del valor x al valor $x + \Delta x$, la función pasa del valor $f(x)$ al valor $f(x + \Delta x)$, y recibe, por consiguiente, un incremento (positivo, nulo o negativo) que llamaremos Δy:

[30-1] $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

La magnitud de este incremento de la función nos da una primera idea de la rapidez con que ésta crece (o decrece), pero si nos preguntamos cuántas unidades crece y, *por cada unidad de crecimiento de* x, tendremos una información mejor si dividimos por Δx y formamos la *razón incremental*:

[30-2] $$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

que representa la rapidez media de crecimiento en el intervalo $(x, x + \Delta x)$. Por consiguiente, depende no solamente de x, sino también de Δx. Su interpretación geométrica es muy sencilla: nos da *el coeficiente angular de la secante* P P′ (fig. 87), pues en el triángulo P H P′ se tiene:

[30-3] $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \omega.$$

Conviene hacer una figura para el caso $\Delta y < 0$. El incremento x de la variable independiente también puede tomarse negativo.

En la función $y = f(x) = x^2$ se tiene:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2\,x\,\Delta\,x + (\Delta\,x)^2$$

[30-4] $$\therefore \quad \frac{\Delta\,y}{\Delta\,x} = 2\,x + \Delta x,$$

es decir, para pequeños valores de Δx, la razón incremental es aproximadamente igual a $2\,x$, tanto mayor cuanto mayor sea x, lo que es fácil de ver en la gráfica (fig. 39, en § 23-2).

En lo que sigue indicaremos también con h y k los incrementos de la variable independiente y de la función, respectivamente:

$$\Delta x = h, \quad \Delta y = k.$$

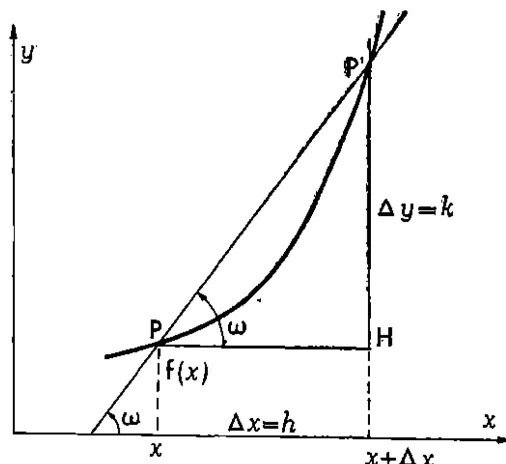


Fig. 87.

EJERCICIO: Expresar el incremento y la razón incremental en la función $S = f(r) = \pi r^2$, que da la superficie de un círculo en función del radio, e interpretar geométricamente el primero.

2. **Noción de derivada.** — Como en los distintos puntos del arco P P′ (fig. 87) la rapidez de crecimiento de $f(x)$ varía, tendremos una idea tanto más precisa de dicha rapidez en el punto P cuanto menor sea h. Esto nos conduce a considerar *no la razón incremental* [30-2], *sino su límite para* $\Delta x = h \to 0$. Dicho límite se llama *derivada de la función* $y = f(x)$, y se indica con y':

[30-5] $$y' = \lim \frac{k}{h} = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ para } h \to 0.$$

Naturalmente, este límite puede no existir, de modo que no toda función tiene derivada en un punto, aun cuando sea continua en él. Cuando el límite exista y sea finito, diremos que $f(x)$ es *derivable* en el valor de x considerado.

EJEMPLO: Para la función $y = x^2$ tendremos, por [30-4]:

[30-6] $$y' = \lim (2x + h) = 2x.$$

EJERCICIO: En el ejercicio del apartado anterior, hallar la derivada e interpretar geométricamente.

De la definición [30-5] de la derivada resulta (§ 24-3):

$$\Delta y/\Delta x = y' + \eta,$$

siendo η un infinitésimo para $\Delta x \to 0$, y de aquí se obtiene la siguiente *expresión del incremento*:

[30-7] $$\Delta y = y' \Delta x + \eta \Delta x.$$

Cuando $y' \neq 0$, el primer término es de orden inferior (§ 24-3, *c*) al segundo, y por consiguiente (§ 24-3, *c*) es un infinitésimo equivalente al incremento, que llamaremos *parte principal* del incremento (§ 34-1).

3. **Cálculo directo de algunas derivadas.** — *a*) Para la función constante $y = f(x) = c$ tendremos $k = f(x+h) - f(x) = c - c = 0 \therefore k/h = 0 \therefore y' = \lim 0 = 0$, o sea:

La derivada de una constante es cero.

b) Para la potencia *de exponente natural* $y = f(x) = x^n$ tendremos, poniendo por brevedad $x + h = x_1$:

$$\frac{k}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x_1{}^n - x^n}{x_1 - x} = x_1{}^{n-1} + x_1{}^{n-2} x + $$
$$+ x_1{}^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1},$$

efectuando la división. Si ahora $h \to 0$, $x_1 \to x$, y cada uno de los $n - 1$ primeros términos del último miembro tiende a x^{n-1}, con lo cual se tiene:

[30-8] $$y' = \lim k/h = n\, x^{n-1}.$$

Para $n = 1$ resulta $y = x$, $y' = 1 . x^0 = 1$, es decir:

La derivada de la función identidad es 1.

c) Derivada de la función $y = a x^2 + b x + c$. Dando a x un incremento h se tiene:

$$k = a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) = (2\,ax + b)\, h + ah^2$$
$$\therefore k/h = 2\,ax + b + ah;$$

y finalmente,

[30-9] $$y' = \lim k/h = 2\,ax + b.$$

d) Si en el caso anterior hacemos $a = 0$, tendremos para la *función lineal* $y = b\,x + c$ la derivada $y' = b$.

4. **Interpretación geométrica de la derivada.** — Antes de ver cuál es el significado geométrico de la derivada, debemos definir la tangente a una curva C en un punto P de ella (fig. 88). Para ello observemos que cualquier otro punto A de la curva determina con P una recta secante $s = \text{P A}$. Cuando A se mueve acercándose a P sobre la curva, también se mueve la secante s girando alrededor de P como indica la figura. Si esta secante variable tiende a *una posición límite t*, la recta t se llamará *tangente a la curva en el punto* P.

Para comprender el significado de límite de una recta variable que pasa por un punto fijo, debemos tener presente que

en el haz de rectas se definen los límites de modo análogo al de la serie rectilínea o recta puntual, es decir, por la condición de que el ángulo (que es una coordenada en el haz) tienda

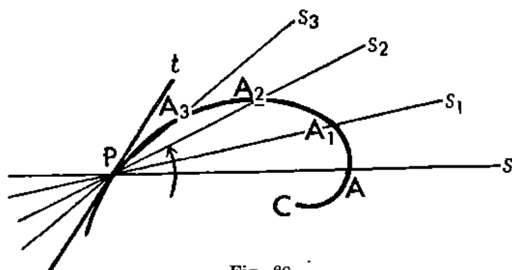


Fig. 88.

a 0. En términos precisos: La tangente t está determinada por la condición de que el ángulo agudo $s\,t$ formado con ella por la secante variable s tiende a 0 para A → P, o sea cuando A P → 0.

La tangente a una curva puede muy bien no existir, aun cuando la curva sea continua en el punto.

EJEMPLOS: 1. La función $f(x) = |x|$, que está representada por las bisectrices del primero y segundo cuadrantes, es continua en $x = 0$, pero la curva no tiene tangente allí, pues si nos acercamos a $x = 0$ por la sucesión de valores:

$$\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots$$

los correspondientes puntos de la curva determinan con el origen secantes que coinciden alternativamente con una u otra bisectriz, y que por lo tanto no tienden a ninguna posición límite.

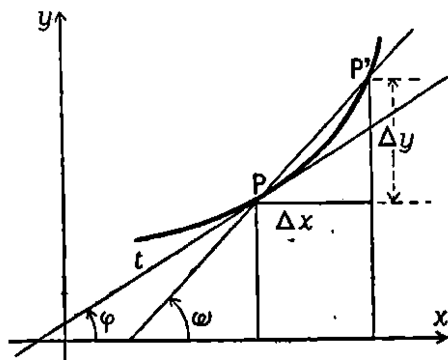


Fig. 89.

2. En la función $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$, completada "por continuidad" en $x = 0$ poniendo $f(0) = 0$, la gráfica (fig. 59, en § 24-1) está comprendida entre las rectas

$$y = x \quad \text{e} \quad y = -x.$$

Tampoco existe tangente en $x = 0$, esta vez aunque nos acerquemos siempre por el mismo lado, pues no existe el límite de $k/h = \operatorname{sen} \pi/h$.

Hemos visto (§ 30-1) que la razón incremental mide el coeficiente angular de la secante P P′ (fig. 89).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \omega.$$

Si ahora $\Delta x \to 0$ el punto P′ se aproxima a P sobre la curva, y la secante tiende hacia la recta t, tangente en el punto P, de modo que si existe derivada finita tendremos, pasando al límite en la relación anterior (teniendo en cuenta la continuidad de la función tg)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

o sea:

[30-10] $$\boxed{y' = \operatorname{tg} \varphi};$$

es decir, *la derivada de una función en un punto mide la pendiente o coeficiente angular de la tangente a la curva en dicho punto.*

5. **Derivadas laterales. Derivada infinita.** — El ejemplo 1 de § 30-4 nos muestra que a veces el cociente de incrementos tiene límites distintos, según que h tienda hacia 0 por la derecha o por la izquierda (§ 25-4). Entonces, las dos semirrectas tangentes no forman una sola recta, sino un ángulo distinto de 180°. Los dos límites del cociente incremental suelen llamarse *derivada a la derecha* y *derivada a la izquierda,* y representan las pendientes de las dos semirrectas tangentes en el *punto anguloso.* Otro ejemplo es el siguiente:

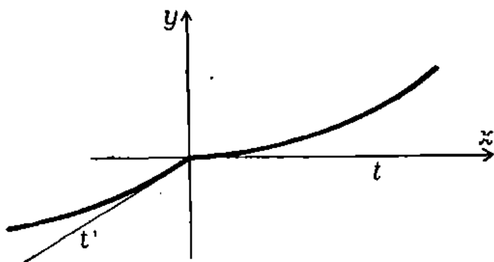


Fig. 90.

EJEMPLO 1. $f(x) = x/(1 + e^{1/x})$ para $x \neq 0$.

Al tender x a cero, tiende $f(x)$ a cero; luego, poniendo $f(0) = 0$ se tiene una función continua (fig. 90). La razón incremental a partir de $x = 0$ es:

$$k/h = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1/(1 + e^{1/h}).$$

Para $h \to 0^+$, $e^{1/h} \to +\infty$; $k/h \to 0$.

Para $h \to 0^-$, $e^{1/h} \to 0$; $k/h \to 1$.

Por tanto, en el origen, la derivada a la derecha es cero, y a la izquierda es uno.

Si la función es continua y la razón incremental tiene límite infinito, la curva tiene tangente vertical (es decir, paralela al eje y); pero esto puede acontecer de tres modos, según que el límite sea del mismo signo por ambos lados, o de distinto signo, o no conserve signo constante en uno o ambos lados.

EJEMPLOS: 2. Sea la función $y = x^{1/3}$ (fig. 91).
En el punto $x = 0$, el cociente incremental es:

$$\frac{k}{h} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = h^{-\frac{2}{3}} \rightarrow +\infty.$$

Cuando el límite es $+\infty$ por ambos lados (o bien $-\infty$ por ambos), la tangente atraviesa la curva y el punto es de inflexión (§ 33-9). Las dos semirrectas tangentes son opuestas.

3. Sea la función $y = x^{\frac{2}{3}}$ (fig. 92).
En el punto $x = 0$, el cociente incremental es:

$$\frac{k}{h} = \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = h^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \infty$$

con signo $+$ por la derecha y $-$ por la izquierda. Las dos semirrectas tangentes coinciden. El punto se llama *cuspidal* o *de retroceso.*

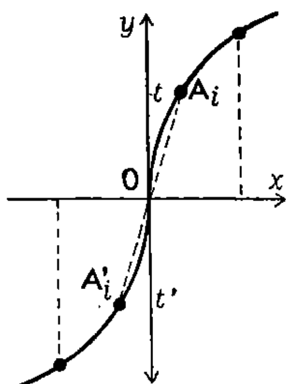


Fig. 91.

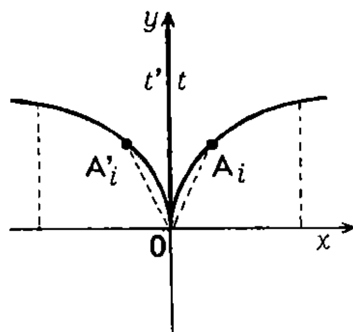


Fig. 92.

4. Si f(x) es la función de DIRICHLET (§ 23-3, ej. 4), es

$$y = \sqrt[3]{x}\left[\mathrm{f}(x) - \frac{1}{2}\right]$$

continua en $x = 0$ (fig. 93), y la derivada ∞ no tiene signo determinado ni a la derecha ni a la izquierda. No existen, por tanto, semirrectas tangentes, pero sí recta tangente, como se definió en § 30-4.

Para evitar esta incongruencia, conviene restringir esta definición del modo siguiente:

DEF.: Se dice que una curva tiene *tangente única* en un punto, o que el punto es *ordinario*, cuando existen semirrectas tangentes a los dos arcos en que se divide por dicho punto, y éstas son opuestas.

Diremos que existe *derivada única* en un punto, cuando existen y son iguales las derivadas a la derecha e izquierda de dicho punto, es decir, cuando ambas tienen valores *finitos*

iguales (tangente oblicua), o bien ambas son *infinitas de igual signo* (tangente única vertical).

Así, pues, las funciones de los ejemplos 3 y 4 *no tienen derivada única* en el origen, y las respectivas curvas no tienen tangente en dicho punto, en el sentido estricto ahora definido.

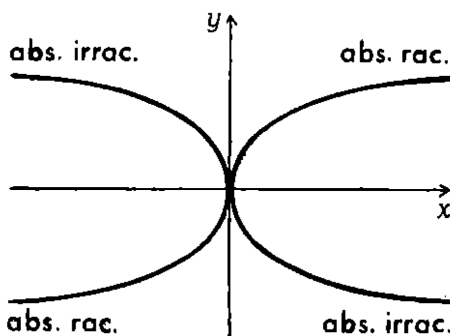


Fig. 93.

6. **La función derivada.** — Hasta ahora hemos definido y calculado la derivada de una función para un valor fijo asignado a x.

Si la función $f(x)$ tiene derivada en cada punto x, el valor de dicha derivada depende en general de x, es decir, es una nueva función de x que se llama *función derivada*, y se designa también por $f'(x)$ o por $Df(x)$.

Estas notaciones tienen con respecto a y' la ventaja de poner en evidencia la variable independiente (con respecto a la cual se deriva). La primera es más apropiada para indicar valores numéricos de la función derivada, o valores de la derivada en determinados puntos: $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-3/2)$. La notación $Df(x)$ se presta más para indicar derivadas de funciones dadas explícitamente; por ejemplo, las derivadas calculadas en § 30-3 nos permiten escribir:

[30-11] $$Dc = 0; \quad D\,x^n = nx^{n-1}; \quad D(ax^2 + bx + c) = 2\,ax + b.$$

En realidad, en § 30-3, si bien entendíamos referirnos a un valor determinado de x, no lo hemos especificado numéricamente, y entonces hemos obtenido las derivadas como funciones de x, es decir, funciones derivadas y no valores particulares de las mismas.

Análogamente, se designan por $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ las derivadas laterales a la derecha y a la izquierda en x_0, y con $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$ las correspondientes funciones.

EJEMPLOS: 1. *Dada la función* $y = f(x) = x^3$, *calcular* $f'(2)$.

Por [30-11], la función derivada es $f'(x) = 3\,x^2$, y entonces $f'(2) = 12$.

2. *¿Cuáles son los puntos de la curva* $y = f(x) = x^3$ *en los cuales la tangente tiene pendiente 1/3?*

Debemos resolver la ecuación en x: $f'(x) = 3\,x^2 = 1/3$, que tiene las raíces $x_1 = 1/3$, $x_2 = -1/3$, y entonces los puntos son: $P_1(1/3, 1/27)$, $P_2(-1/3, -1/27)$.

7. **Ángulo de dos curvas.** — Llamaremos ángulo de dos curvas, $y = f(x)$, $y = g(x)$, que se corten en un punto P de abs-

cisa x_1 al ángulo θ de sus respectivas tangentes en P. Como los coeficientes angulares de estas tangentes son (§ 30-4):

$$m_1 = f'(x_1), \quad m_2 = g'(x_1),$$

es decir, los valores de las derivadas para $x = x_1$; el ángulo θ estará dado por su tangente, como sabemos por geometría analítica:

[30-12] $$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{f'(x_1) - g'(x_1)}{1 + f'(x_1)\, g'(x_1)}.$$

Naturalmente, dos curvas pueden formar varios ángulos, pues pueden cortarse en varios puntos.

8. **Continuidad de las funciones derivables.** — Una condición *necesaria* para que una función sea derivable (es decir, admita derivada finita) es *la continuidad*, es decir:

Toda función derivable es continua.

Demostraremos el siguiente teorema, más general:

TEOR.: *Si la función* f(x) *admite derivadas laterales finitas (iguales o no) en un punto* x_0, *es continua en este punto.*

Se tiene, en efecto, tomando los incrementos a partir de x_0:

$$k = \frac{k}{h} . h \to f'_+(x_0) . 0 = 0 \quad \text{para} \quad h \to 0^+.$$

$$k = \frac{k}{h} . h \to f'_-(x_0) . 0 = 0 \quad \text{para} \quad h \to 0^-.$$

es decir, la función es continua.

No puede afirmarse otro tanto si una de las derivadas laterales o la derivada única, es infinita en x_0.

EJEMPLO 1. En la función $y = \operatorname{sg} x$ (§ 23-6, b), el incremento a partir de $x = 0$ es:

$$k = 1 \text{ para } h > 0, \quad \text{y} \quad k = -1 \text{ para } h < 0,$$

y el cociente incremental tiende por ambos lados a $+\infty$, siendo discontinua la función en $x = 0$. Pero también puede ocurrir que la derivada sea infinita y la función sea continua, como lo muestra el ejemplo 2 de § 30-5.

La recíproca no es cierta. Hay funciones continuas que no tienen derivada, ni siquiera laterales, en algunos puntos, por no ser comparables los infinitésimos Δy y Δx, es decir, por carecer de límite el cociente de ambos. Tales puntos de continuidad no son ni ordinarios ni angulosos. Esto acontece en el ejemplo 2 de § 30-4. Para verlo analíticamente, basta formar la razón de incrementos:

$$\frac{k}{h} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h . \operatorname{sen} \pi/h}{h} = \operatorname{sen} \pi/h,$$

que carece de límite para $h \to 0$, pues oscila entre $+1$ y -1.

EJEMPLO 2. Si consideramos la función análoga

[30-13] $$g(x) = x^2 \operatorname{sen} \pi/x \quad \text{para} \quad x \neq 0, \quad g(0) = 0,$$

tendremos, en cambio, tomando incrementos a partir del origen:

[30 14] $$k/h = h.\text{sen}\ \pi/h \to 0,$$

resultado que era de esperar, pues la gráfica de $g(x)$ está comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2$, que tienen la misma tangente en $x = 0$.

Existen también funciones continuas, construídas por B. BOLZANO, K. WEIERSTRASS, U. DINI, K. KNOPP, etc., que carecen de derivada en todos sus puntos, es decir, hay curvas uniformes (§ 25-1, *b*) que no tienen una dirección determinada en ningún punto. La construcción de tales funciones puede conseguirse mediante su expresión por algoritmos indefinidos. En capítulo IX, nota VII, veremos un ejemplo sencillo.

EJERCICIOS

1. Razón incremental de:

   a) $y = x^4$ para $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;

   b) $y = 1/x^2$ para $x = 2$, $\Delta x = -0{,}2$.

2. Hallar, aplicando la definición, las derivadas de las funciones:
$$y = 1/x^2, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad y = \sqrt{ax + b}.$$

3. Representar la curva $y = f(x) = x^3 - 3x^2$, y determinar los puntos donde la tangente es paralela a la recta $y = 9x + 13$.

4. Fórmense funciones con derivadas laterales distintas. (Basta definir funciones con límites distintos por ambos lados, y multiplicar por x ó por $x - a$).

5. La función definida por
$$f(x) = x^2 \text{ sen } \frac{\pi}{2x} + (x - 1) \text{ sen } \frac{\pi}{2(x-1)}$$
$$\text{para} \quad 0 < x < 1 \quad \text{y} \quad f(0) = f(1) = 1,$$
¿tiene derivada a la derecha en 0, y a la izquierda en 1?

6. ¿Para qué valores reales de r y s, la función definida por
$$f(x) = (x^2)^r \text{ sen } (x^{-2})^s \quad \text{para} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0,$$
1º) tiene derivada en $x = 0$; 2º) esta derivada es continua en $x = 0$? Gráfica de valores en el plano $r\,s$.

7. Hallar el ángulo de las curvas $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2x^2$, en el punto de intersección distinto del origen.

8. En qué puntos y bajo qué ángulos se cortan las curvas
$$y = x^2 - 9, \qquad y = x - 3?$$

9. Funciones continuas sin derivada en infinitos puntos pueden construirse fácilmente, sin necesidad de algoritmos infinitos. Probar que la función de HANKEL:
$$y = x \text{ sen}(\pi/x).\text{sen}[1/\text{sen}(\pi/x)] \quad \text{para} \quad x \neq 0, \quad x \neq \pm 1/n,$$
$$y = 0 \quad \text{para} \quad x = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 1/2, \quad \pm 1/3, \quad \ldots$$
es continua en todo el campo real y que no admite derivada en ninguno de los puntos: $0, \ \pm 1, \ \pm 1/2, \ \pm 1/3, \ \ldots$

10. Una función notable, estudiada por GONZÁLEZ QUIJANO (*Congreso de Valladolid*, 1915), es la originada al poner $f(0) = 0/1$, $f(1) = 1/1$, y supuesta definida en los puntos $n/2^r$. $(0 \leqq n \leqq 2^r)$ para $r = 0, 1, 2, \ldots, \rho$,

se define en los puntos $(2m+1)/2^{\rho+1}$, $(0 \leqq m \leqq 2^{\rho}-1)$, tomando:

$$f\left(\frac{2m+1}{2^{\rho+1}}\right)=\frac{p+p'}{q+q'}, \quad \text{si} \quad f\left(\frac{m}{2^{\rho}}\right)=\frac{p}{q}, \quad f\left(\frac{m+1}{2^{\rho}}\right)=\frac{p'}{q'},$$

con p/q, p'/q' fracciones irreducibles. Demuéstrese que es posible (de una sola manera) completar su definición obteniendo una función *continua* en $[0,1]$, y que ésta es monótona y tiene derivada infinita en los puntos $p/2^r$.

§ 31. Las primeras aplicaciones de la derivada

1. **Ecuación de la tangente a una curva plana uniforme.** — Dada una curva de ecuación:

$$y = f(x),$$

se trata de escribir la ecuación de la recta tangente en un punto P de abscisa x_1.

Poniendo $y_1 = f(x_1)$, la ecuación de una recta cualquiera que pase por el punto P (x_1, y_1) es, como sabemos por Geometría analítica:

[31-1] $$y - y_1 = m\,(x - x_1),$$

obteniéndose una recta del haz para cada valor asignado a m. Pero m es el coeficiente angular de la recta [31-1]; entonces (§ 30-4) debe ser igual al valor de la derivada en x_1 para que dicha recta coincida con la tangente:

$$m = f'(x_1),$$

con lo que la ecuación de la tangente será:

[31-2] $$y - y_1 = f'(x_1)\,(x - x_1).$$

Cuando la derivada es infinita en x_1, la tangente es paralela al eje y, y entonces su ecuación es:

[31-3] $$x = x_1.$$

Ejemplo: *Ecuación de la tangente a la parábola* $y = f(x) = x^2$ *en el punto de abscisa* $x_1 = 3$.

Se tiene $y_1 = f(3) = 3^2 = 9$, de modo que el punto es $P(3, 9)$.

Como la función derivada es por [30-11] $f'(x) = 2x$, tendremos $m = f'(3) = 2.3 = 6$, y finalmente la ecuación de la tangente:

$$y - 9 = 6(x-3), \qquad \text{o bien:} \qquad y = 6x - 9.$$

2. **Ecuación de la normal.** — Se llama *normal a una curva en un punto* P a la perpendicular a la tangente trazada por P.

Por pasar por P (x_1, y_1), la normal tiene también una ecuación de la forma $y - y_1 = m_1\,(x - x_1)$ y como la condición de perpendicularidad de dos rectas es que sus coeficientes angulares sean recíprocos y de signos contrarios, tendremos: $m_1 = -1/f'(x_1)$, con lo cual la ecuación de la normal es (si $f'(x_1) \neq 0$):

[31-4] $$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Si $f'(x_1) = 0$ no se puede aplicar [31-4], pero en este caso la tangente es paralela al eje x (¿por qué?), entonces la normal será paralela al eje y, y su ecuación será simplemente:

[31-5] $$x = x_1.$$

EJEMPLO: Ecuación de la normal a la parábola $y = x^2$ en el punto $x_1 = 3$.

En el ejemplo del apartado anterior hemos escrito la ecuación de la tangente en dos formas. Reemplazando 6 por —1/6 *en la primera de ellas*, se tiene la ecuación de la normal $y - 9 = (-1/6)(x - 3)$, que en la forma explícita es: $y = (-1/6)\,x + 19/2$.

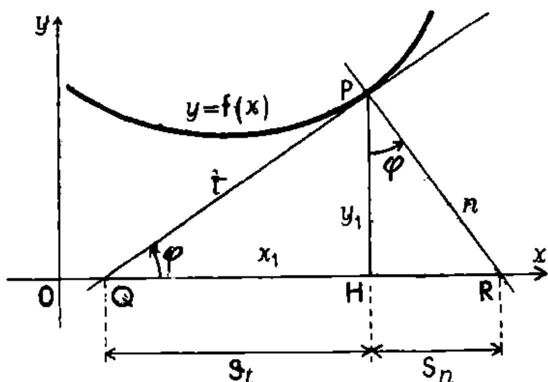


Fig. 94.

3. Segmentos determinados por la tangente y la normal. — Consideremos una curva $y = f(x)$, y las rectas tangente y normal en un punto $P(x_1, y_1)$ de la misma.

Los segmentos determinados sobre esas rectas por el punto P y las respectivas intersecciones con el eje x (fig. 94) se llaman:

segmento tangente $t = QP$
segmento normal $n = PR$

Para calcular sus longitudes se hallan antes las de *sus proyecciones sobre el eje x*, que llamaremos *subtangente* y *subnormal*,

$$S_t = QH, \quad S_n = HR$$

con los signos correspondientes.

a) Cálculo de S_t *y* S_n. — En el triángulo rectángulo QHP tenemos

$$\frac{y_1}{S_t} = \operatorname{tg}\varphi = y'_1$$

por la interpretación geométrica de la derivada (§ 30-4); por lo tanto:

[31-6] $$S_t = \frac{y_1}{y'_1}.$$

En el triángulo rectángulo P H R (donde el ángulo en P es igual a φ por lados perpendiculares) tenemos:

$$\frac{S_n}{y_1} = \operatorname{tg} \varphi = y'_1$$

[31-7] $$\therefore \quad S_n = y_1 y'_1$$

b) Cálculo de t y de n. — Aplicando el teorema de PITÁGORAS a los mismos triángulos, resulta sin dificultad:

[31-8] $$t = \left| \frac{y_1}{y'_1} \sqrt{1 + y'^2_1} \right|, \qquad n = \left| y_1 \sqrt{1 + y'^2_1} \right|.$$

4. **Movimiento rectilíneo. Velocidad.** — Consideremos un punto que se mueve sobre una recta O s, en la cual se ha definido un sistema de abscisas. Sea P la posición del móvil en el instante t, y O P = s la abscisa.

El movimiento del punto sobre la recta estará definido por una función:

[31-9] $$s = f(t),$$

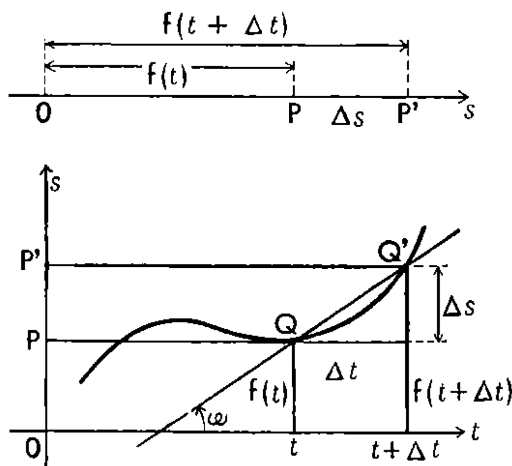


Fig. 95. — El movimiento del punto es rectilíneo, pero la gráfica de su ley no es necesariamente una recta. La velocidad media en $(t, t + \Delta t)$ es igual a la pendiente de la secante Q Q' : $v_m = \operatorname{tg} \omega$.

que determina la posición del punto en un instante cualquiera. La relación [31-9], que da el espacio en función del tiempo, se llama *ley del movimiento*.

Demos a t (variable independiente) un incremento arbitrario Δt. En el instante $t + \Delta t$, el punto móvil ocupará una posición P' (fig. 95), y el espacio recorrido será:

$$\Delta s = P P' = O P' - O P = f(t + \Delta t) - f(t)\cdot$$

La relación:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo se llama *velocidad media* v_m del punto móvil en el intervalo $(t, t + \Delta t)$. Observemos que es la razón incremental corres-

pondiente a la función [31-9]. Ella nos da un valor aproximado de lo que intuitivamente entendemos por velocidad en el instante t, y la aproximación es tanto mejor cuanto menor es el intervalo considerado. Somos conducidos así a dar la siguiente definición: *llamaremos velocidad en el instante t, al límite de la velocidad media en el intervalo* $(t, t+\Delta t)$ *cuando* $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} v_m = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Pero este límite es, por definición, la derivada:

[31-10] $$\boxed{v = s' = f'(t)}$$

es decir, *la velocidad es igual a la derivada del espacio respecto al tiempo;* en la gráfica de la ley del movimiento (fig. 95) estará dada por la pendiente de la *tangente.*

EJEMPLO: *Movimiento uniforme.* Si la ley del movimiento está dada por una función lineal:

[31-11] $$s = f(t) = a\,t + b,$$

es decir, si no sólo la trayectoria es rectilínea, sino también lo es la gráfica de su ley, *la velocidad es constante,* pues por [30-9],

$$v = f'(t) = a.$$

Por eso el movimiento se llama *uniforme.* Si llamamos s_0 al espacio inicial (para $t=0$) tendremos, haciendo $t=0$ en [31-11]: $s_0 = a\,0 + b$ ó $b = s_0$, y reemplazando en [31-11] se tiene la *ley del movimiento uniforme:*

[31-12] $$s = v\,t + s_0.$$

EJERCICIOS

1. Tangentes y normales a las curvas: $y = x^3$, $x\,y - 1 = 0$, en el punto de abscisa $x_1 = 1$.

2. *a*) Ecuación de la tangente a la curva $y = a\,x^n$;

b) Probar que en el caso $n = 2$ (parábola de eje $0\,y$), la tangente en (x_1, y_1) se obtiene uniendo dicho punto con $(0, -y_1)$;

c) Probar que para $n = -1$ (hipérbola equilátera referida a sus asíntotas), la tangente en (x_1, y_1) se obtiene uniendo con $(0, 2\,y_1)$;

d) Generalizar para n cualquiera.

3. Hallar, respecto a la curva $y = x^3/3$, los puntos en que la pendiente de la tangente es 4; ecuaciones de esas tangentes. Puntos en que la normal tiene pendiente $-1/9$; ecuaciones de esas normales. Ángulo de dicha curva con $y = x^2$ en el punto $(3; 9)$.

4. Calcular las longitudes de tangente, normal, subtangente y subnormal para la curva $y = x^3$ en el punto $x = 3/2$.

5. Hallar la ley de un movimiento uniforme, si para $t = 2$ es $s = 4$, y para $t = 5$ es $s = 13$.

§ 32. CÁLCULO DE LA DERIVADA

1. Linealidad de la derivación. — Cuando una función no es muy simple, el cálculo directo de su derivada, como en § 30-3, es en general complicado. Por eso nos proponemos deducir propiedades que nos permitan expresar rápidamente las derivadas de funciones de clases cada vez más amplias, hasta incluir todas las funciones que conocemos y sus compuestas.

a) Sea $y = f(x)$ una función derivable (es decir, con derivada finita), y demos a x un incremento Δx; el incremento de la función $C\,y$ es $C.\Delta y$; luego, el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ queda multiplicado por C, y por tanto, también su límite. Es decir:

Al multiplicar por una constante una función, la derivada de ésta queda multiplicada por dicha constante: $D(Cy) = C.Dy$.

b) Sea $y = u + v + \ldots + w$ una suma de un número finito de funciones derivables de la variable independiente x; sean Δu, Δv, ... Δw los incrementos que toman u, v, ..., w al incrementar x en Δx.

Será:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \ldots + \Delta w;$$

luego:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta w}{\Delta x};$$

tomando límites resulta:

[32-1] $$D\,(u + v + \ldots + w) = D\,u + D\,v + \ldots + D\,w.$$

La derivada de la suma de un número finito de funciones derivables es la suma de las derivadas.

c) Regla análoga resulta para la suma algebraica, bien directamente, o bien observando que cada sustraendo puede considerarse como un sumando con coeficiente —1. En general, llamando *expresión o combinación lineal* de varias funciones a toda suma algebraica de dichas funciones multiplicadas por ciertos coeficientes constantes, tendremos:

La derivada de una combinación lineal de funciones es la expresión lineal análogamente formada con sus derivadas, es decir:

[32-2]

$$\boxed{D(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n) = a_1 Du_1 + a_2 Du_2 + \ldots + a_n Du_n}$$

si los coeficientes a_i son constantes.

Esta propiedad se expresa diciendo que la operación D es una *operación lineal.*

Con esto y las expresiones [30-11] $\mathrm{D}\,c = 0$ y $\mathrm{D}\,x^n = n\,x^{n-1}$ de las derivadas de una constante y de una potencia de exponente natural, estamos en condiciones de derivar cualquier *polinomio*.

d) Las propiedades *a*) y *b*), o la *c*) que las comprende, son ejemplos de *reglas de derivación*. Deduciremos reglas análogas para derivar productos y cocientes de funciones, para una función de función, etc. Estas reglas permiten derivar funciones tales como $f(x) = x^8 \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x)$, conociendo las derivadas de las funciones elementales. A las expresiones que dan las derivadas de estas últimas las llamaremos *fórmulas de derivación*. Comencemos por deducir la de $\ln x$, que nos dará nuevas *reglas* de derivación (por ej., para el producto y el cociente, pues tomando logaritmos, éstos se transforman en suma o diferencia).

2. **Derivada del logaritmo.** — Formaremos la derivada de

$$y = f(x) = \ln x$$

aplicando paso a paso el proceso indicado en la definición (§ 30-2).

Dando a x un incremento Δx, tendremos para y el incremento

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Antes de pasar al límite, transformemos esta razón incremental así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x} \ln(1 + t)^{1/t},$$

siendo $t = \Delta x / x$. Cuando $\Delta x \to 0$ también $t \to 0$, $1/t \to \infty$, y entonces (§ 21-5, *b* y § 24-9),

$$\lim (1 + t)^{1/t} = e.$$

Como el límite del logaritmo es el logaritmo del límite (por la continuidad de esta función: § 27-3), resulta para Δx y $t \to 0$:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = (1/x) \lim \ln (1 + t)^{1/t} = (1/x) \ln [\lim (1 + t)^{1/t}] =$$

$$= (1/x) . \ln e = 1/x,$$

o sea:

[32-3] $$\boxed{\mathrm{D} \ln x = \frac{1}{x}}.$$

Para la función logaritmo decimal, por [8-12] $\lg x = M \ln x$, tendremos:

[32-4] $$D \lg x = \frac{M}{x}.$$

Análogamente:

[32-5] $$D \log_a x = \frac{1}{x . \ln a}.$$

EJERCICIO: Probar, utilizando [32-3], que para trazar la tangente a la gráfica de $y = \ln x$ en un punto P, basta unir este punto con otro de ordenada una unidad menor, situado sobre el eje y.

3. Derivada de una función de función. — Para calcular la derivada de una función de función $y = f[g(x)]$, o sea:

$$y = f(u), \quad \text{siendo} \quad u = g(x),$$

comencemos por dar a x un incremento Δx, con lo cual u recibe un incremento Δu, y en consecuencia, y uno Δy.

Para formar la razón incremental $\Delta y / \Delta x$, dividamos por Δx la expresión [30-7] del incremento que para la función $y = f(u)$ es:

$$\Delta y = f'(u) . \Delta u + \eta . \Delta u,$$

válida aún en el caso $\Delta u = 0$, por ser entonces $\Delta y = 0$. Se tiene, así:

$$\Delta y / \Delta x = f'(u) . \Delta u / \Delta x + \eta . \Delta u / \Delta x,$$

y para $\Delta x \to 0$ resulta:

[32-6] $$y' = f'(u) . g'(x).$$

Análogamente, si:

$$y = f(u), \quad u = g(v), \quad v = h(x),$$

se tiene:

$$y' = f'(u) . g'(v) . h'(x),$$

y lo mismo para más funciones.

Podemos formular entonces la siguiente regla: *La derivada respecto de x de una función que dependa de ella por intermedio de otras variables, cada una de las cuales es función de la siguiente, es el producto de las derivadas de cada una de estas funciones respecto de la variable de que depende inmediatamente.*

EJEMPLOS: 1. Derivada de $y = \ln x^3$. Se tiene:

$$y = \ln u, \quad \text{siendo} \quad u = x^3,$$

y entonces,

$$y' = \frac{1}{u} . 3x^2 = \frac{1}{x^3} . 3x^2 = \frac{3}{x}.$$

2. Derivada de $y = \ln^3 x$. Se tiene:

$$y = u^3, \quad \text{siendo} \quad u = \ln x$$

$$\therefore \quad y' = 3u^2 . \frac{1}{x} = \frac{3 \ln^2 x}{x}.$$

La relación [32-6] se puede escribir también así:

[32-7] $$\boxed{\mathrm{Df}\,[\mathrm{g}(x)] = \mathrm{f}'(u)\,.\mathrm{Dg}(x)}$$

y en esta forma vemos que la letra D, símbolo de derivación, se corre hacia la derecha. Por eso llamaremos a [32-7] *regla del corrimiento de la* D.

Las derivadas de los ejemplos 1 y 2 se calculan directamente así con la regla del corrimiento de la D:

$$\mathrm{D}\ln x^3 = 1/x^3\,.\,\mathrm{D}x^3 = 3\,x^2/x^3 = 3/x.$$
$$\mathrm{D}\ln^3 x = 3\ln^2 x\,.\,\mathrm{D}\ln x = (3\ln^2 x)/x.$$

EJEMPLO 3. Sea:

$$y = \mathrm{f}(u) = u^2 + u, \quad \text{siendo} \quad u = \mathrm{g}(x) = \begin{cases} = x^2 \operatorname{sen} \pi/x & \text{para } x \neq 0 \\ = 0 & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

Las dos funciones son uniformes y continuas. La segunda se anula en infinitos puntos de todo entorno del origen, y por tanto, Δu se anula infinitas veces al tender a cero. Sin embargo, podemos aplicar la fórmula [32-6], y por ser en $x = 0$, $\mathrm{f}'(0) = 2\,.\,0 + 0 = 0$ por [32-1] y $\mathrm{g}'(0) = 0$, como vimos en § 30-8, resulta $y' = 0$.

4. **El método de la derivada logarítmica. Reglas del producto y del cociente.** — Aplicando la regla del corrimiento de la D a ln y (que es una función de función, pues y es a su vez función de x) se tiene:

[32-8] $$\mathrm{D}\ln y = \frac{1}{y}\,.\,\mathrm{D}\,y = \frac{y'}{y}\,.$$

Esta expresión se llama *derivada logarítmica* de la función $y = \mathrm{f}(x)$ (por ser la derivada de su logaritmo) [1]. A veces conviene usarla para calcular por su intermedio y', como veremos a continuación:

Un producto de funciones, tal como

$$y = u\,.\,v\,.\,w,$$

se puede transformar en una suma, tomando logaritmos:

[32-9] $$\ln y = \ln u + \ln v + \ln w,$$

y derivando ahora, se tiene por [32-1] y [32-3]:

[32-10] $$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w},$$

de donde resulta la derivada:

[32-11]
$$\boxed{\mathrm{D}\,(u\,.\,v\,.\,w) = u\,v\,w\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}\right) = u'\,v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'}$$

Como el procedimiento es aplicable, cualquiera que sea el número de factores, resulta la regla general:

La derivada de un producto de funciones es la suma de todos los productos obtenidos sustituyendo un factor por su derivada.

[1] Para que exista y' es suficiente que exista D ln y, por § 32-3, pues $y = e^{\ln y}$, y es derivable la función exponencial por § 32-2 y 8.

NOTAS: 1. Si alguna función es negativa, no es válida [32-9] por no estar definido el logaritmo, pero sí [32-10], pues al cambiar de signo u y u', no varía el cociente $\frac{u'}{u}$ ni el $\frac{y'}{y}$.

2. Si para algún valor de x se anula una función, por ejemplo u, tampoco vale [32-9], pero al variar x es:

$$\Delta y = \Delta u(v + \Delta v)(w + \Delta w),$$

y al dividir por Δx y pasar al límite resulta:

$$y' = u' v w,$$

de acuerdo con la fórmula general [32-11].

Para calcular la derivada de

$$y = \frac{u}{v},$$

procedamos de igual modo:

[32-12] $$\ln y = \ln u - \ln v$$

[32-13] $$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$$

de donde:

[32-14] $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u}{v}\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right) = \frac{v u' - u v'}{v^2}$$

La derivada del cociente de dos funciones derivables es igual al denominador por la derivada del numerador, menos éste por la derivada de aquél, partido por el cuadrado del denominador.

Con esto estamos ya en condiciones de derivar una función racional cualquiera. Por ejemplo, si

$$y = \frac{4x^3 - 2x^2}{x^4 - 1},$$

tendremos:

$$y' = \frac{(12x^2 - 4x)(x^4 - 1) - (4x^3 - 2x^2)\, 4x^3}{(x^4 - 1)^2}.$$

NOTAS: 3. Si alguna función es negativa, no vale [32-12], pero subsiste [32-13], pues cambiando de signo u, cambia u', y el cociente es el mismo.

4. Si para algún valor de x se anula u, tampoco vale [32-12], pero es en ese punto:

$$\Delta y = \frac{\Delta u}{v + \Delta v} - 0 = \frac{\Delta u}{v + \Delta v}; \quad \text{luego,} \quad y' = \frac{u'}{v},$$

resultado acorde con la fórmula [32-14], la cual es, por tanto, válida para todo valor de x' en que u y v sean derivables y v distinto de 0.

5. Derivación de determinantes. — Sea, por ejemplo, un determinante de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \\ v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) \\ w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \end{vmatrix}$$

Cada término es de la forma: $u_i(x)\ v_j(x)\ w_k(x)$, y su derivada consta de tres términos, que sólo difieren en tener acentuada la u, o la v, o la w.

Agrupados los primeros, forman el determinante que sólo difiere en tener acentuada la primera fila; y análogamente las otras; luego:

La derivada de un determinante cuyos elementos son funciones de una variable, es la suma de los determinantes obtenidos derivando los elementos de una sola fila.

6. **Derivadas de las funciones potencial y exponencial.** — Si

$$y = f(x) = x^a \qquad (x > 0),$$

tomando logaritmos (lo que puede hacerse por ser $y > 0$),

$$\ln y = a \,.\, \ln x,$$

y derivando ahora, resulta $y'/y = a \,.\, (1/x) = a/x$, de donde se despeja y' obteniéndose:

[32-15] $$\boxed{D\, x^a = a \,.\, x^{a-1},}$$

fórmula ya obtenida [30-11] para exponente natural.

La derivada de la función potencial de exponente real cualquiera se obtiene multiplicando por el exponente y disminuyendo éste en 1.

El mismo método de la derivada logarítmica puede aplicarse a la función exponencial:

$$y = f(x) = a^x; \quad (a > 0)$$

$$\therefore \quad \ln y = x \,.\, \ln a$$

y derivando [por [32-8] y § 32-1, a]: $y'/y = \ln a$

[32-16] $$\therefore \quad \boxed{D\, a^x = a^x \,.\, \ln a,}$$

y en particular:

[32-17] $$D\, e^x = e^x.$$

En el caso de ser base y exponente ambos variables, es decir, para funciones de la forma $y = u(x)^{v(x)}$, puede aplicarse el mismo método. Por ejemplo, si $y = x^x$, se tiene $\ln y = x \,.\ln x$, y entonces:

$$\frac{y'}{y} = 1 \,.\ln x + x \,.\, \frac{1}{x} = 1 + \ln x$$

$$\therefore \quad y' = x^x\,(1 + \ln x).$$

Observación: Estas fórmulas de derivación pueden generalizarse. Considerando, por ejemplo, *la potencia de una función de x*: u^a, se tiene una función de función:

$$y = f(u) = u^a, \text{ siendo } u = g(x),$$

y entonces la regla del corrimiento de la D da:

$$D\,y = f'(u)\,.\;D\;g(x),$$

o sea por [32-15]:

$$D\,u^a = a\,.\;u^{a-1}.\;D\,u.$$

Análogamente resulta de [32-16]:

$$D\,a^u = a^u \ln a.\;D\,u.$$

Lo mismo puede hacerse con las demás fórmulas de derivación que iremos hallando (§ 32-11).

7. **Derivadas de las funciones circulares.** — Hallaremos directamente la derivada de

$$y = f(x) = \text{sen}\;x,$$

y luego ella nos dará, por aplicación fácil de reglas anteriores, las derivadas de las demás funciones trigonométricas. Dando a x un incremento $\Delta\,x$, tendremos para la función el incremento:

$$\begin{aligned}\Delta\,y &= \text{sen}\;(x + \Delta\,x) - \text{sen}\;x\\ &= \text{sen}\;x\cos\Delta\,x + \cos x\;\text{sen}\;\Delta\,x - \text{sen}\;x\end{aligned}$$

con lo cual la razón incremental puede escribirse:

$$\frac{\Delta\,y}{\Delta\,x} = \frac{\cos x\;\text{sen}\;\Delta\,x}{\Delta\,x} - \frac{\text{sen}\;x\;(1 - \cos\Delta\,x)}{\Delta\,x},$$

y para $\Delta\,x \to 0$:

$$f'(x) = \cos x \lim \frac{\text{sen}\;\Delta\,x}{\Delta\,x} - \text{sen}\;x \lim \frac{1 - \cos\Delta\,x}{\Delta\,x};$$

pero el primer límite vale 1 (§ 28-2), y el segundo es cero, pues:

$$1 - \cos\Delta\,x = 2\;\text{sen}^2\frac{\Delta\,x}{2},$$

es un infinitésimo de orden superior (§ 24-3, c_3) a $\Delta\,x$. Entonces queda:

[32-18] $$\boxed{D\;\text{sen}\;x = \cos x}$$

La derivada de $\cos x$ podría hallarse por un procedimiento semejante, pero basta observar que $y = \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, y aplicar la regla del corrimiento de la D:

$$D\,y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) D\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\,\text{sen}\;x,$$

o sea:

[32-19] $$\boxed{D\cos x = -\,\text{sen}\;x}$$

Como $\text{tg}\;x = \dfrac{\text{sen}\;x}{\cos x}$, por derivación de un cociente se obtiene:

$$\mathrm{D}\,\mathrm{tg}\,x = \frac{\cos x \cos x - (-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x},$$

o sea:

[32-20] $$\boxed{\mathrm{D}\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Análogamente se tiene:

[32-21] $$\boxed{\mathrm{D}\,\mathrm{cotg}\,x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.}$$

8. **Derivada de la función inversa.** — Consideremos una función: $y = \mathrm{f}(x)$, y su función inversa: $x = \mathrm{g}(y)$. Podemos tomar a x como función de función de x *misma*, escribiendo estas relaciones así:

$$x = \mathrm{g}(y), \quad \text{siendo} \quad y = \mathrm{f}(x).$$

Aplicando la regla de derivación de una función de función (§ 32-3), y teniendo presente que la derivada de x es 1, resulta:

$$1 = \mathrm{g}'(y)\ \mathrm{f}'(x)$$

[32-22] $$\therefore \quad \boxed{\mathrm{g}'(y) = \frac{1}{\mathrm{f}'(x)},}$$

o bien:

[32-23] $$\boxed{\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{\mathrm{g}'(y)},}$$

es decir: *las derivadas de dos funciones inversas, para valores correspondientes de x é y, son números recíprocos.*

Al mismo resultado puede llegarse geométricamente si se observa que una misma gráfica representa a una función y a su inversa; pero según como se consideren los ejes, los ángulos de inclinación de la tangente son complementarios (hacer una gráfica), y entonces sus tangentes son recíprocas. ¿Qué pasa si una derivada es nula?

9. **Aplicación a las funciones circulares inversas.** — Si $y = \mathrm{f}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, se tiene: $x = \operatorname{sen} y$, y entonces, por [32-23] y [32-18],

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{\mathrm{D}\operatorname{sen} y} = \frac{1}{\cos y},$$

pero como debemos expresar $\mathrm{f}'(x)$ *como función de x*, la transformamos así:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$$

donde debemos tomar para la raíz el signo +, pues entre los infinitos arcos cuyo seno vale x, el símbolo arc sen x indica el valor principal, situado en la semicircunferencia de la derecha (§ 28-5), cuyo cos y es positivo.

Entonces:

[32-24] $$\boxed{\mathrm{D}\ \operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}}.$$

Observando que: arc sen x + arc cos $x = \pi/2$

$\therefore$ D arc sen x + D arc cos $x = 0$,

resulta:

[32-25] $$\boxed{\mathrm{D}\ \operatorname{arc\,cos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Se tiene:

[32-26] $$\boxed{\mathrm{D}\ \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}},$$

pues si y = arc tg x, es: x = tg y, y entonces:

$$y' = \frac{1}{\mathrm{D}\ \operatorname{tg} y} = \frac{1}{\cos^{-2} y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

De arc tg x + arc ctg $x = \pi/2$, resulta:
D arc tg x + D arc ctg x = 0, y entonces:

[32-27] $$\boxed{\mathrm{D}\ \operatorname{arc\,cotg} x = -\frac{1}{1+x^2}}.$$

10. Derivadas de las funciones hiperbólicas directas e inversas. — Como:

$$\mathrm{D}\ e^x = e^x \quad \text{y} \quad \mathrm{D}\ e^{-x} = e^{-x}\ \mathrm{D}\ (-x) = -e^{-x}$$

se obtiene:

[32-28] $$\mathrm{D} \operatorname{ch} x = \tfrac{1}{2} \mathrm{D}\ (e^x + e^{-x}) = \tfrac{1}{2}\ (e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x,$$

[32-29] $$\mathrm{D} \operatorname{sh} x = \tfrac{1}{2} \mathrm{D}\ (e^x - e^{-x}) = \tfrac{1}{2}\ (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x;$$

fórmulas de derivación análogas a las de las funciones circulares, pero más simétricas, pues los signos son siempre +. Por derivación de un cociente resulta:

[32-30] $$\mathrm{D}\ \operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Teniendo en cuenta ahora la relación fundamental [29-6] $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$, de la cual resulta:

$$\operatorname{ch} y = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1};\quad \operatorname{sh} y = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1};\ 1 - \operatorname{tgh}^2 y = 1/\operatorname{ch}^2 y,$$

y aplicando la regla para derivar funciones inversas, se obtiene:

[32-31] $D \arg \operatorname{sh} x = 1/\sqrt{x^2+1}$

[32-32] $D \arg \operatorname{ch} x = 1/\sqrt{x^2-1}$

[32-33] $D \arg \operatorname{tgh} x = 1/(1-x^2)$.

11. **Tabla de derivadas.** — En la tabla siguiente hemos colocado, una frente a otra, las derivadas de funciones inversas entre sí. Entonces, por ejemplo, hallada la derivada de $\ln x$ [32-3], podríamos calcular la de e^x, por el teorema sobre derivadas de funciones inversas (la hemos hallado, en cambio, por el método de la derivada logarítmica en § 32-6).

Las funciones se suponen aplicadas a una función cualquiera de x, de modo que en cada caso tenemos una función de función, y cada fórmula indica *un paso* en el método del corrimiento de la D. La fórmula 3 expresa la derivada logarítmica de u.

TABLA DE DERIVADAS

1. $D u^a = a\, u^{a-1} . D u$. Casos particulares:	
a) $D c = 0$.	
b) $D \sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} D u$.	
c) $D \frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2} D u$.	
2. $D a^u = a^u . \ln a . D u$.	
a) $D e^u = e^u . D u$.	3. $D \ln u = \frac{1}{u} D u$.
	a) $D \lg u = \frac{0{,}43}{u} D u$.

FUNCIONES CIRCULARES

4. $D \operatorname{sen} u = \cos u . D u$	5. $D \operatorname{arc\,sen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} . D u$.
4′. $D \cos u = -\operatorname{sen} u . D u$	5′. $D \operatorname{arc\,cos} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} . D u$.
4″. $D \operatorname{tg} u = \frac{1}{\cos^2 u} . D u$.	5″. $D \operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{1+u^2} . D u$.
4‴ $D \operatorname{cotg} u = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u} . D u$.	5‴. $D \operatorname{arc\,cotg} u = -\frac{1}{1+u^2} . D u$.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

6	$\mathrm{D}\,\mathrm{sh}\,u = \mathrm{ch}\,u \,.\, \mathrm{D}\,u.$	7.	$\mathrm{D}\arg\mathrm{sh}\,u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}.\,\mathrm{D}\,u.$
6′	$\mathrm{D}\,\mathrm{ch}\,u = \mathrm{sh}\,u \,.\, \mathrm{D}\,u.$	7′	$\mathrm{D}\arg\mathrm{ch}\,u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}.\,\mathrm{D}\,u.$
6″	$\mathrm{D}\,\mathrm{tgh}\,u = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\,u}.\,\mathrm{D}\,u.$	7″	$\mathrm{D}\arg\mathrm{tgh}\,u = \dfrac{1}{1-u^2}.\,\mathrm{D}\,u.$

Frente a la entrada 1 queda en blanco la otra columna. pues la función inversa de u^a es $u^{1/a}$, del mismo tipo (función potencial). Los ejemplos siguientes ilustran sobre la aplicación de la regla del corrimiento de la D con esta tabla.

EJEMPLOS: 1.

$$\mathrm{D}\ln\mathrm{sen}\sqrt{x} = \frac{1}{\mathrm{sen}\sqrt{x}}\,\mathrm{D}\,\mathrm{sen}\sqrt{x} \qquad (3.\ \text{con } u = \mathrm{sen}\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\mathrm{sen}\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,.\,\mathrm{D}\sqrt{x} \qquad (4.\ \text{con } u = \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\mathrm{sen}\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (1b.\ \text{con } u = x)$$

$$= \frac{\mathrm{cotg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

2.

$$\mathrm{D}\,\mathrm{tg}^3 e^{3x} = 3\,\mathrm{tg}^2 e^{3x}.\,\mathrm{D}\,\mathrm{tg}\,e^{3x} \qquad (1.\ \text{con } u = \mathrm{tg}\,e^{3x})$$

$$= 3\,\mathrm{tg}^2 e^{3x}.\,\frac{1}{\cos^2 e^{3x}}\,\mathrm{D}\,e^{3x} \qquad (4''\ \text{con } u = e^{3x})$$

$$= 3\,\mathrm{tg}^2 e^{3x}.\,\frac{1}{\cos^2 e^{3x}}\,e^{3x}.\,\mathrm{D}\,(3x) \qquad (2a.\ \text{con } u = 3x)$$

$$= 3\,\mathrm{tg}^2 e^{3x}.\,\frac{1}{\cos^2 e^{3x}}\,e^{3x}.\,3.$$

3.

$$\mathrm{D}\,(\mathrm{sen}\,e^{3x} + e^{\mathrm{sen}\,x}) = \cos e^{3x}.\,\mathrm{D}\,e^{3x} + e^{\mathrm{sen}\,x}.\,\mathrm{D}\,\mathrm{sen}\,x \qquad (4\ \text{y}\ 2a)$$

$$= \cos e^{3x}.\,e^{3x}\,\mathrm{D}(3x) + e^{\mathrm{sen}\,x}.\cos x \qquad (2a\ \text{y}\ 4)$$

$$= 3\,e^{3x}\cos e^{3x} + e^{\mathrm{sen}\,x}.\cos x.$$

EJERCICIOS

1. Probar que la tangente a la curva $y = \ln^2 x$ en un punto (x, y), se traza uniéndolo con el punto $(0, y - 2\ln x)$.

2. Derivadas de las funciones:

$$y = (x^3 - 2x)^3, \qquad z = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad w = \ln\,(x^2 - x).$$

3. Derivar:

$$y = \ln\,(x^2 + 2)^2, \qquad z = \ln^2\,(x^2 + 2), \qquad w = \ln\ln\,(x^2 + 2).$$

4. Probar que la ecuación de la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(\text{hipérbola } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$$

en un punto (x_1, y_1) de la misma es:

$$\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{b^2} = 1 \qquad \left(\frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} = 1 \right).$$

5. Derivar las siguientes funciones algebraicas:

$y = x(x^2 - 1)(x^2 + 3)$, $\quad z = x/(x^2 + 1)$,

$w = \sqrt{x - 1}/\sqrt{x + 1}$, $\quad u = (\sqrt{x} + 1)/(\sqrt{x} - 1)$.

6. Hallar, verificando que se reduce a un solo determinante, la derivada del determinante, llamado *wronskiano*, de las n funciones de x, $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

7. Derivar: $y = e^{-x^2}$; $z = a^{-3x}$; $s = e^t/t^2$.

8. Derivar: $y = (x^2 + 1)^{3x}$; $z = (\ln t)^t$; $w = e^{x^e}$.

9. Calcular $f'(\pi/3)$, $g'(\pi/2)$ y $h'(\pi)$, siendo:

$$f(x) = -x + \operatorname{tg} x; \quad g(t) = \frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \cos t}; \quad h(\omega) = \frac{1 + \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg} \omega}.$$

10. Derivar: $y = 10^{\operatorname{sen} x}$; $z = x^{\operatorname{sen} x} + (\operatorname{tg} x)^x$.

11. Deducir las derivadas de $\sqrt{x}$ y de e^x de las de x^2 y $\ln x$.

12. Derivar: $y = \ln \operatorname{arc\,sen} x$, $z = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{(1 + x)/(1 - x)}$.

13. Verificar que $y = \operatorname{arc\,tg} x$ y $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x + 1}{1 - x}$ tienen la misma derivada. Explicar esto.

14. Derivar: $y = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} e^x$; $z = \operatorname{tgh} \sqrt{x}$; $w = (\operatorname{ch} t)^t$.

15. Derivar: $y = \operatorname{arg\,sh} x^3$; $z = \operatorname{arg\,ch} \sqrt{x}$; $w = \operatorname{arg\,tgh} (\operatorname{sen}^2 e^x)$.

16. Estudiar la función derivada de la función discontinua $x^2 - [x^2]$.

17. Derivar, incluso en $x = 0$, la función $x \operatorname{arc\,tg} (1/x)$, a la que se ha evitado la discontinuidad en aquel punto. ¿Cómo es ahí la derivada?

§ 33. Variación de las funciones

1. Criterios de crecimiento y decrecimiento. — Veremos en este parágrafo que dada una función $y = f(x)$, la consideración de su derivada da lugar a importantes conclusiones concernientes a la variación de y al variar x.

Comencemos por observar que las definiciones dadas en § 23-11 equivalen [indicando con h_0, k_0 incrementos correspondientes de x é y a partir de x_0, $y_0 = f(x_0)$] a decir que $f(x)$ es, en $x = x_0$:

estrictam. creciente si $\dfrac{k_0}{h_0} > 0$ para h_0 suficientemente pequeño

" decreciente " $\dfrac{k_0}{h_0} < 0$ " " " "

Las condiciones *en sentido amplio* (§ 23-11) se obtienen reemplazando $>$ por $\geqq$ y $<$ por $\leqq$.

Cuando existe la derivada $f'(x)$ y no se anula en $x = x_0$, su signo nos indica si la función es creciente o decreciente en x_0.

TEOR.: *Si* $f'(x_0) > 0$, *la función* $f(x)$ *es estrictamente creciente en* x_0.

Si $f'(x_0) < 0$, *la función* $f(x)$ *es estrictamente decreciente en* x_0.

Basta demostrar la primera parte, pues la otra se probaría en forma enteramente análoga; $f'(x_0) > 0$ significa que el cociente k_0/h_0 tiende hacia un límite positivo, y esto sólo es posible (§ 26-1) si para h_0 suficientemente pequeño se conserva positivo, lo que equivale a decir que $f(x)$ es estrictamente creciente en x_0.

Interprétese geométricamente el enunciado anterior, y alíquesele para hallar intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función sen x.

NOTAS: 1. Si $f'(x_0) = 0$, en cuyo caso la tangente es horizontal, no puede afirmarse nada: la función puede ser creciente, decreciente, o ni una cosa ni otra en x_0, como lo muestran respectivamente los ejemplos siguientes, con $x_0 = 0$:

$$f(x) = x^3, \qquad g(x) = -x^3, \qquad h(x) = x^2.$$

2. Las conclusiones del teorema subsisten si es $f'(x_0) = +\infty$ o $f'(x_0) = -\infty$ (§ 30-5); tal cosa ocurre, por ejemplo, con las funciones (fig. 91) $y = x^{1/3}$, $y = -x^{1/3}$ en $x_0 = 0$.

En cambio, si la derivada infinita no tiene signo determinado (§ 30-5), nada puede afirmarse. Por ejemplo $y = x^{2/3}$ (fig. 92) tiene un punto de retroceso en $x = 0$.

3. La condición $f'(x_0) > 0$ es suficiente para asegurar el crecimiento. aunque la función derivada sea discontinua y tome valores negativos y nulos en todo entorno de x_0.

EJEMPLO:

$$y = kx + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{Su derivada: } y' = k - \cos \frac{1}{x} + 2x . \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

es discontinua en el origen y toma valores negativos en todo entorno de 0, si es $k < 1$. Sin embargo, esas infinitas ondas no alteran el crecimiento en dicho punto. Además, este ejemplo nos muestra que el crecimiento en un punto x_0 no asegura el crecimiento en todos los puntos de un entorno de x_0, por pequeño que se procure tomar dicho entorno: el crecimiento tiene carácter *puntual*.

Dibújense las gráficas correspondientes a todos los ejemplos anteriores.

2. **Máximos y mínimos relativos.** — Diremos que la función $y = f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $x = x_0$, si $f(x_0)$ es mayor que cualquier otro valor de la función en un entorno de x_0, es decir, si se puede hallar un número $\delta > 0$, tal que:

[33-1] $$f(x_0) > f(x) \quad \text{para} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

EJEMPLO: La función $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$, representada en la

figura 96, tiene un máximo para $x_0 = 0$; se cumplen las condiciones de la definición eligiendo $\delta < AB$, pues los puntos de la curva a la derecha de B tienen ordenadas mayores que A.

Análogamente, diremos que $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $x = x_0$ cuando existe $\delta > 0$, tal que:

[33-2] $$f(x_0) < f(x) \quad \text{para} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Cuando la condición [33-1] (o la [33-2]) se verifica con $\geqslant$ (o con $\leqslant$), suele decirse que hay máximo (o mínimo) relativo *en sentido amplio*, o *no estricto*.

Fig. 96.

La palabra *relativo* indica que se compara el valor de la función en un punto con los valores en su vecindad solamente. El ejemplo anterior muestra que una función con un máximo y un mínimo puede tomar valores mayores que su máximo, o menores que su mínimo. Una función puede tener varios máximos y mínimos, iguales o no; ejemplos:

$$y = \operatorname{sen} x;$$
$$y = x \cdot \operatorname{sen} x.$$

La función:

$$y = f(x) = x + \frac{1}{x}$$

tiene un único máximo y un único mínimo relativos, pero el máximo es menor que el mínimo (figura 97).

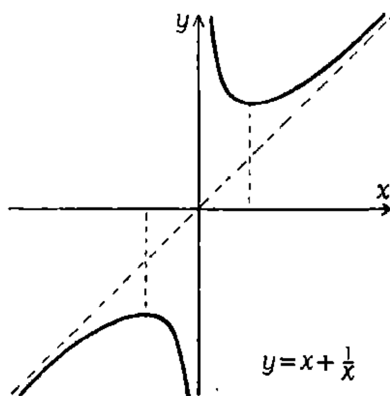


Fig. 97.

Los máximos y los mínimos relativos se llaman *extremos relativos*. Cuando no haya lugar a dudas, omitiremos la palabra relativo.

NOTA: En todo intervalo cerrado donde $f(x)$ es continua, existe un máximo y un mínimo absolutos (§ 26-5); en cambio, pueden no existir máximos y mínimos relativos, como sucede, por ejemplo, en las funciones monótonas. Sin embargo, es claro que se verifica:

Si el máximo o el mínimo absoluto lo alcanza la función en un punto interior al intervalo, y no en los extremos, ese valor es también máximo o mínimo relativo.

3. Condición necesaria de máximo o de mínimo. — Si la función tiene en x_0 un máximo o mínimo relativo, y la derivada en este punto existe y es finita, debe ser nula, puesto que si fuera positiva o negativa, la función sería creciente o decreciente en x_0.

Si la función $f(x)$ *es derivable, es decir, admite derivada finita, en el punto* x_0, *es condición necesaria para que en él tenga un máximo o mínimo, que sea* $f'(x_0) = 0$.

EJERCICIO: Mediante la condición necesaria, hállense los valores de x donde puede haber máximos o mínimos de $y = \operatorname{sen} x$, y de las funciones representadas gráficamente en el apartado anterior.

La condición $f'(x_0) = 0$, que geométricamente significa que la tangente es horizontal, es *necesaria pero no suficiente;* puede ocurrir que en un punto ella se verifique, sin que $f(x)$ tenga allí ni máximo ni mínimo, como lo prueba la función $y = x^3$, cuya derivada $3x^2$ se anula para $x = 0$, y sin embargo, la función es creciente (estrictamente) en $x = 0$.

NOTAS: 1. Obsérvese que la condición $f'(x_0) = 0$ se refiere solamente a las funciones que admiten derivada única finita en dicho punto; si la derivada es $+\infty$, ya hemos visto que $f(x)$ es creciente; y es decreciente si la derivada es $-\infty$. Si es $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha, hay un máximo relativo; y en el caso opuesto, un mínimo.

2. Cabe también la existencia de máximo o mínimo sin haber derivada finita ni infinita.

EJEMPLOS: 1. La función $y = x . \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$, admite en el punto $x = 0$ dos derivadas distintas, a la derecha y a la izquierda, a saber $+\pi/2$, $-\pi/2$. En efecto, para $x = 0$ es $y = 0$, y tenemos

$$\frac{k}{h} = \frac{h . \operatorname{arc\,tg}\,(1/h)}{h} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{h};$$

si $h \to 0$ por la izquierda, la tangente $1/h$ de k/h tiende a $-\infty$, y el arco tiende a $-\pi/2$; si $h \to 0$ por la derecha, la tangente tiende a $+\infty$ y el arco tiende a $+\pi/2$.

No obstante ello, la función toma en $x = 0$ su valor mínimo, $y = 0$, pues para $x \neq 0$ es $y > 0$.

2. La función $y = g(x) = x^2 . \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ para $x \neq 0$, $g(0) = 0$, tiene derivada nula en $x = 0$, como vimos en § 30-8, y sin embargo oscila en cada uno de los lados de dicho punto.

3. La función $y = x^2 \varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ designa la función de DIRICHLET (§ 23-3, ej. 4), coincide con x^2 en todo punto racional, y con 0 en todo punto irracional. En el origen tiene y su valor mínimo (no estricto) $y = 0$, y existe derivada nula.

4. También $y = |x| . \varphi(x)$ tiene mínimo (no estricto), pero no existe derivada en $x = 0$, pues el cociente incremental oscila entre 0 y 1.

4. Determinación de máximos y mínimos. — Para buscar los máximos y mínimos de una función $f(x)$, comenzaremos por hallar los valores de x donde se anula la derivada primera, *resolviendo la ecuación*

[33-3] $$f'(x) = 0.$$

Tendremos un cierto número (finito o infinito) de raíces: x_1, x_2, x_3, ..., que podemos llamar *valores críticos*. En cada uno de ellos, la tangente es horizontal y *puede haber* máximo o mínimo.

Para ver en cada uno de ellos si hay extremo y de qué clase, tenemos tres criterios: 1º) estudiar directamente la variación de la función en el entorno del punto crítico; 2º) estudiar la variación de la derivada; 3º) formar la derivada de la derivada, o *derivada segunda* $f''(x) = D f'(x)$; cuando ésta existe y no se anula, entonces el problema queda resuelto como veremos.

He aquí, pues, tres criterios que conviene aplicar sucesivamente, pues el primero es de mayor alcance, ya que permite obtener máximos que escapan a los otros criterios, por presentarse en puntos donde no existe derivada en el entorno.

5. Criterio 1º: Variación de la función. — Si x_0 es un valor crítico, sustituyamos en la función $x = x_0 + h$; si para $|h|$ suficientemente pequeño es $f(x) \geqq f(x_0)$, resulta mínimo; si es $f(x) \leqq f(x_0)$, resulta máximo; si hay cambio de signo, y en un semientorno se verifica una de estas desigualdades, y al contrario en el otro, no hay extremo y tenemos un caso especial de punto de inflexión (§ 33-9).

EJEMPLOS: 1. Función $y = \operatorname{sen} x$. La ecuación $y' = \cos x = 0$ tiene las infinitas raíces (valores críticos) $x = \pi/2 + n\pi$. Para n par, es decir, $x = \pi/2 + 2k\pi$, es $y = 1$, y como en todos los demás puntos es $y < 1$, en cada uno de aquéllos hay un máximo relativo, que también es absoluto. Para n impar, es decir, $x = \frac{1}{2}\pi + (2k+1)\pi$, se ve en la misma forma que hay mínimos.

2. $y = (1 + x^2)^{-1}$. La ecuación $y' = -2x(1+x^2)^{-2} = 0$ tiene la única raíz $x = 0$. Para $x = 0$ es $y = 1$; y para $x \neq 0$ es $y < 1$; luego, en el punto $x = 0$ hay un máximo relativo, que en este caso es también absoluto.

3. Función de CAUCHY $y = e^{-1/x^2}$.

Para $x = 0$ no está definida; pero el *verdadero valor* (§ 25-3) es $y = 0$; para $x \neq 0$, la potencia es positiva; luego, completada la función, para $x = 0$ hay un mínimo relativo, que también es absoluto.

6. Criterio 2º: Variación de la derivada primera. — TEOR.: *Si al crecer x pasando por el valor x_0, la derivada $f'(x)$ pasa (en un entorno de x_0) de:*

a) negativa a positiva, hay mínimo en el punto $x = x_0$;

b) positiva a negativa, hay máximo en el punto $x = x_0$;

c) positiva a positiva o negativa a negativa, no hay extremo.

Consideremos el caso *a*). En un cierto entorno, interior al del enunciado, completado con sus extremos, la función tiene un mínimo absoluto, por el teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS (§ 26-5). Como este mínimo no puede estar a la izquierda de x_0 (por ser $f(x)$ decreciente allí), ni tampoco a la derecha

(por ser $f(x)$ creciente), dicho mínimo absoluto en el entorno, o sea mínimo relativo de $f(x)$, es *precisamente* $f(x_0)$. Análogamente se considera el caso *b*). En el caso *c*) no puede haber extremo, pues la función es monótona en un entorno de x_0.

EJEMPLOS: 1. Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 2.$$

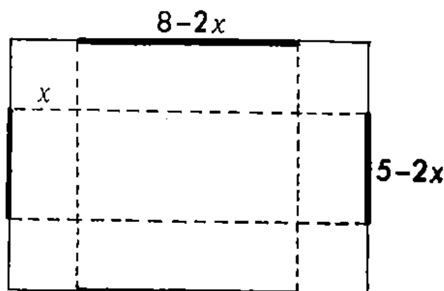


Fig. 98.

Como la derivada $f'(x) = x^2 - 2x$ existe para todo x, podemos limitarnos a los valores que la anulan (valores críticos), que son: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Como $y = x^2 - 2x$ representa una parábola de eje vertical dirigida hacia arriba (por ser positivo el coeficiente de x^2), se presenta el caso *b*) en x_1 y el caso *a*) en x_2; luego, hay un máximo en $x_1 = 0$, cuyo valor es $f(0) = 2$, y un mínimo en $x_2 = 2$, cuyo valor es $f(2) = 2/3$.

2. Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$y = f(x) = x^2 - 2x + 3,$$

El valor de x que anula la derivada:

[33-4] $$f'(x) = 2x - 2,$$

es $x_1 = 1$. Como [33-4] representa una recta de coeficiente angular positivo, se presenta el caso *a*), y por consiguiente, hay un mínimo en $x = 1$, cuyo valor es: $f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$.

Este resultado se obtiene también por el criterio 1º, observando que la función dada representa una parábola de eje vertical, dirigida hacia arriba, cuyo vértice tiene las coordenadas 1; 2.

3. Con un rectángulo de lados 5 y 8 dm construir una caja de capacidad máxima.

Llamando x a la altura, la base tiene las dimensiones $5 - 2x$, $8 - 2x$ (fig. 98), y el volumen es:

$$V = (5 - 2x)(8 - 2x)x = 4x^3 - 26x^2 + 40x,$$
$$V' = 12x^2 - 52x + 40.$$

Dividiendo por 4 queda:

$$3x^2 - 13x + 10 = (x - 1)(3x - 10),$$

es decir: las raíces son $x = 1$, $x = 10/3$.

La índole del problema exige que los cuadrados recortados en los ángulos tengan la dimensión $x < 5/2$, pues para $x = 5/2$ resulta volumen nulo. Como para $x = 0$ el volumen es también nulo, dicho volumen debe alcanzar por lo menos un máximo entre 0 y 5/2; luego, hay una solución, y sólo una: $x = 1$, que da una caja de volumen máximo: $V = 3.6 = 18$ dm³. Esto mismo nos indica el cambio de signo de V'. Generalícese el problema para un rectángulo de dimensiones $a > b$. Discusión.

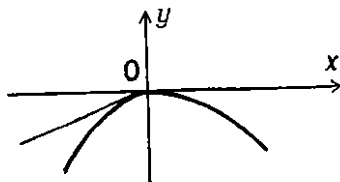


Fig. 99.

NOTAS: 1. Obsérvese que no hemos exigido la anulación de la derivada en el punto, ni siquiera su existencia. He aquí un ejemplo de máximo sin derivada; sea la función (fig. 99):

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2 - e^{1/x}} & \text{para} \quad x \neq 0. \\ y = 0, & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

que carece de derivada única en el punto 0, siendo continua en él. En cualquier otro punto es:

$$y' = \frac{2 - e^{\frac{1}{x}}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{\left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right)^2},$$

que tiende a 1/2 a la izquierda del punto 0, conservándose positiva; y tiende a 0, conservándose negativa, a la derecha de 0; luego, siendo:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < 0,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x > 0,$$

el valor $f(0) = 0$ es un máximo, como también se ve con el criterio 1º.

La curva tiene un punto anguloso, siendo 1/2 y 0 los coeficientes angulares de las tangentes, por ser éstos los valores de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto 0.

2. Este 2º método no da aquellos máximos o mínimos en que la derivada cambia infinitas veces de signo a cada lado.

EJEMPLO 4. $y = x^2\left(2 + \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right)$, $y' = 2x\left(2 + \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right) - \cos \dfrac{1}{x}$.

La derivada cambia infinitas veces de signo en el entorno del punto $x = 0$, donde hay un mínimo estricto.

7. Criterio 3º: Mediante la derivada segunda. — Cuando en el punto crítico x_0 existe derivada de la derivada o derivada segunda, y no se anula, hay extremo y su signo indica de qué clase:

Si $f''(x_0) > 0$, es $f(x_0)$ *mínimo relativo;*

si $f''(x_0) < 0$, es $f(x_0)$ *máximo relativo.*

En efecto, en el primer caso, $f'(x)$ es creciente en el punto x_0; luego pasa de negativa a positiva, y según el criterio anterior, hay mínimo; en el segundo caso, $f'(x)$ es decreciente y pasa de positiva a negativa; luego, hay máximo.

Este nuevo criterio no sería aplicable a las funciones de los ejemplos anteriores ni a la función de CAUCHY, pero lo es en casos más sencillos.

EJEMPLO: En el trinomio de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$, el estudio directo mediante la formación de un cuadrado, como en Álgebra elemental, conduce en seguida al resultado. No obstante, apliquemos las derivadas:

$$y' = 2ax + b = 0, \qquad y'' = 2a,$$

y entonces, en el punto $x = -b/2a$ hay máximo relativo (que también es absoluto) si es $a < 0$, y mínimo si es $a > 0$.

NOTAS: 1. Si la derivada segunda se anula en un valor crítico, nada puede afirmarse en consecuencia; puede haber mínimo, o máximo, o ni una ni otra cosa, como lo prueban los ejemplos:

$$y = x^4, \qquad y = -x^4, \qquad y = x^3,$$

para el valor crítico $x_0 = 0$, y cuyo estudio no ofrece dificultades mediante el criterio 2º, de la derivada primera.

2. Cuando la derivada segunda se anula, pueden determinarse los máximos y mínimos mediante un estudio de las derivadas de orden superior (§ 40-3).

Si $y'(x_0) = y''(x_0) = 0$, pero $y'''(x_0) \neq 0$, $y''(x)$ cambia de signo, $y'(x)$ no cambia; luego, $y(x)$ es creciente o decreciente.

Si $y'''(x_0) = 0$, pero $y^{IV}(x_0) < 0 (> 0)$, resulta máximo (mínimo).

En general: *Hay extremo si la primera derivada no nula es de orden par; máximo o mínimo, según sea* < 0 *ó* > 0.

8. **Simplificaciones en el cálculo de máximos y mínimos.** — Algunas observaciones facilitan el cálculo de máximos y mínimos:

1. Si la función $y = f(x)$ alcanza un máximo relativo en el punto x_0, la función $-f(x)$ toma un valor mínimo, y viceversa. Lo mismo sucede con la función recíproca $1 : f(x)$, suponiendo que $f(x)$ no se anula.

2. Si $\varphi(y)$ es *creciente*, y la función $y = f(x)$ toma un máximo o mínimo en el punto x_0, también $\varphi(y)$ toma en este punto un máximo o mínimo; pues siendo $y_0 = f(x_0)$ en el caso de máximo, mayor que los valores de y a uno y otro lado de x_0, también $\varphi(y_0)$ es mayor que los valores $\varphi(y)$ correspondientes a dichos valores de x.

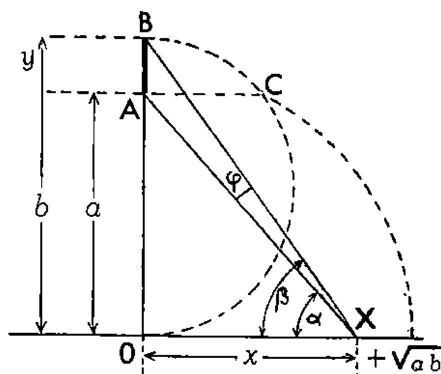


Fig. 100.

En cambio, si $\varphi(y)$ es decreciente, toma valores máximo o mínimo en los puntos en que y alcanza mínimo o máximo, respectivamente.

Así, por ejemplo, en el primer cuadrante, los máximos y mínimos de la función $\operatorname{sen} f(x)$ son los de $f(x)$.

Estas observaciones permiten simplificar los problemas, como veremos a continuación.

EJEMPLO: He aquí un problema importante para la mejor visualidad de longitudes verticales.

Determinar el punto del suelo desde el cual se ve un segmento vertical AB (fig. 100) bajo ángulo máximo:

$$\varphi = OXB - OXA = \beta - \alpha$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta . \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(b-a)x}{x^2 + ab}.$$

En vez de despejar φ para calcular su máximo, observemos que siendo $\operatorname{tg} \varphi$ mayor o menor, según sea mayor o menor el arco, será máximo cuando lo sea su tangente, y ésta será máxima cuando sea mínima su recíproca. Prescindiendo del factor positivo $b - a$, basta, pues, investigar los mínimos de la función:

$$x + a b x^{-1}.$$

Anulando la derivada $1 - ab/x^2 = 0$, resulta: $x = \pm \sqrt{ab}$.

La solución es, pues, la media geométrica entre a y b. La índole del problema indica que se trata de máximo, pues el ángulo comienza siendo nulo cuando X está en O, va creciendo y luego decrece al alejarse X, llegando a ser el ángulo tan pequeño como se quiera. Las dos soluciones dan dos puntos simétricos respecto del punto O; su construcción está efectuada en la figura 100.

9. Concavidad. Puntos de inflexión. — Dada una curva de ecuación,

$$y = f(x),$$

el estudio de la función derivada segunda $f''(x)$ nos muestra ante todo cuándo la concavidad o "hueco" de la curva está hacia arriba o hacia abajo.

Consideremos un punto M de la curva donde exista tangente y no sea paralela al eje O y. Diremos que la curva es *cóncava hacia las y positivas en* M, si todos los puntos de la curva, suficientemente próximos a M, están situados por arriba de la tangente t.

En tal caso, si el punto M describe esta curva en el sentido

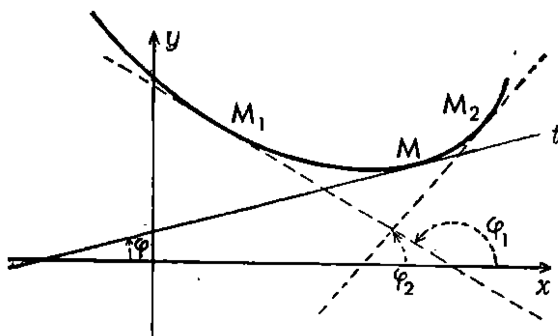


Fig. 101.

de las x crecientes, es decir, en el sentido M_1 M M_2 de la figura, la pendiente o coeficiente angular tg φ de la recta tangente puede *no aumentar* (§ 33-6, ej. 4), pero en $0 < |h| < \delta$ se conservará

$$f(a+h) - f(a) - h f'(a) > 0,$$

y por tanto en $h = 0$ debe tener mínimo, para lo que es suficiente (§ 33-4 á 7) que $f'(a+h) - f'(a)$ se anule con cambio de signo de — a +, y si existe la derivada, será $\geqq 0$:

$$D f'(x) = f''(x) \geqq 0.$$

Análogamente se define la concavidad hacia las y negativas, y se llega (si existe derivada segunda) a la condición necesaria:

$$f''(x) \leqq 0.$$

El razonamiento se puede invertir, pero como debemos basarnos en § 33-1, las *condiciones suficientes* serán:

$f''(x) > 0$ para la concavidad hacia $y > 0$;
$f''(x) < 0$ „ „ „ „ $y < 0$.

EJEMPLO: Para

$$y = \text{sen}\, x$$

se tiene:

$$y' = \cos x, \qquad y'' = -\text{sen}\, x.$$

Entonces, $y'' < 0$ en $0 < x < \pi$, y la concavidad de la sinusoide está dirigida hacia las y negativas en dicho intervalo abierto.

En cambio, $y'' > 0$ en $\pi < x < 2\pi$, y la concavidad es hacia las y positivas.

Se llama *punto de inflexión* todo punto M de una curva en el cual ésta cambia el sentido de su concavidad. En la curva de la figura 102, la concavidad está dirigida hacia las y positivas a la *izquierda* de M, y hacia las y negativas a la *derecha*. Lo contrario ocurre en el punto M'. Tanto M como M' son puntos de inflexión.

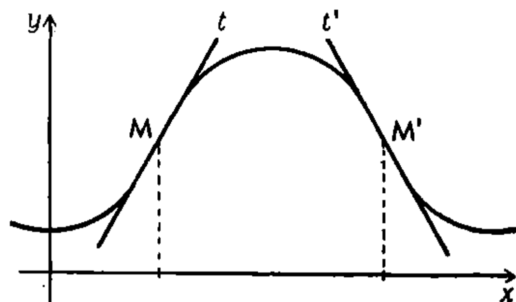


Fig. 102.

La definición de sentido de la concavidad muestra que en un punto de inflexión *la curva atraviesa a su tangente*.

Como en un punto de inflexión la concavidad cambia de sentido, si existe la derivada segunda debe anularse:

$$f''(x_0) = 0,$$

y cambiar de signo cuando x crece pasando por x_0.

Tenemos, en resumen:

a) $f''(x_0) > 0$, concavidad hacia arriba;

b) $f''(x_0) < 0$, concavidad hacia abajo;

c) $f''(x_0) = 0$: $\begin{cases} c_1) \text{ cambia de signo: punto de inflexión;} \\ c_2) \text{ pasa de } + \text{ á } + \text{ : concavidad hacia arriba;} \\ c_3) \text{ pasa de } - \text{ á } - \text{ : concavidad hacia abajo.} \end{cases}$

Las funciones: $y = x^3$, $y = x^4$, $y = -x^4$, con $x_0 = 0$ ilustran los casos c_1) c_2) y c_3).

Ejercicio: Estúdiese en $x = 0$ la función $y = x^4$ sen $\dfrac{1}{x}$.

Ejemplo: Para la curva $y = 1 : (1 + x^2)$, la segunda derivada, prescindiendo de factores positivos, es $3x^2 - 1$, que cambia de signo en los puntos $x = \pm \sqrt{3}/3$; luego, son de inflexión.

Con lo que vimos en este apartado, podemos ilustrar geométricamente las condiciones de máximo y de mínimo. La figura 103 se refiere al caso en que la derivada segunda no se anula en los valores críticos (§ 33-7).

10. Estudio de la variación. — Al efectuar el estudio local y general de la variación de una función: crecimiento o decrecimiento, extremos, sentido de la concavidad, etc., conviene determinar también el campo de existencia, y estudiar la continuidad, discontinuidades, posibles simetrías, etc.

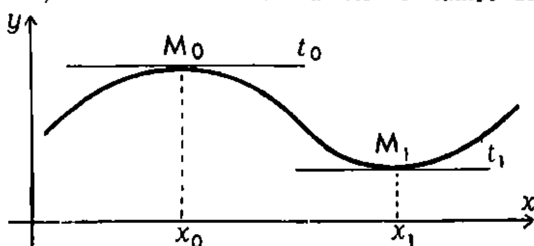


Fig. 103. Máximo [mínimo] en x_0 [x_1]: Tangente horizontal, $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$: concavidad hacia abajo, $f''(x_0) < 0$ [arriba, $f''(x_1) > 0$].

EJEMPLO: Variación de la función, importante en Cálculo de probabilidades:

$$y = f(x) = e^{-x^2}.$$

a) **La función está definida para todo valor de** x.

b) Como x está elevado a potencia par, resulta $f(x) = f(-x)$, es decir, $f(x)$, es una función par: la gráfica (fig. 104) es simétrica respecto al eje Oy.

c) La función es continua para todo valor x_0 de x. Esto resulta de la continuidad de la función exponencial y de la función potencial, pues:

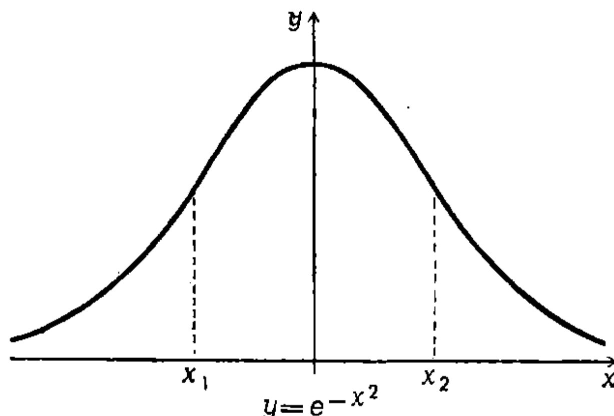


Fig. 104.

$y = e^u$, siendo: $u = -x^2$, y una función continua de una función continua es también continua (§ 25-7).

d) Se tiene: $f'(x) = -2\,x\,e^{-x^2}$;

si $x < 0$, resulta $f'(x) > 0$, y la función es creciente;

si $x > 0$, „ $f'(x) < 0$, „ „ „ „ decreciente.

e) La derivada primera se anula solamente para $x = 0$, y como en ese punto pasa de positiva a negativa, hay un máximo en $x = 0$, cuyo valor es $f(0) = 1$.

f) Como $-x^2$ es siempre $\leqq 0$, resulta $f(x) \leqq e^0 = 1$, y entonces, el único máximo relativo hallado es también el máximo absoluto de la función.

g) Las abscisas de los puntos de inflexión se obtienen considerando la derivada segunda:

$$f''(x) = (-2 + 4\,x^2)\,e^{-x^2},$$

que se anula cuando $-2 + 4x^2 = 0$, es decir, para

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

y cambia de signo en estos puntos (fig. 104).

h) Para $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, es $f''(x) > 0$: concavidad hacia arriba;

„ $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, es $f''(x) < 0$: „ „ abajo;

„ $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, es $f''(x) > 0$: „ „ arriba.

i) Cuando $x \to +\infty$

$$f(x) = e^{-x^2} = 1/e^{x^2} \to 0,$$

y lo mismo para $x \to -\infty$. Luego, la curva se acerca indefinidamente tanto como se quiera, al eje x, hacia ambos lados.

Ejercicios

1. Demostrar que si $f'(x_0) = +\infty$, es $f(x)$ creciente en x_0.

2. *a*) Demostrar, sin utilizar derivadas, que las funciones

$$f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2}; \quad g(x) = x\,\frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}, \quad \cdot\, g(0) = 0,$$

tienen un mínimo en $x_0 = 0$. *b*) Hallar la derivada, o derivadas laterales, en $x = 0$.

3. Estudiar el comportamiento en $x = 0$ de la función:

$$f(x) = x^3 \operatorname{sen}(1/x) \quad \text{para} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Para resolver los ejercicios 4 á 13, es conveniente estudiar la variación de la derivada primera (§ 33-6).

4. Máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $y = x/(x^2+1)$, *b*) $y = \sqrt{x^2+1}/(x^2+x+4)$,

c) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$. *d*) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$.

5. De todos los rectángulos de igual perímetro $2p$, hallar el de área máxima.

6. En la función $y = x^m(a-x)^n$, (m y n naturales, $a > 0$): *a*) Hallar los valores críticos; *b*) Estudiar el comportamiento en ellos, según los valores de m y n.

7. Determinar el rectángulo inscrito en la elipse de semiejes a y b, de lados paralelos a estos ejes y área máxima.

8. La resistencia a la flexión de una viga de sección rectangular, es directamente proporcional a la base b y al cuadrado de la altura h de dicho rectángulo. Hallar la viga de sección rectangular con máxima resistencia que puede sacarse de un tronco de árbol de diámetro d.

9. Hallar la altura del cilindro circular recto de máximo volumen que puede inscribirse en un cono circular recto dado, de altura h.

10. ¿Qué longitud debe darse al pie vertical de una lámpara L, para obtener máxima iluminación I en un punto P de la mesa en que se apoya a distancia l de él? [$I = (k \cos\alpha)/d^2$; k, constante; α, ángulo de LP con la vertical; $d = $ LP].

11. Determinar el segmento mínimo entre todos los que pasan por un punto (a, b) y están limitados por los ejes de coordenadas.

12. Calcular la longitud máxima que puede darse a una viga, para pasarla horizontalmente de una calle de anchura a, a otra perpendicular de anchura b.

13. Máximos y mínimos de las funciones:
a) $y = x.e^{-x}$; b) $y = x^a \ln x$, $(a > 0)$; c) $y = (e^x - x)/(e^x + x)$.

Para los ejercicios 14 y 15 conviene utilizar la derivada segunda (§ 33-7).

14. Circunscribir a una esfera de radio R un cono circular de superficie lateral mínima.

15. La energía entregada en la unidad de tiempo por una pila de fuerza electromotriz E y resistencia interna R, en un circuito de resistencia x, es $E^2 x/(R + x)^2$. Hallar el valor de x para el cual la energía es máxima.

16. Discutir concavidad e inflexiones de las curvas:
a) $y = (x - 1)^4 (x + 2)^3$; b) $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$; c) $y = e^{-2x} \operatorname{sen} x$.

17. Estudiar la variación de la función $y = f(x) = 1 : (1 + x^2)$, y dibujar su gráfica, curva de GAETANA AGNESI, llamada por su autora curva *versiera*.

§ 34. LA DIFERENCIAL

1. **Definición de diferencial y expresión analítica.** — Vimos (§ 30-2) que si la función $y = f(x)$ admite derivada finita en un punto, su incremento puede expresarse así:

[34-1] $$\Delta y = f'(x) . \Delta x + \omega . \Delta x,$$

siendo ω un infinitésimo (§ 24-3) para $\Delta x \to 0$. Al primer término (parte principal del incremento si $f'(x) \neq 0$) se lo llama diferencial de y, y se escribe:

[34-2] $$d y = f'(x) . \Delta x.$$

DEF.: *Diferencial en el punto x de una función derivable en ese punto, es el producto de la derivada por el incremento arbitrario de la variable.*

En particular, considerada x como función de x, por ser su derivada 1, será: $d x = \Delta x$; luego, es indiferente poner Δx, o bien $d x$, siendo, por tanto:

[34-3] $$d y = y' \, d x,$$

es decir: *la diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.*

Llamaremos a [34-3] *expresión analítica* de la diferencial, para distinguirla de la *definición* [34-2].

Toda descomposición del tipo $\Delta y = a \Delta x + \omega . \Delta x$ en una parte proporcional a Δx y un infinitésimo de orden superior, coincide con [34-1], pues dividiendo por Δx, resulta que el cociente incremental tiende hacia a; luego, es $a = y'$. La definición de $d y$ como *parte principal* de Δy, se llama de STOLZ, aunque es de THOMAE. Así, diremos que una función es diferenciable en un punto, si en él Δy es función lineal homogénea de Δx, a menos de un infinitésimo de orden superior a Δx; esta definición es inmediatamente generalizable al caso de varias variables independientes,

como se verá en el volumen II (§ 66-4). En el caso de una variable, la función es derivable en el punto cuando, y sólo cuando, en él es diferenciable en el sentido de STOLZ-THOMAE, según acabamos de ver.

El incremento $\mathrm{d}\,x$ o $\Delta\,x$ puede ser cualquiera; y sea constante o variable, tienda o no a cero, se verifica:

[34-4] $$y' = \mathrm{f}'(x) = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}.$$

Esta igualdad nos permite considerar al primer miembro de [34-4] no sólo como un cociente de diferenciales, sino como una *nueva expresión o notación de la derivada,* que tiene la ventaja de poner en evidencia no sólo la función que se deriva, sino también la variable respecto a la cual se deriva *.

La expresión $\mathrm{f}'(x)$ tiene en cambio la ventaja de que permite expresar cómodamente los valores numéricos de la función derivada: ejemplo: $\mathrm{f}'(1)$, $\mathrm{f}'(3)$, etc.

Fijados un valor x_0 para x, y un valor h para el incremento $\Delta\,x = \mathrm{d}\,x$, la diferencial toma un valor numérico que indicaremos con

$$[\mathrm{d}\,y]_{\,x = x_0;\ \Delta x = h}.$$

EJEMPLO: Calcular la diferencial de la función

$$y = \mathrm{f}(x) = x^2 + 3\,x.$$

para $x = 1$ y $\Delta\,x = \mathrm{d}\,x = 0{,}2$.

$$\mathrm{f}'(x) = 2\,x + 3 \quad \therefore \quad \mathrm{f}'(1) = 5,$$

y entonces:

$$[\mathrm{d}\,y]_{\,x = 1,\ \Delta x = 0{,}2} = 5 . 0{,}2 = 1.$$

2. Representación geométrica. — Fijado x, consideremos tres variables:

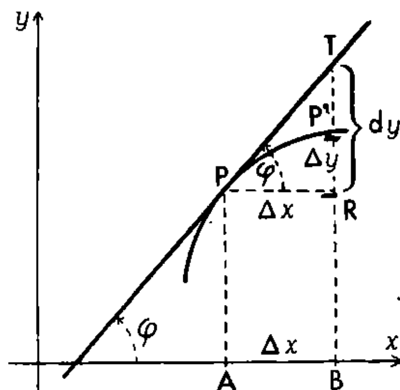


Fig. 105.

1º El incremento $\Delta\,x$, de la variable independiente, que coincide con su diferencial.

2º El incremento $\Delta\,y$ de la función.

3º La diferencial $\mathrm{d}\,y$ de la función.

Observando en la figura 105 que $\mathrm{R\,T} = \mathrm{P\,R}\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi = \Delta\,x . y'$, resulta la siguiente representación:

$$\mathrm{d}\,x = \Delta\,x = \mathrm{A\,B},$$
$$\Delta\,y = \mathrm{R\,P'},\ \mathrm{d}\,y = \mathrm{R\,T}.$$

Es decir, la diferencial de

* Las notaciones y', $\mathrm{f}'(x)$ son de LAGRANGE; la $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{f}(x)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{f}(x)$, de LEIBNIZ, quien usó el primero de estos símbolos para indicar simbólicamente el paso al límite $\lim\,(\Delta y/\Delta x)$, cambiando las Δ por d.

una función en un punto es el incremento de la ordenada de la tangente en ese punto.

No debe, pues, confundirse Δy con $\mathrm{d}\, y$, que solamente son idénticos cuando la curva coincide con la tangente, es decir, cuando la función es lineal.

La expresión analítica de la diferencial $\mathrm{d}\, y = y'_0 . \mathrm{d}\, x$ resulta así coincidente, "en pequeño" y alrededor de x_0, con la ecuación incremental de la tangente (considerada como recta que pasa por un punto): $y - y_0 = y'_0 . (x - x_0)$, con sólo sustituir incrementos por diferenciales.

NOTA: No es inútil aclarar que la citada representación geométrica de la diferencial, válida en coordenadas cartesianas, no lo es en polares. En efecto, la curva $\rho = \rho_0 + \mathrm{d}\, \rho = \rho_0 + \rho'_0 \mathrm{d}\, \omega$ es una espiral de ARQUÍMEDES, tangente a la curva dada en (ρ_0, ω_0).

3. **Relación con el incremento.** — Si $\Delta x \to 0$ y es $y' \neq 0$, los infinitésimos $\mathrm{d}\, y$ e Δy son equivalentes, es decir:

$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}\, y} = \frac{\Delta y}{y' . \Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} : y' \to y' : y' = 1.$$

Esto resulta también de la expresión [34-1] del incremento, cuyo segundo término:

$$\delta = \omega . \Delta x,$$

es un infinitésimo de orden superior a Δx. Lo llamaremos *término complementario del incremento*, y tendremos para éste:

[34-5] $$\Delta y = \mathrm{d}y + \delta.$$

En la figura 105 es $\delta < 0$, y está representado por el segmento T P′.

Si $y' = 0$, es $\mathrm{d}\, y = 0$, y hay que comparar Δy con diferenciales de orden superior (§ 38-2).

4. **Reglas de diferenciación.** — Puesto que la diferencial sólo difiere de la derivada en el factor $\mathrm{d}\, x$ arbitrario, todas las reglas de derivación son válidas para las diferenciales:

$$\mathrm{d}\, C = 0, \quad \mathrm{d}\, (a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k) = a_1 \mathrm{d}\, u_1 + \ldots + a_k \mathrm{d}\, u_k,$$
$$\mathrm{d}\, (u\, v\, w) = v . w . \mathrm{d}\, u + u . w . \mathrm{d}\, v + u . v . \mathrm{d}\, w,$$
$$\mathrm{d}\, \frac{u}{v} = \frac{v\, \mathrm{d}\, u - u\, \mathrm{d}\, v}{v^2}.$$

5. **Diferencial de una función de función.** — Vimos (§ 32-3) que la función de función

$$y = \mathrm{f}(u), \quad \text{siendo} \quad u = \mathrm{g}(x),$$

tiene la derivada $y' = \mathrm{f}'(u) . \mathrm{g}'(x)$. Por consiguiente, la diferencial será:

$$\mathrm{d}\, y = y' \mathrm{d}\, x = \mathrm{f}'(u) . \mathrm{g}'(x)\, \mathrm{d}\, x,$$

pero como $\mathrm{g}'(x)\, \mathrm{d}\, x = \mathrm{d}\, u$, queda:

[34-6] $$\mathrm{d}\, y = \mathrm{f}'(u)\, \mathrm{d}\, u,$$

es decir: *la expresión analítica de la diferencial de* $y = \mathrm{f}(u)$

es la misma, aunque u no sea la variable independiente. (*Invariancia de la expresión analítica de la diferencial*) *.

Se tienen así las *fórmulas de diferenciación*; por ejemplo:

$$\mathrm{d} \ln u = \frac{\mathrm{d}u}{u} \quad ; \quad \mathrm{d}u^{\alpha} = \alpha u^{\alpha-1} \mathrm{d}u \quad ; \quad \mathrm{d}a^{u} = a^{u} \ln a \, \mathrm{d}u .$$

En cambio, no es cierto que sea $\mathrm{d}y = \mathrm{f}'(u) . \Delta u$, pues $\Delta u \neq \mathrm{d}u$, ya que u no es la variable independiente.

Observemos que con la notación introducida en § 34-1, para la derivada como cociente de diferenciales, la regla de derivación de una función de función toma la forma:

[34-7] $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

La invariancia de la expresión analítica facilita el cálculo de diferenciales, pues al aplicar las fórmulas de diferenciación no interesa si una variable es la independiente o una función cualquiera de ella.

EJEMPLOS: 1. $\mathrm{d}(\operatorname{sen}^2 x) = 2 \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}(\operatorname{sen} x) =$
$= 2 \operatorname{sen} x \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} 2x \, \mathrm{d}x.$

2. $\mathrm{d}(\cos e^{-3x}) = - \operatorname{sen} e^{-3x} \, \mathrm{d} e^{-3x} = - \operatorname{sen} e^{-3x} . e^{-3x} . \mathrm{d}(-3x) =$
$= 3 e^{-3x} \operatorname{sen} e^{-3x} \, \mathrm{d}x.$

3. Calcular la diferencial de u, siendo $u^2 = a^2 \cos 2t$.
Tomando diferenciales de ambos miembros, se tiene:
$$2u \, \mathrm{d}u = - a^2 \operatorname{sen} 2t . 2 \, \mathrm{d}t$$
$$\therefore \quad \mathrm{d}u = (- a^2 \operatorname{sen} 2t \, \mathrm{d}t)/u = - a \operatorname{sen} 2t / \sqrt{\cos 2t}.$$

6. Tangente y normal a una curva plana dada en forma paramétrica. — Consideremos, en una curva plana definida por las ecuaciones paramétricas,

[34-8] $$x = \mathrm{x}(t), \qquad y = \mathrm{y}(t),$$

un punto $t = t_0$:

$$x_0 = \mathrm{x}(t_0), \qquad y_0 = \mathrm{y}(t_0) .$$

La ecuación de la tangente en él es (§ 31-1):

$$y - y_0 = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)_0 \, (x - \mathrm{x}_0),$$

y como en el punto de tangencia $\mathrm{d}y = y'_0 \, \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x = x'_0 \, \mathrm{d}t$ se obtiene la forma simétrica:

[34-9] $$\frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{x - x_0}{x'_0}$$

si $y'_0 \neq 0 \neq x'_0$. En los puntos en que se anula y' pero no x' la tangente es paralela al eje x (y su ecuación es $y = y_0$); si es en cambio $x'_0 = 0$ pero $y'_0 \neq 0$, la tangente es paralela al eje y (y su ecuación es $x = x_0$). Si se anulan ambas derivadas puede no haber tangente, y si la hay no queda determinada por ellas.

Diremos que el arco es *regular*, cuando para un cierto parámetro t en cada punto existen las derivadas (§ 30-5) de x, y, y no son nulas ni infinitas simultáneamente en un mismo punto.

En todo arco regular existe tangente en cada punto.

* Esta invariancia *no se conserva en las diferenciales sucesivas*, como veremos (§ 38-2).

Puede ocurrir que en un punto de un arco regular se anulen simultáneamente las derivadas de x(t) y de y(t), pero puede hallarse un cierto parámetro t' en que esto no ocurra.

EJEMPLO 1: Aparece como singular el caso trivial $x = h t^3$, $y = k t^3$ (recta por O), pero basta tomar $t' = t^3$ para que aparezca la regularidad en el origen.

Siendo en todo caso función de t el cociente $\Delta y . \Delta x$, bastará ver si tiene límite para asegurar si hay o no tangente. Es un problema de límite indeterminado del tipo 0/0 (§ 36-1).

Para la ecuación de la normal obtenemos análogamente de la ecuación

$$y - y_0 = - \frac{1}{(dy/dx)_0} (x - x_0)$$

la forma simétrica:

[34-10] $$(x - x_0) . x'_0 + (y - y_0) . y'_0 = 0.$$

EJEMPLO 2: *Cicloide.* — Es la curva engendrada por un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta sin resbalar, es decir, de modo que cada segmento de recta es igual al arco correspondiente.

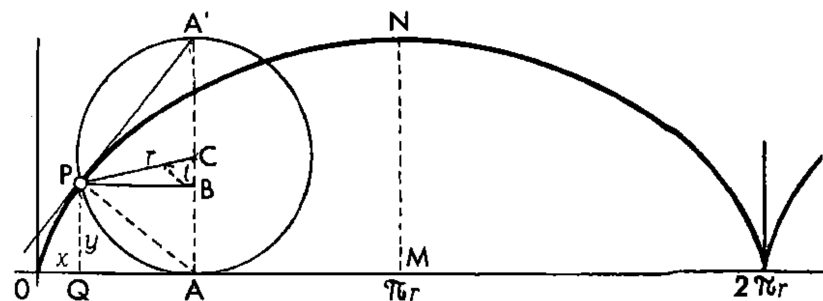


Fig. 106.

Tomando como parámetro el ángulo t que forma con la vertical el radio CP, el arco AP es $r t$, y resulta de la simple inspección de la figura 106:

$$x = r t - r \text{ sen } t = r(t - \text{sen } t) \qquad d x = r(1 - \cos t) d t$$
$$y = r - r \cos t = r(1 - \cos t) \qquad d y = r \text{ sen } t \, d t,$$

de donde $dy/dx = \text{ctg } \frac{1}{2} t$; luego, la tangente es la recta PA′, que pasa por el punto opuesto al de contacto de la circunferencia. En efecto, el ángulo que forma con el diámetro AA′ es $\frac{1}{2} t$; luego, el ángulo con el eje x es el complementario. La normal es precisamente PA.

En particular, la tangente en O es la perpendicular a la recta base.

7. **Tangentes a las curvas planas en coordenadas polares.** — La multiplicidad de argumentos que corresponden a cada rayo de origen O permite expresar por una función uniforme $\rho = f(\omega)$ curvas no uniformes. Tales son, por ejemplo, las espirales

de ARQUÍMEDES	*logarítmica*	*hiperbólica*
$\rho = a \omega$,	$\rho = k a^{\omega}$,	$\rho = a + \frac{b}{\omega}$.

Las fórmulas $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \operatorname{sen} \omega$, donde $\rho = f(\omega)$, expresan paramétricamente la curva, y sus tangentes están determinadas por sus pendientes:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho \cos \omega + \rho' \operatorname{sen} \omega}{-\rho \operatorname{sen} \omega + \rho' \cos \omega} = \frac{\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \mu}{1 - \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \mu}, \text{ siendo } \operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'}$$

La inclinación de la tangente sobre el eje x es, según la fórmula, $\omega + \mu$, y por tanto, μ es el ángulo (fig. 107) que forma la tangente con el radio vector. Viene, pues, determinado por la fórmula anterior, o bien:

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\rho'}{\rho} = D(\ln \rho),$$

no siendo éste el único caso en que la derivada logarítmica desempeña en coordenadas polares análogo papel al de la derivada ordinaria en cartesianas, así como los radios polares sustituyen a las ordenadas. La ecuación polar de la tangente en el punto (ω_0, ρ_0) se obtiene en la forma usual partiendo de la distancia $p = \rho \operatorname{sen} \mu$.

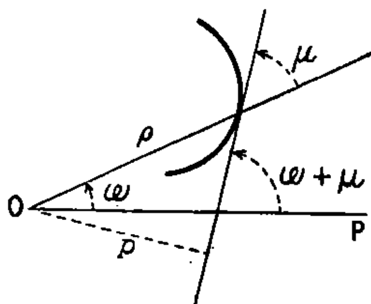


Fig. 107.

Ejercicios

1. Diferenciales de las funciones siguientes:

a) $y = \ln(1 - t^2)$; *b*) $y = \operatorname{arc\,tg} e^t$; *c*) $y = \operatorname{arc\,sen} x^2$;
d) $y = \operatorname{arc\,sen}^2 t$; *e*) $y = x^{\operatorname{sen} x}$; *f*) $y = \operatorname{ch} e^{\sqrt{x}}$.

2. Representar $y = x^2$ y su diferencial para:

$$\begin{cases} x = 1 \\ \Delta x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ \Delta x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ \Delta x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \Delta x = 1. \end{cases}$$

3. Llevar Δy a la forma [34-5], calculando δ, en las funciones $y = x^3 + x^2$, $y = 1/x$.

4. Derivada de $\operatorname{tg} x$ respecto a $\operatorname{sen} x$.

5. ¿Cómo se determinan los puntos del plano desde los cuales la cicloide (§ 34-6, ej. 2) se ve bajo ángulo recto?

6. Escribir la ecuación de la tangente a la elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, y llevarla a la forma vista en el ejercicio 4 del § 32.

7. Probar que la espiral logarítmica $\rho = k.a^{\omega}$ corta a los radios vectores bajo ángulo constante.

Notas al capítulo VIII

I. Orígenes del Cálculo diferencial. — Los orígenes del Cálculo diferencial están estrechamente ligados al problema geométrico de la tangente a una curva, y al de los máximos y mínimos. Pedro Fermat (1601-65) descubre hacia 1629 un método para calcular los máximos y mínimos de funciones de una variable: se sustituye x por $x + h$, se igualan $f(x)$ y $f(x + h)$, se simplifica la igualdad suprimiendo términos comunes y dividiendo por h; se hace $h = 0$ y la ecuación permite despejar x. Por ejem-

plo, si la función es $x^2 + 2x$, escribiremos sucesivamente, con notaciones actuales:

$$(x + h)^2 + 2(x + h) = x^2 + 2x$$

$$2xh + h^2 + 2h = 0 \quad \therefore \quad 2x + 2 = 0, \quad x = -1.$$

Asoma en este artificio el concepto de cociente de incrementos y su valor límite para $h = 0$, esto es, la derivada; pero FERMAT no llegó a tener la idea de límite, y así resulta artificiosa su determinación de tangentes, que reduce a un problema de máximo.

En el problema de la tangente, RENATO DESCARTES (1596-1650) se preocupa exclusivamente de las curvas algebraicas, y en su inmortal *Geometría* (1637) determina la tangente en cada punto, imponiendo la condición de que la resultante (§ 15-3, *a*; § 42) de las ecuaciones de la curva y de la tangente tenga una raíz doble. Este método algebraico, llamado "de la cuerda nula", ha perdurado en la Geometría algebraica, conjuntamente con el infinitesimal de FERMAT, que pronto había de perfeccionarse, y que para las curvas no algebraicas es el único eficaz, salvo excepciones como la cicloide, cuyas tangentes pueden deducirse también por consideraciones cinemáticas. Tenemos así el tercero de los métodos para la determinación de tangentes, que parecen haber descubierto simultánea e independientemente DESCARTES, ROBERVAL y TORRICELLI hacia 1644.

Es verdad que estos problemas tienen remotos antecedentes en los griegos: tangentes a las cónicas y algunos problemas sencillos de extremos, pero ello no basta para remontar a entonces los orígenes del cálculo diferencial. No se sabe cómo llegó ARQUÍMEDES a la determinación de la tangente a la espiral de su nombre, resultado aislado expuesto en forma "apagógica" (ver Cap. XIII, nota I). La tangente se define como la recta que en la vecindad de un punto deja la curva de un solo lado, y entonces, *dada la presunta tangente*, se trata de demostrar ciertas desigualdades, lo que se hace con todo rigor.

Junto con esta variedad de métodos aparecen innumerables aportaciones al *problema de la tangente*; se persigue un procedimiento general, válido para todas las curvas, y cada matemático inventa uno distinto en apariencia, pero todos basados en el cálculo con infinitésimos: FERMAT (1630), DE SLUSE (1652), y más tarde TSCHIRNHAUS (1682), HUYGENS (1693), etc.

Cada país del continente dispara su flecha, sin dar plenamente en el blanco, gloria reservada a un teólogo inglés, aficionado a la matemática, el cual ideó la determinación de la tangente por el cociente de incrementos. Tal es la sencilla idea de BARROW (1630-77), que oscureció a todas las demás.

Fué el mismo BARROW quien en 1669 mostró, como veremos en § 50, que el problema de las tangentes se relaciona con el *problema del área* limitada por una curva, vinculándolo así con el Cálculo integral, que evolucionaba desde tiempos más remotos, por cauces totalmente distintos (ver Cap. XIII, nota I). Desde entonces ambos problemas se entrelazan y complementan, por lo cual su evolución histórica debe seguirse simultáneamente.

Sólo falta elaborar el algoritmo diferencial, ir complicando los problemas, crear la notación adecuada. Todo ello es simple cuestión de tecnicismo; y si a la técnica se suma el genio, se comprende cómo el nuevo cálculo pudo crecer inconmensurablemente, en tan breve período, en manos de ISAAC NEWTON (1642-1727) y de GUILLERMO LEIBNIZ (1646-1716).

NEWTON era ante todo físico, y como tal le interesaba el Cálculo como instrumento de investigación, sin preocuparse de la pureza de sus conceptos. Así define la tangente por la condición de contener *dos puntos consecutivos* de la curva, y el círculo osculador *tres puntos consecutivos*; así es metafísico su concepto de derivada (fluxión) y de diferencial (momento de fluxión). Textualmente dice: "Los momentos dejan de ser momentos cuando alcanzan un valor finito, y deben por lo tanto considerarse

como magnitudes finitas nacientes". En cambio, su contrincante LEIBNIZ es filósofo, y se interesa ante todo por el rigor lógico y pureza de los conceptos: sus definiciones de función algebraica y trascendente, de parámetros, de coordenadas curvilíneas, son intachables; su definición de diferencial (1689) es perfecta, y sus notaciones son las que han perdurado hasta nuestros días.

LEIBNIZ obtuvo independientemente de NEWTON muchos de sus resultados, dando origen tal coincidencia a una lamentable polémica, que más bien fué guerra a muerte entre dos escuelas.

A modo de ilustración damos el cuadro de notaciones usadas por ambos egregios contrincantes:

Notaciones actuales	*Notaciones de* NEWTON	*Notaciones de* LEIBNIZ
Variable independiente: x	Quantitas correlata	
Función: y	Fluente	
Incremento: $\mathrm{d}x$	o	$\mathrm{d}x$ (antes x/d)
Derivada: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$	Fluxión: $\dot{y}$	$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$
Diferencial: $\mathrm{d}y$	Momento: $\dot{y}.\mathrm{o}$	Diferencial: $\mathrm{d}y$

Actualmente se emplea la notación de NEWTON $\dot{y}$, conjuntamente con la y', para distinguir las derivadas de y respecto a distintas variables independientes.

La nueva ciencia fué acogida muy diversamente por los matemáticos de fines del siglo XVII. CHRISTIAN HUYGENS (1629-95), el genial holandés, en su famoso tratado de los relojes de péndulo (1673) se esforzó en eludir el nuevo algoritmo, usando de preferencia los métodos clásicos.

El aristócrata francés GUILLERMO FRANÇOIS, *marqués de* L'HOSPITAL (1661-1704), fué uno de los más entusiastas propagandistas del nuevo método, abandonando la vida mundana para consagrarse a él; su tratado de 1696 fué el primero de Cálculo diferencial, y en él aparece la famosa fórmula que lleva su nombre (§ 36-1), aunque JUAN BERNOULLI (1667-1748) reclamó su prioridad, al parecer con fundamento. Su nomenclatura es extraña: la *coupée* es la abscisa; *cercle baisant* es el círculo osculador (§ 40-6); *diferencial* es la derivada.

Junto a estos continuadores de NEWTON, es oportuno citar al famoso obispo BERKELEY, que sometió el Cálculo de fluxiones a duras críticas, en gran parte justificadas. Tal es, por ejemplo, la que señala una evidente contradicción en el método newtoniano, donde el incremento se designa con la letra o (que no debe confundirse con el *cero*), pero al final se hace $o = 0$.

Después de los hermanos JACOBO (1654-1705) y JUAN BERNOULLI, que resuelven diversos problemas concretos, aparece el coloso de la nueva técnica, LEONARDO EULER (1707-83), que no deja capítulo alguno por explorar; y no sólo en el Cálculo y en el Álgebra, sino también en la Física matemática. Su obra inmensa desborda los límites de este libro, pero en diversos capítulos hemos encontrado y seguiremos encontrando su nombre.

CAPÍTULO IX

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO Y CONSECUENCIAS

§ 35. TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

1. **El teorema del incremento finito y su significado geométrico.** — En el § 33 hemos estudiado la variación de una función en entornos de puntos determinados. El estudio de la variación en todo un intervalo se apoya en un teorema de LAGRANGE, que expresa el incremento de una función derivable f(x).

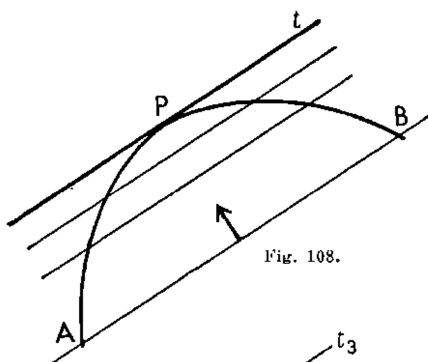


Fig. 108.

Comencemos por una propiedad geométrica importante:

En todo arco de curva regular [y por lo tanto (§ 34-6) con tangente en todos sus puntos], *hay por lo menos un punto donde la tangente es paralela a la cuerda.*

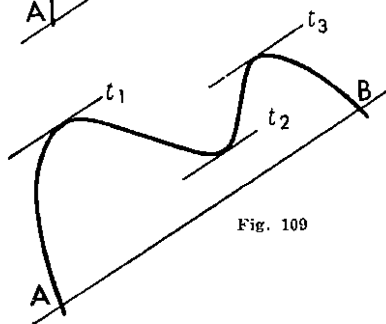


Fig. 109

Esta propiedad quedará demostrada en el apartado siguiente, pero por ahora observemos que es fácil justificarla intuitivamente, pues si la cuerda A B se traslada paralelamente, como indica la flecha (fig. 108), dos por lo menos de los puntos de intersección llegan a confundirse en uno P, y como en dicho punto hay tangente (por ser regular la curva), justamente dicha tangente deberá ser paralela a la cuerda A B.

En el enunciado hemos dicho "por lo menos un punto", pues puede haber varios, como muestra la figura 109.

De aquí resulta el siguiente teorema de LAGRANGE, llamado *del valor medio* o *del incremento finito*:

TEOR.: *Si la función* f(x) *es continua en* $[a, b]$, *y con derivada única* [finita o infinita (§ 30-5)] *en todo punto de* (a, b), *hay un punto interior* ξ, *tal que:*

[35-1] $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

o sea:

[35-2] $$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(\xi).$$

En efecto, la pendiente de la cuerda que une los puntos A y B, de abscisas a y b, es: $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, y como en el arco A B hay por lo menos un punto donde la tangente es paralela a esa cuerda, llamando ξ a su abscisa se tiene [35-1].

Este teorema suele escribirse en estas otras formas:

[35-3] $$\Delta y = \Delta x \,.\, f'(\xi),$$

o bien poniendo:

$$b - a = h \;\therefore\; b = a + h,$$

y observando que por ser $a < \xi < b$, es $\xi = a + \theta h$ con $0 < \theta < 1$:

[35-4] $$f(a+h) - f(a) = h\, f'(a + \theta h) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Puede haber varios valores de ξ (ó de θ), pero el teorema no indica la manera de determinarlos.

Compárese el distinto significado de las fórmulas:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi) \qquad \text{(Teorema de LAGRANGE)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \omega \qquad \text{(Definición de derivada)},$$

y las respectivas condiciones de validez.

2. **Demostración del teorema de Lagrange.** — Para demostrar el teorema de LAGRANGE basta probar la propiedad intuitiva en que nos hemos apoyado; esto se hace a su vez basándolo en el siguiente teorema de ROLLE:

TEOR.: *Si* f(x) *es continua en* $[a, b]$, *con derivada única* (finita o infinita) *en* (a, b), *y es* f$(a) =$ f(b), *hay por lo menos un punto interior en que se anula la derivada* f$'(x)$.

Por lo menos hay dos puntos, ξ y ξ', en los que f(x) toma su valor máximo absoluto, M, y su valor mínimo absoluto, m. Si ambos valores, ξ, ξ', coinciden con los extremos, es $M = m = f(a) = f(b)$; y como todos los valores están comprendidos entre M y m, la función es constante en todo el intervalo; luego, $f'(x) = 0$ en todo él.

En caso contrario, uno por lo menos de los dos valores ξ, ξ', debe ser interior; luego, es relativo el máximo o mínimo correspondiente $f(\xi) = M$ ó $f(\xi') = m$, y por lo tanto, (§ 33-3):

$$f'(\xi) = 0, \quad \text{o bien:} \quad f'(\xi') = 0.$$

NOTAS: 1. Geométricamente, el teorema expresa la existencia de un punto del arco cuya tangente es paralela al eje x.

2. Nótese que basta la existencia de derivada única (finita o infinita) en cada punto interior de (a, b); si en alguno hay derivada infinita, con signo distinto a ambos lados, el punto es cuspidal, y no subsiste la conclusión.

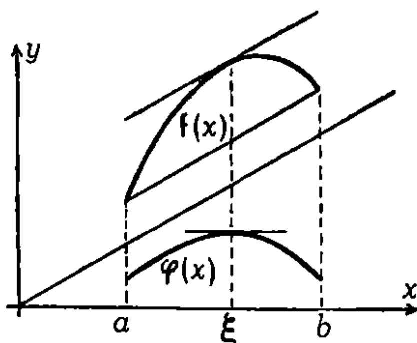


Fig. 110.

Para demostrar ahora aritméticamente la propiedad en que nos hemos apoyado (§ 35-1), basta restar a $f(x)$ las ordenadas de una paralela a la secante (fig. 110), es decir, considerar la función

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

Como $\varphi(a) = \varphi(b)$ (compruébese), existe un valor ξ en (a, b) tal que:

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

3. **Consecuencia. Teorema fundamental del Cálculo integral.** — Hemos visto (§ 30-3, a) que la derivada de una constante es cero. Veremos ahora que, recíprocamente, *si una función* $f(x)$ *tiene derivada constantemente nula, se reduce a una constante.* En efecto, si a y b son dos valores cualesquiera de x, habrá un punto ξ que verifica [35-2], pero como $f'(\xi) = 0$, resulta:

$$f(b) = f(a).$$

De aquí resulta la siguiente consecuencia, que por razones que se comprenderán más adelante (§ 50) llamaremos teorema fundamental del Cálculo integral: *Si dos funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *tienen derivadas finitas iguales, difieren en una constante.*

En efecto:

$$D[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x) = 0$$
$$\therefore \; f(x) - g(x) = c.$$

Gráficamente, esto significa que la curva $g(x)$ se obtiene de la $f(x)$, trasladándola paralelamente al eje de las y.

El teorema no es válido si las derivadas pueden tomar valores infinitos (nota VI).

4. **Acotación del error en una función.** — El teorema del valor medio no sólo es fundamento de todo el cálculo diferencial e integral, sino que también se apoya en él el cálculo de errores de la Matemática práctica.

Calculado un valor $y = f(x)$, ¿qué influjo tiene en y un

error Δx de la variable x? La contestación exacta está en la fórmula [35-3]: El error de la función es igual al error de la variable por la derivada en un punto intermedio.

Pero se presentan dos dificultades: 1ª No se conoce el error de la variable, sino una cota superior del mismo; 2ª No se conoce el punto intermedio ξ. Sin embargo, sabiendo bajo qué número se conserva Δx y bajo qué número está $f'(\xi)$ en el intervalo $(x, x+\Delta x)$, se tiene fácilmente un límite del error Δy, es decir, conocemos el grado de aproximación alcanzado.

EJEMPLOS: 1. En la división $y = 1 : x$, el error de x queda multiplicado por la derivada $-1/x^2$ en un punto del intervalo entre x y $x + \Delta x$; este factor es tanto más grande cuanto menor sea x.

2. Si la distancia entre dos puntos AB no puede medirse directamente, pero sí las distancias $AC = b$, $BC = a$, y el ángulo $ACB = C$, se calcula c por la fórmula:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b.\cos C}.$$

Suponiendo exactos a y b, el error que produce en c un error h del ángulo C es:

$$\Delta c = \tfrac{1}{2}(2\,a\,b \operatorname{sen} \xi)\,h : c,$$

siendo ξ un número comprendido entre C y $C + h$.

Tendremos, pues, un valor aproximado para Δc tomando:

$$|\Delta c| \sim |h|\,a\,b \operatorname{sen} C : c.$$

Si el error del ángulo medido $C = 29°\,50'$ es $|h| < 1' = 0{,}00003\ldots$ siendo $\operatorname{sen} \xi < \tfrac{1}{2}$, resulta:

$$|\Delta c| < \tfrac{1}{2}\,a\,b\,.\,0{,}00003 : c.$$

Si se quiere asegurar un límite superior, para evitar el peligro de que el denominador difiera apreciablemente de c, se sustituye éste por el número menor:

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b} = a - b.$$

NOTA: La exactitud con que deba efectuarse la medida de x depende de la cuantía de la derivada; si ésta es grande, exige mayor precisión, y por ende, mayor costo y trabajo.

Una grosera medida de un ángulo pequeño permite calcular su coseno con error disminuído; por lo contrario, dado el coseno, el arco adolecerá de gran error. Explíquese esto con las derivadas y directamente en la circunferencia.

5. Interpolación lineal. Acotación del error. — *a*) Conocidos los valores $f(a)$ y $f(b)$ de una función $f(x)$ en los puntos a y b, podemos calcular aproximadamente los valores en puntos intermedios, sustituyendo el arco de curva por la cuerda. Esto equivale a admitir que los incrementos de ordenadas son proporcionales a los incrementos de las abscisas.

Admitiendo la proporcionalidad entre las diferencias de los tres valores:

$$a \quad , \quad a+h \quad , \quad b,$$

y sus correspondientes:

$$f(a) \quad , \quad f(a+h) \quad , \quad f(b),$$

resulta:

[35-5] $$f(a+h) \sim f(a) + h \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esta fórmula se aplica para la interpolación de valores no contenidos en una tabla de valores de cualquier función $f(x)$. Así se hace en las tablas de logaritmos, de funciones circulares, de logaritmos de funciones circulares, etc.

La diferencia $f(b) - f(a)$ entre los valores consecutivos dados por las tablas, se llama *diferencia tabular.*

En las tablas de logaritmos, a y b son enteros consecutivos; el producto de la diferencia tabular por el valor $h < 1$ se facilita con tablillas impresas al margen de la tabla.

b) *Acotación del error.* La fórmula de interpolación, en virtud del teorema del valor medio, aplicado al intervalo $[a, b]$, puede escribirse así:

$$f(a+h) \sim f(a) + h\, f'(c) \qquad (a < c < b),$$

y aplicado al intervalo $[a, a+h]$, da el valor *exacto*:

$$f(a+h) = f(a) + h\, f'(\xi), \qquad a < \xi < a+h.$$

El error ε de la fórmula [35-5] será, por lo tanto: $h[f'(c) - f'(\xi)]$. y como ambos números pertenecen al intervalo (a, b), aplicando de nuevo el teorema del valor medio será:

[35-6] $$\varepsilon = h(c - \xi) . f''(\lambda),$$

siendo λ un número intermedio. En definitiva, siendo la distancia o diferencia $|\xi - c|$ menor que la amplitud del intervalo, $b - a$, si la derivada segunda se conserva en todo el intervalo inferior a un número fijo K, resulta:

$$|\varepsilon| < h(b-a)K, \quad \text{si se conserva} \quad |f''(x)| < K.$$

Ejemplo: La interpolación lineal se aplica para calcular logaritmos de números comprendidos entre dos consecutivos n y $n+1$, cuya diferencia de logaritmos se llama diferencia tabular Δ. La fórmula es:

[35-7] $$\lg(n+h) = \lg n + h\Delta, \quad \text{siendo} \quad \Delta = \lg(n+1) - \lg n.$$

El error cometido resulta observando que siendo $n > 10\,000$ para las tablas de 7 decimales (nota I, e_3):

$$|f''(x)| = M/x^2 < 0{,}43\ldots : (10\,000)^2;$$

luego, resulta: $$|\varepsilon| < 0{,}000\,000\,005,$$

es decir, no influye en la séptima cifra decimal.

6. **Cálculo aproximado de logaritmos.** — El incremento de $\ln x$, es decir: $\ln(x+h) - \ln x$ es igual a $h : (x + \theta h)$, y por lo tanto, aproximadamente igual a h/x y también a $h : (x+h)$. Obtendremos mejor aproximación si tomamos el promedio de los dos valores extremos, y mejor todavía si sumamos numeradores y denominadores, con lo cual resulta un valor intermedio. Tendremos, pues:

[35-8] $$\ln(x+h) - \ln x \sim \frac{2h}{2x+h}.$$

Esta fórmula permite calcular $\ln(x+h)$, conocido $\ln x$, con sólo sumarle la fracción anterior. Según se demuestra en la teoría de las series, esta fórmula es tan exacta, que si es $x > 10\,000$, el error es menor que 10^{-13}; es decir, resulta el logaritmo con 13 decimales exactos (§ 45-4).

Para logaritmos decimales, basta multiplicar por el módulo:

[35-8'] $$\lg(x+h) \sim \lg x + 2hM/(2x+h).$$

Es con esta fórmula tan sencilla con la que se calculan las tablas de logaritmos. Para construir una tabla hasta 100 000, basta calcular los lo-

garitmos de 10^4 a 10^5. Así, por ejemplo, dentro del orden de las diezmillonésimas, es:

$$\lg 10001 = 4 + 2.0{,}43429/20001 = 4{,}0000434.$$

7. **Derivación gráfica.** — Puesto que la gráfica de $y' = f(x)$ facilita el estudio de la curva $y = f(x)$, conviene dar un procedimiento rápido de construcción aproximada, que en muchos casos es suficiente.

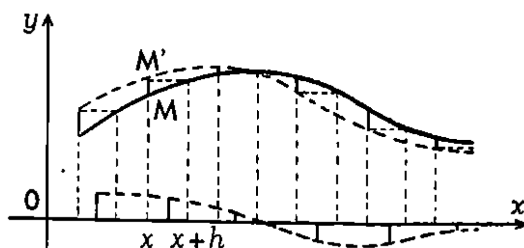


Fig. 111.

Dibujada la curva, trasladémosla hacia su izquierda (mediante un calco en papel transparente) un segmento h (fig. 111).

El segmento de ordenada MM' comprendido entre ambas, no es sino:

$$f(x+h) - f(x) = h\,f'(\xi).$$

Llevada esta ordenada MM' en el punto medio entre x y $x+h$ (que diferirá de ξ en menos de $h/2$), tenemos una gráfica que representa aproximadamente la función derivada, medida con la unidad h. Esto mismo se consigue mejor, sin necesidad de trasladar la curva, dibujando ésta en papel milimetrado.

8. **Teorema de Cauchy.** — Dado un arco de curva plana:

[35-9] $\quad x = g(t) \quad , \quad y = f(t) \quad (a \leqq t \leqq b),$

si las derivadas $g'(t)$ y $f'(t)$ existen, y ni se anulan ni se hacen infinitas simultáneamente en (a, b), el arco es regular, y la pendiente de la cuerda que une sus extremos es el cociente de la diferencia de ordenadas sobre la diferencia de abscisas, si $g(b) \neq g(a)$. Esta cuerda es (por demostración análoga a § 35-2) paralela a la tangente en un punto intermedio, $t = \xi$, cuya pendiente es (§ 34-6) el cociente de derivadas; luego:

[35-10] $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < b),$$

si $g(b) \neq g(a)$ y las derivadas ni se anulan ni se hacen infinitas simultáneamente en $a < t < b$.

Tenemos así el teorema de valor medio de CAUCHY:

TEOR.: *El cociente de divisor no nulo de incrementos de dos funciones continuas en un intervalo cerrado y con derivadas únicas* (§ 30-5) *en su interior, no simultáneamente nulas ni infinitas, es igual al cociente de los valores de éstas en un punto intermedio.*

EJERCICIOS

1. Encontrar el valor medio ξ del teorema [35-1], para las funciones: 1º) $2x$; 2º) x^2; 3º) $x^{1/3}$.

2. Probar, *mediante el teorema del incremento finito*, que si $f(x)$ es continua en x_0 y existe lim $f'(x)$ para $x \to x_0$, existe $f'(x_0)$ y coincide con dicho límite (cfr. nota IV-*c*). En otras palabras: la derivada de una función continua no puede tener discontinuidad evitable (cfr. ejercicio 16 de § 32).

3. Comprobar que el teorema del incremento finito [35-1] no es válido si $a\,b < 0$ para las funciones $1/x$, $|x|$, $x^{2/3}$. Gráficas correspondientes.

4. ¿A qué intervalos puede aplicarse el teorema [35-1] respecto a la función $g(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$, $g(0) = 0$, que tiene derivada existente pero discontinua en $x = 0$? (Cfr. nota IV-*c*).

5. Si la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y tiene derivada única $f'(x) \leqslant 0$ en $a < x < c$, y $f'(x) \geqslant 0$ en $c < x < b$, entonces tiene en c un mínimo en sentido amplio (§ 33-2).

6. Aplicando el teorema de ROLLE a $\varphi(x) = f(x)e^{-kx}$, demostrar el siguiente teorema de E. WARING: Si $f(x)$ es continua y no idénticamente nula en $[a, b]$, admite derivada única en todo punto de (a, b), y $f(a) = f(b) = 0$, la función $f'(x)/f(x)$ alcanza todo valor real k en (a, b).

7. En el ejemplo 2 de § 35-4, ¿qué influencia tiene en el error del lado c un error h del lado a?

8. Acotar el error de lg 347,6 siendo $< 0{,}1$ el del número.

9. Acotar el error de α, siendo $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}4786$ con error menor que 0,000 05.

10. Un trozo de bronce pesa 100 gr (error $\varepsilon_1 < 5$ mgr) en el aire, y 88 gr ($\varepsilon_2 < 8$ mgr) en el agua. Hallar el error relativo de la densidad.

11. Aplicar la interpolación lineal a tablas diversas: funciones circulares naturales, cuadrados, recíprocos, logaritmos de GAUSS, ...; y acotar el error en cada caso.

12. ¿Para qué arcos es más exacta la interpolación en las tablas de senos y cosenos? Distínganse el problema directo y el inverso, es decir: dado el arco, calcular sus funciones circulares, y viceversa. Interpretar geométricamente en la circunferencia unidad.

§ 36. LÍMITES INDETERMINADOS

1. **Forma 0/0. Regla de Bernoulli - l'Hospital.** — Los teoremas sobre cálculo de límites (§ 24-4) dejan sin resolver algunos casos, como ya hemos visto. Por ejemplo, la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida para $x = 0$, pero existe el límite para $x \to 0$, y vale 1 (§ 28-2); en otras palabras (§ 25-3) : $f(x)$ es una *expresión indeterminada* para $x = 0$, y su *"verdadero valor"* es 1.

La diferencia esencial entre

$$[36\text{-}1] \qquad \lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{para } x \to 0$$

y los límites calculados con los teoremas generales de § 24-4,

está en que dicho límite no depende sólo, como allí acontecía, de los límites de las funciones componentes, sino también de la naturaleza de éstas, y debe determinarse directamente.

Por esta razón, de no estar determinados los límites de expresiones como [36-1] por los límites de las variables componentes, se llaman *límites indeterminados*. Un método que en muchos casos permite determinarlos, es el fundado en la consideración de las derivadas, como se expone a continuación.

El límite del cociente de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, que se anulan para $x = a$ (forma 0/0; § 25-3), se halla fácilmente, en muchos casos, con la siguiente regla, que suele llamarse de L'HOSPITAL, aunque JUAN BERNOULLI reclamó su prioridad:

a) Si las funciones continuas $f(x)$ *y* $g(x)$ *se anulan en el punto* a*, siendo* $g(x)$ *distinta de cero en un entorno reducido de este punto, tienen derivadas* $f'(x)$ *y* $g'(x)$ *que ni se anulan ni se hacen infinitas simultáneamente en un cierto entorno reducido de dicho punto, y el cociente de dichas derivadas tiene un límite finito o infinito para* $x \to a$*; entonces se verifica:*

[36-2] $$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Por el teorema de CAUCHY, aplicado al intervalo (a, x), se tiene:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \begin{cases} \text{siendo} & a < \xi < x; \\ \text{o bien:} & a > \xi > x, \end{cases}$$

pero siendo $\lim x = a$, es $\lim \xi = a$; luego, recordando que es $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, como el segundo miembro tiene límite, por hipótesis, para $\xi \to a$, resulta [36-2].

b) Si para $x = a$*, las derivadas existen y no se anulan, ni se hacen infinitas simultáneamente, su cociente da el límite buscado de* $f(x)/g(x)$*, supuestas éstas nulas en* $x = a$*.*

Porque *por definición de derivada* es:

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{[f(x) - f(a)] : (x - a)}{[g(x) - g(a)] : (x - a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

Éste es el caso ilustrado por la figura 112, donde vemos que para un valor de x próximo a a, el cociente

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{CA}{CB} \text{ es ya próximo a } \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{CA' : (x - a)}{CB' : (x - a)} = \frac{CA'}{CB'}.$$

En la aplicación de [36-2] consiste la llamada regla de L'HOSPITAL. Si el cociente de derivadas es también indeterminado, puede convenir reiterar el procedimiento una o varias veces.

EJEMPLOS: 1. Aplicada a $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, la regla nos da:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$$

no obstante, el cálculo directo del primer límite, realizado en § 28-2, fué necesario para probar que D sen x = cos x, sin lo cual no podríamos aplicar la regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL a este caso.

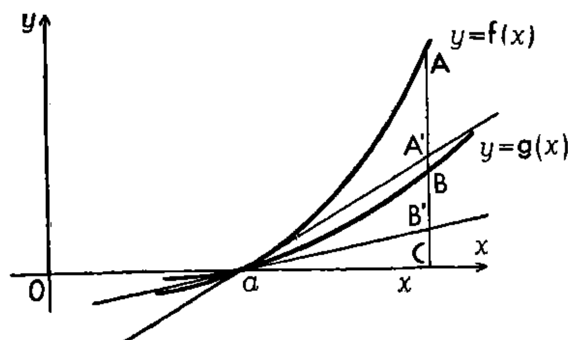


Fig. 112.— $f(x)/g(x) = CA/CB \sim CA'/CB' = f'(a)/g'(a)$.

2. Para el límite de $\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$ para $x \to 0$, el cociente de las derivadas, es:

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{3x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 \to \frac{1}{3}.$$

2. **Aplicación reiterada**. - Si las funciones continuas $f'(x)$ y $g'(x)$ son nulas en el punto a, si existe un entorno reducido de a donde $g'(x) \neq 0$, y donde existen y no se anulan, ni se hacen infinitas simultáneamente $f''(x)$ y $g''(x)$, y si el cociente $f''(x)/g''(x)$ tiene un límite finito o infinito para $x \to a$, entonces, aplicando dos veces [36-2] resulta:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad \text{para } x \to a:$$

y así puede seguirse reiteradamente.

Por otra parte, análogamente a § 36-1, b, si en $x = a$ se anulan $f(x)$, $g(x)$ y sus primeras derivadas y suponemos existentes, no simultáneamente nulas ni infinitas $f''(a)$ y $g''(a)$, podemos escribir, aplicando [36-2] y luego la definición de derivada segunda:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{[f'(x) - f'(a)]/(x-a)}{[g'(x) - g'(a)]/(x-a)} = $$
$$= \frac{f''(a)}{g''(a)}.$$

En efecto, no pueden anularse $f'(x)$ y $g'(x)$ en *todo* entorno reducido de a, porque por definición de derivada sería $f''(a) = g''(a) = 0$; supongamos sea $g'(x)$ distinta de cero en un entorno reducido de a; entonces tampoco puede anularse $g(x)$ en *todo* entorno reducido de a, porque por el teorema de ROLLE, igual ocurriría con $g'(x)$, imposible como antes hemos visto.

En general:

TEOR.: *Si en $x = a$ se anulan* $f(x)$, $g(x)$, *y sus derivadas primera, segunda, ..., $(n-1)$-ésimas, y suponemos existentes, no simultáneamente nulas ni infinitas* $f^{(n)}(a)$, $g^{(n)}(a)$, *entonces el límite para $x \to a$ del cociente* $f(x)/g(x)$ *es igual al cociente* $f^{(n)}(a)/g^{(n)}(a)$.

Si $g^{(n)}(a) = 0$, el límite es infinito, sin signo asegurado.

EJEMPLO 1. Calcular $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

Se tiene, por [36-2]:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

y como esta expresión es de nuevo indeterminada, reiteramos el procedimiento:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

NOTAS: 1. La regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL es válida con la misma restricción que el teorema de CAUCHY, del cual se deriva.

2. Las restricciones de hipótesis no vienen impuestas solamente por la demostración, sino que son indispensables para la aplicación de la regla, pues si en todo entorno de a se anulasen o se hiciesen infinitas simultáneamente las derivadas, no sería posible calcular el límite de su cociente; y si se anulase el denominador $g(x)$ en cualquier entorno de a, lo mismo acontece a sus derivadas 1ª, 2ª, 3ª, ..., en virtud del teorema de ROLLE, resultando todas ellas nulas en el punto a, si son continuas en este punto.

3. Si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ carece de límite, nada puede deducirse respecto de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, que puede tener, sin embargo, límite determinado.

EJEMPLOS: 2. Tal sucede en el cociente:

$$\frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

cuyo límite para $x \to 0$ es 0, mientras que el cociente de derivadas,

$$\frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

carece de límite para $x \to 0$, por no tenerlo $\cos \dfrac{1}{x}$.

3. Si se quiere calcular para $x \to 0$ el límite del cociente $f(x)/g(x)$ de las funciones:

$$f(x) = e^{-2/x^2}\left(\cos \frac{1}{x^2} + 2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\right),$$

$$g(x) = e^{-1/x^2}\left(\cos \frac{1}{x^2} + \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\right)$$

mediante el de las derivadas:

$$f'(x) = 10\, x^{-3} e^{-2/x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2};$$

$$g'(x) = 4\, x^{-3} e^{-1/x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2},$$

al simplificar

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{5}{2}\, e^{-1/x^2} \to 0.$$

pudiera creerse erróneamente que el límite buscado es también cero. Sin embargo, se ve directamente que

$$f(x)/g(x) = e^{-1/x^2}\,\frac{1 + 2\ \mathrm{tg}\ (1/x^2)}{1 + \mathrm{tg}\ (1/x^2)}$$

toma todos los valores en el entorno de cero, pues así ocurre para el quebrado del segundo miembro en

$$\sqrt{\frac{2}{(2k+1)\pi}} < x < \sqrt{\frac{2}{(2k-1)\pi}}$$

para cualquier número natural k.

No falla el teorema, porque la simplificación del cociente $f'(x)/g'(x)$ se ha realizado prescindiendo de que $\mathrm{sen}(1/x^2)$ se anula en los infinitos puntos $x = 1/\sqrt{n\pi}$ del entorno de $x = 0$.

3. Generalizaciones. Límite para $x \to \infty$, y forma ∞/∞. —

a) Cuando se trata de calcular, para $x \to \infty$:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{siendo } \lim f(x) = \lim g(x) = 0, \text{ se tiene}$$

la forma indeterminada $0/0$ para $x \to \infty$, y si ambas funciones admiten derivadas (§ 30-5), que ni se anulen ni se hagan infinitas simultáneamente en un entorno de ∞ (es decir, para valores de x superiores en valor absoluto a un número fijo), siendo además, en dicho entorno, $g(x) \neq 0$, es aplicable la regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL.

En efecto, poniendo $x = \dfrac{1}{t}$, se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}.$$

Como ahora $t \to 0$, podemos aplicar la regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL [36-2]. El cociente de derivadas *respecto a* t es:

$$\frac{f'(1/t)\ (-1/t^2)}{g'(1/t)\ (-1/t^2)} = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

y entonces:

$$[36\text{-}3] \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

b) La regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL es aplicable también a la forma ∞/∞, es decir, al cálculo para $x \to a$ de:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}, \textit{ siendo } \lim f(x) = \lim g(x) = \infty.$$

Demostraremos, en efecto, que: *si existe para $x \to a$* $\lim f'(x)/g'(x) = l$, *es también* $\lim f(x)/g(x) = l$, *siempre que en un cierto entorno reducido de a, ni se anulen ni se hagan infinitas simultáneamente* $f'(x)$ *y* $g'(x)$.

Si x_1 es un punto cualquiera de este entorno, podemos escribir el cociente dado, para aplicar el teorema de CAUCHY, así:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \cdot \frac{1-[g(x_1):g(x)]}{1-[f(x_1):f(x)]} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \cdot \frac{1-[g(x_1):g(x)]}{1-[f(x_1):f(x)]}$$

donde x_0 es un punto intermedio entre x y x_1. Probaremos que el límite de este producto es l. Dado $\varepsilon > 0$, para x_1 suficientemente próximo a a, la fracción $f'(x_0)/g'(x_0)$ difiere de su límite l en menos de ε; fijado así x_1, y haciendo $x \to a$, como $g(x) \to \infty$ y $f(x) \to \infty$, resulta que la segunda fracción tiende a 1, con lo cual el producto diferirá de l tan poco como se quiera.

EJEMPLO 1. Para calcular el límite para $x \to 0^+$ de la función $(\ln \operatorname{tg} 2x)/(\ln \operatorname{tg} x)$, aplicaremos la regla, que nos da una expresión de límite indeterminado del mismo tipo, pero ésta se puede transformar así:

$$\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \dfrac{2}{\cos^2 2x}}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\dfrac{2x}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 2x}}{\dfrac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}} \to 1.$$

c) Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen límites infinitos para $x \to \infty$, ponemos $x = 1/t$, como antes se hizo, y la conclusión subsiste.

EJEMPLO 2. Para $x \to \infty$, tenemos:

$$\lim \frac{e^x - 1}{\ln(e^x + x)} = \lim \frac{e^x}{\dfrac{e^x+1}{e^x+x}} = \lim \frac{e^x}{e^x+1}(e^x+x) = \infty.$$

NOTA: No se olvide que la regla puede no conducir al límite, aun aplicada indefinidamente, o bien no resultar legítima su aplicación reiterada al obtenerse una fracción cuyos términos carezcan de límite, como sucede, por ejemplo, con la fracción $\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$ para $x \to \infty$. Sin embargo, basta una simple división por x para llegar al límite 1.

En cambio, si es $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$, podría aplicarse la regla indefinidamente sin resultado, por obtenerse fracciones del mismo tipo, pero dividiendo por e^x resulta el límite 1 para $x \to +\infty$ y oscilante para $x \to -\infty$.

4. **Formas** $0 . \infty$ **e** $\infty - \infty$. — *a*) Se trata de calcular para $x \to a$:

$\lim f(x) . g(x)$, siendo $\lim f(x) = 0$ y $\lim g(x) = \infty$.

Escribiendo el producto $f(x) . g(x)$ en la forma:

$$\frac{f(x)}{1:g(x)}, \quad \text{o bien:} \quad \frac{g(x)}{1:f(x)},$$

lo llevamos a una de las formas indeterminadas ya conocidas 0/0, o bien ∞/∞, en las cuales se puede aplicar la regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL.

EJEMPLO 1:

$$\lim_{x \to 0} (x \cdot \operatorname{cotg} x) = \lim \frac{x}{\operatorname{tg} x} \qquad \left(\text{por ser } \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1 \quad \text{(por la regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL).}$$

b) *Forma* $\infty - \infty$. — Se trata de calcular:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)],$$

siendo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty.$$

Escribiendo la diferencia bajo el límite en otra forma:

$$f - g = \frac{f - g}{f \cdot g} \cdot f \cdot g = \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{f}\right) : \frac{1}{f \cdot g}$$

se la conduce a la forma indeterminada 0/0 para $x = a$, y en ella puede aplicarse la regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL.

EJEMPLO 2. Para $x \to 0$ tenemos, transformando en fracción única:

$$\lim \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = \lim \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim \frac{\cos x + x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x}$$

y el límite es cero, pues el último cociente puede escribirse así:

$$\operatorname{sen} x : \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x\right).$$

5. **Formas exponenciales** ∞^0, 0^0, 1^∞. — Para ver cuáles son los posibles casos de indeterminación en una expresión de la forma:

[36-4] $$f(x)^{g(x)},$$

tomemos logaritmos (cfr. § 21-3):

[36-5] $$\ln f(x)^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x),$$

y consideremos los posibles casos de indeterminación de las formas $0 \cdot (+\infty)$; $0 \cdot (-\infty)$; $(+\infty) \cdot 0$; $(-\infty) \cdot 0$ é $\infty \cdot 0$ en el producto que resultó en el segundo miembro:

a) $\lim g(x) = 0$;	$\lim \ln f(x) = +\infty$	$\therefore \lim f(x) = +\infty$	Forma	$(+\infty)^0$;
b) $\lim g(x) = 0$;	$\lim \ln f(x) = -\infty$	$\therefore \lim f(x) = 0^+$	"	0^0;
c) $\lim g(x) = +\infty$;	$\lim \ln f(x) = 0$;	$\therefore \lim f(x) = 1$	"	$1^{+\infty}$;
d) $\lim g(x) = -\infty$;	$\lim \ln f(x) = 0$;	$\therefore \lim f(x) = 1$	"	$1^{-\infty}$;
e) $\lim g(x) = \infty$;	$\lim \ln f(x) = 0$;	$\therefore \lim f(x) = 1$	"	1^{∞}.

Si el límite de [36-5] es λ, el buscado es e^λ.

Observemos que las expresiones ∞^0, 0^0, 1^∞ no pueden tener significado alguno como potencias numéricas; son sólo signos cómodos para indicar cuáles son los límites de $f(x)$ y de $g(x)$ en [36-4].

Ejemplo 1. Calculemos $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$ de la forma $(+\infty)^0$. Por ser

$$\lim\left(\frac{1}{x} . \ln(1 + x)\right) = \lim \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim \frac{\dfrac{1}{1 + x}}{1} = 0,$$

es $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

2. Para $x \to 0$, $\lim x^x$ corresponde a la forma 0^0, y como:

$$\lim (x . \ln x) = \lim \frac{\ln x}{1/x} = \lim \frac{1 : x}{-1 : x^2} = \lim (-x) = 0,$$

se tiene $\lim\limits_{x \to 0} x^x = e^0 = 1$.

3. Es indeterminado de la forma 1^∞:

$$\lim_{x \to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

y aplicando la regla anterior tenemos:

$$\lim (\operatorname{tg} 2x . \ln \operatorname{tg} x) = \lim \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \lim \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{-\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 2x}} =$$

$$= \lim \frac{-\operatorname{sen}^2 2x}{2 \operatorname{sen} x \cos x}.$$

Siendo ésta una función continua, su límite para $x \to \pi/4$ coincide con el valor que toma en él la fracción; la cual después de simplificada, se reduce a $-\operatorname{sen} 2x$, cuyo valor para $x = \pi/4$ es -1; luego, en definitiva, será $\lim (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = 1/e$.

4. En el ejemplo anterior, los límites laterales a izquierda y a derecha son respectivamente de las formas $1^{+\infty}$ y $1^{-\infty}$.

6. Sustitución de variables equivalentes. — Si para calcular el límite para $x \to 0$ de $(\operatorname{tg} x - x)/x^3$ formamos el cociente de las derivadas:

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{3x^2 \cos^2 x},$$

llegamos a una expresión nuevamente indeterminada, cuyo límite puede hallarse aplicando otras dos veces la regla de Bernoulli-L'Hospital, lo que conduce a derivadas más complica-

dan. No obstante, el límite del último cociente puede calcularse directamente así:

$$\lim \frac{\text{sen}^2 x}{3\,x^2 \cos^2 x} = \lim \frac{1}{3 \cos^2 x} \cdot \lim \left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3},$$

y a este resultado se llega directamente "simplificando bajo el límite" $\text{sen}^2 x$ con x^2, por tener límite 1 su cociente, es decir (§ 24-3, b_3), por tratarse de variables equivalentes: $\text{sen}^2 x \sim x^2$. En general:

Si en una expresión se reemplaza el factor o divisor u por otro equivalente v, **el límite** *no se modifica,* pues ello equivale a multiplicar por un factor u/v ó v/u, cuyo límite es 1.

Ejemplo: El límite para $x \to 0$ de $(1 - \cos x)/3\,x^2 = (2\,\text{sen}^2 x/2)/3\,x^2$ es el mismo de $2(x/2)^2/3\,x^2$, es decir, 1/6, en acuerdo con § 36-2, ejemplo 1.

Los resultados anteriores nos dan las siguientes equivalencias para $x \to 0$:

[36-6] $\quad \text{tg}\, x - x \sim x^3/3 \qquad$ (§ 36-1, ej. 2 ó § 36-6);

[36-7] $\quad x - \text{sen}\, x \sim x^3/6 \qquad$ (§ 36-2. ej. 1);

[36-8] $\quad 1 - \cos x \sim x^2/2 \qquad$ (§ 36-2, ej. 1 ó § 36-6, ej.).

Ejercicios

1. Calcular: $l_1 = \lim\, (e^x - 1)/x$, para $x \to 0$; $l_2 = \lim\, (y - 1)/\ln y$, para $y \to 1$; $h_1 = \lim\, (x - a)/(\ln x - \ln a)$, para $x \to a$; $h_2 = \lim (y^n - a^n)/(\ln y^n - \ln a^n)$, para $y \to a$; $k = \lim\, (\sqrt{x + a^2} - a)/(\sqrt{x + b^2} - b)$, para $x \to 0$.

2. Calcular, para $x \to 0$, los límites de:
$(e^{3x} + e^{-3x} - 2)/5\,x^2$; $(e^x - 1 - x)/\text{sen}^2 x$.

3. Calcular, para $x \to +\infty$, los límites de $x^2/(x - \text{sen}\, x)$; $[\ln (1 + x)]/x$; $[\ln (\ln x)]/x$; x^2/e^{x^2}; $[\ln (3 + 2\,e^x)]/x$; y para $x \to 0$, el límite de $\text{cotg} \sqrt{x}/\text{cotg}\, x$.

4. Calcular, para $x \to 0$, los límites de:
$x . e^{1/x}$; $x . \ln x$; $\text{cotg}\, 2\,x . \ln\, (1 + x)$.

5. Calcular, para $x \to +\infty$, los límites de:
$(2 . \text{arc tg}\, x - \pi) . x$; $x . \ln [(x + a)/(x - a)]$.

6. Calcular:
$l_1 = \lim\, (x^{-1} - \text{cotg}\, x)$ para $x \to 0$;
$l_2 = \lim\, (2\,x \sec x - \text{tg}\, x)$ para $x \to \pi/2$; $l_3 = \lim\, (\sec x - \text{tg}\, x)$ para $x \to \pi/2$; $l_4 = \lim\, [(1/\ln x) - x/(x - 1)]$ para $x \to 1$.

7. Calcular:
$l_1 = \lim\limits_{x \to 0} (\text{cotg}\, x)^{\text{tg}\, x}$; $l_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} (a + b\,x^m)^{1/(p + q \ln x)}$, $(m > 0,\, b > 0)$;
$h_1 = \lim\limits_{x \to 0} x^{\text{sen}\, x}$; $h_2 = \lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^{\ln \cos^2 x}$;
$k_1 = \lim\limits_{x \to 1} (1/x)^{\text{tg}\, \pi x/2}$; $k_2 = \lim\limits_{x \to 1} (2 - x)^{\text{tg}\, \pi x/2}$; $k_3 = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + a/x^2)^{x}$.

8. La función $f(x) = (2 - \cos 2x)^{1:\operatorname{sen} x}$, $f(n\pi) = 1$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, es continua.

9. De ej. 1, h, y § 28-2 deducir para $x \to 0$:
$\lim \operatorname{sen} x/(e^x - 1) = 1$; $\lim (e^{ax} - 1)/\operatorname{sen} bx = a/b$;
$\lim (e^{\operatorname{sen} x} - 1)/x = 1$; y para $x \to 0^+$: $\lim (e^{\operatorname{sen} x} - 1)/\sqrt{x} = 0$.

10. Calcular, para $x \to 0$: $l = \lim (\operatorname{tg} x - x)/(x - \operatorname{sen} x)$; $h = \lim x^2 \operatorname{sen} x^{-1} . (\operatorname{sen} x)^{-1}$; $k = \lim \ln \operatorname{tg} 2x/\ln \operatorname{tg} x$.

§ 37. Infinitésimos e infinitos. Asíntotas

1. Cálculo con infinitos. — Def.: Una variable dependiente, $y = \Phi(x)$, se llama *infinita para* $x \to \xi$, cuando tiene límite infinito para $x \to \xi$ $(\xi = x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty)$.

Suele decirse brevemente *un infinito*, pero debe entenderse que se trata de *variables* que tienden a ∞. No tiene sentido decir que Φ es un infinito, si no se especifica la variable independiente y para qué valor de ésta se toma el límite.

Ejemplos: 1. La función $1/x$ es *infinita* para $x \to 0$; en cambio, es un infinitésimo para $x \to \infty$.

2. Es infinita $\operatorname{tg} x$ para $x \to \pi/2$, pero no para $x \to \pi/4$.

El cálculo con infinitos es completamente análogo al de los infinitésimos (§ 24-3).

He aquí las proposiciones fundamentales:

a) La suma de una variable infinita con cualquier número finito de constantes o variables acotadas, es infinita.

Porque si los sumandos $y_1, y_2, \ldots, y_m$ se conservan en valor absoluto inferiores a K, y es $\lim y = \infty$, para que la suma $y + y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ supere al número prefijado H, basta tomar $|y| > H + mK$ y será:

$$|y + y_1 + y_2 + \ldots + y_m| \geqslant |y| - |y_1 + y_2 + \ldots + y_m| \geqslant |y| - mK > H.$$

Nota: Puesto que al sumar o restar a una variable infinita una constante cualquiera, o una variable finita cualquiera (tenga o no tenga límite), siempre resulta una variable infinita, se deduce, recíprocamente, que la diferencia de dos infinitos (o la suma), puede tener límite distinto en cada caso, o carecer de él. Únicamente al sumar infinitos de igual signo puede asegurarse que la suma es un infinito, y del mismo signo que ellos.

Si alguno de los infinitos carece de signo constante, o si ambos sumandos son infinitos de signos contrarios, se tiene el caso de indeterminación del límite $\infty - \infty$ (§ 36-4).

b) El producto de una variable infinita por cualquier número finito de constantes no nulas, o de variables que en valor absoluto se conservan superiores a una constante positiva, es infinito.

Porque si los valores absolutos de los factores $y_1, y_2, \ldots, y_m$ se conservan superiores a k, y tomamos $|y| > H : k^m$, resulta:

$$|y\, y_1\, y_2 \ldots y_m| = |y| \cdot |y_1\, y_2 \ldots y_m| > \frac{H}{k^m} \cdot k^m = H.$$

NOTA: Si un factor es infinito y otro infinitésimo, tenemos el caso de indeterminación del límite que hemos indicado con $\infty . 0$ (§ 36-4).

c) El cociente de un infinito por una constante no nula, o por una variable acotada superiormente en valor absoluto, es un infinito.

Es consecuencia inmediata de *b*), pues el valor absoluto de la recíproca de la constante o variable está acotado inferiormente por un número positivo.

NOTA: Si el denominador crece también infinitamente, tenemos el caso de indeterminación del límite que hemos indicado con ∞/∞ (§ 36-3).

2. **Comparación de infinitos.** — Para las variables infinitas pueden establecerse criterios de comparación análogos a los de los infinitésimos (§ 24-3, *c*).

a) Si $\Phi(x)$ es un infinito para $x \to \xi$, podemos compararlo con un *infinito tipo* o *principal*; por ejemplo, $H(x) = x$ (si $\xi = \infty, +\infty, -\infty$), o bien: $H(x) = 1/(x - \xi)$ (si $\xi = x_0, x_0^+$ x_0^-) y sus potencias.

a_1) Dados dos infinitos, $\Phi(x)$ y $\Psi(x)$, diremos que son *del mismo orden* si $\Phi = O(\Psi)$ y $\Psi = O(\Phi)$, y que Φ es *de orden inferior* a Ψ, si $\Phi = o(\Psi)$. [Nótese la diferencia con § 24-3, c_1].

a_2) Diremos que $\Phi(x)$ es *de orden p* (con respecto al infinito H), si existen dos constantes positivas, k y K. tales, que en un entorno de ξ (§ 24-6) : $0 < k < |\Phi(x)/H^p| < K$, o lo que es lo mismo, si $\Phi(x)$ y H^p son del mismo orden.

Si $H^p = o(\Phi)$ diremos que Φ es de *orden superior* a p.

a_3) Diremos que el infinito $\Phi(x)$ es de *orden no mayor que p*, si $\Phi(x) = O(H^p)$. En este caso, para $p < q$ es también $\Phi(x) = o(H^q)$.

a_4) Diremos que $\Phi(x)$ es *por lo menos de orden p* si $H^p = O(\Phi)$. Entonces, si $q < p$ es $H^q = o(\Phi)$, es decir Φ es de orden superior a q. Así para $x \to 0$, el infinito $x^{-1} \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$ no es de orden 1, ni de orden no mayor que 1, pero es por lo menos de orden 1. [Nótese la diferencia con (§ 24-3, c_3)].

En particular, son del mismo orden Φ y Ψ si existe y es finito y no nulo el límite de su cociente: $\lim \Phi/\Psi = \alpha \neq 0$. En este caso, tendremos (§ 24-3, b_3) $\Phi \sim \alpha \Psi$. Cuando $\alpha = 1$, es decir: $\Phi \sim \Psi$, diremos que Φ y Ψ son *infinitos equivalentes*.

TEOR. 1: *Si a un infinito $\Phi(x)$ se le suma uno de orden inferior $\Psi(x)$, se obtiene un infinito equivalente al primero.*

DEM.: $(\Phi + \Psi)/\Phi = 1 + \Psi/\Phi \to 1$.

Como recíprocamente, para $\Psi = X - \Phi$, de $X/\Phi \to 1$ resulta $\Psi/\Phi \to 0$, se tiene:

TEOR. 2: *La diferencia de dos infinitos equivalentes es otro de orden inferior a ellos,* o bien una variable o constante no infinita.

Del teorema 1 resulta, además:

TEOR. 3: *El orden de una suma de infinitos es el del sumando que lo tenga mayor, siempre que éste sea único.*

Este sumando se llama *principal.*

Lo dicho en § 24-3, nota, se aplica *mutatis mutandis* a las variables infinitas.

Aplicando el teorema 3 a un polinomio, resulta:

TEOR. 4: *Para $x \to \infty$, todo polinomio en x es un infinito equivalente a su término de grado más elevado; y este grado expresa el orden de infinitud.*

3. **Órdenes fundamentales de infinitud.** — Las funciones

$$\underset{(b>1,\ m>0)}{(\log_b x)^m} \quad ; \quad \underset{(p>0)}{x^p} \quad ; \quad \underset{(a>1)}{a^x} \quad ; \quad \underset{(k>0)}{x^{kx}}$$

son infinitas *para* $x \to +\infty$ (¿por qué?); pero cada una de ellas es de orden inferior a las siguientes, como muestran los teoremas que siguen:

TEOR. 1: *El infinito exponencial $a^x (a > 1)$ es de orden superior al infinito potencial $x^p (p > 0)$ por grande que sea p.*

DEM.: Poniendo

$$n = \begin{cases} = p & \text{si } p \text{ es entero} \\ = [p] + 1 & \text{si } p \text{ no es entero,} \end{cases}$$

y aplicando la regla de BERNOULLI - L'HOSPITAL n veces al cociente, x^p/a^x, se tiene (§ 36-3. *c*):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p\, x^{p-1}}{a^x \ln a} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x (\ln a)^n\, x^{n-p}} = 0.$$

TEOR. 2: *El infinito logarítmico,* $\log_b x$ $(b > 1)$, *es de orden inferior al infinito potencial,* x^p, *por pequeño que sea* $p > 0$.

En efecto, si llamamos

$$y = \log_b x, \quad \text{resulta:} \quad x^p = (b^y)^p = (b^p)^y,$$

y siendo x^p una exponencial de y, basta aplicar el teorema anterior y resulta que no sólo el logaritmo, sino *cualquier potencia del logaritmo, es de orden inferior al potencial,* por pequeño que sea el exponente p.

Como el cambio de base equivale a multiplicar o dividir por una constante (módulo) que no altera el orden de infinitud, tomaremos logaritmos naturales.

TEOR. 3: *Cualquiera sea el coeficiente $k > 0$ del exponente, el infinito potencial-exponencial x^{kx} es de orden superior al infinito exponencial a^x.*

En efecto, la razón de ambos es:

$$\frac{x^{kx}}{a^x} = \left(\frac{x^k}{a}\right)^x > 2^x,$$

puesto que llega a ser $x^k > 2a$ tomando x suficientemente gran-

de, luego, el cociente tiene límite infinito. He aquí, pues, los cuatro tipos de infinitud, que llamaremos *fundamentales*:

logarítmico	potencial	exponencial	potencial-exponencial
$(\ln x)^m$	x^p	a^x	x^{kx}
$(m > 0)$	$(p > 0)$	$(a > 1)$	$(k > 0)$

Tiene importancia especial el infinito $x\,!$, función que por ahora suponemos definida solamente para valores *naturales* de x. Según demostraremos (§ 53), se verifica:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\,!\; e^x}{x^{x+\frac{1}{2}}} = \lim_{x \to \infty} \left(x\,! : \frac{x^x . x^{\frac{1}{2}}}{e^x} \right) = \sqrt{2\pi}.$$

Es decir, $x\,!$ es del mismo orden que $\dfrac{x^x . x^{\frac{1}{2}}}{e^x}$ o con mayor precisión:

$x\,!$ es un infinito equivalente a $\sqrt{2\pi}\,\dfrac{x^x . x^{\frac{1}{2}}}{e^x}$ (STIRLING).

Resulta de aquí que el infinito factorial $x\,!$ *es del tipo potencial-exponencial*, pues resulta de multiplicar y dividir x^x por infinitos de órdenes inferiores.

4. Órdenes infinitesimales fundamentales. — Tomando las inversas de los tipos fundamentales de infinitud (§ 37-3), tendremos los tipos infinitesimales fundamentales, *para* $x \to +\infty$:

logarítmico	potencial	exponencial	potencial-exponencial
$(\ln x)^{-m}$, $(m > 0)$	x^{-p}, $(p > 0)$	a^{-x}, $(a > 1)$	x^{-kx}, $(k > 0)$

y los teoremas de § 37-3 prueban que cada uno de estos infinitésimos es de orden inferior a los que le siguen en la enumeración anterior.

Para $x \to 0$ se tiene el siguiente teorema:

TEOR.: *La función* $1/\ln|x|$ *es para* $x \to 0$ *infinitésimo de orden inferior a cualquier potencia* x^p $(p > 0)$, *y ésta es, a su vez, de orden inferior a* $a^{-|1/x|}$, $(a > 1)$.

Basta probar que tienden a cero los cocientes:

$$\frac{x^p}{1 : \ln|x|} = -\frac{\ln|1/x|}{(1/x)^p} \quad ; \quad \frac{a^{-|1/x|}}{x^p} = \frac{(1/x)^p}{a^{|1/x|}},$$

pero esto resulta de § 37-3, teor. 2 y 1, observando los segundos miembros, donde $1/x \to \infty$ para $x \to 0$.

5. Escalas de infinitésimos e infinitos. — Tomando $\varphi(x) = x$ como infinitésimo (infinito) tipo para $x \to 0$ $(x \to \infty)$, x^p será infinitésimo (infinito) de orden p; pero las consideraciones de § 37-3 y 4 muestran que esta escala, dependiente de un parámetro p, está muy lejos de ser completa.

Por ejemplo: para $x \to +\infty$, $x^{1+\varepsilon}$, $(\varepsilon > 0)$, es un infinito de orden $1+\varepsilon$, y $x \ln x$ lo es de orden superior a 1 pero inferior a $1+\varepsilon$ cualquiera sea $\varepsilon > 0$. Como ningún número tiene esta propiedad, no es posible asignar un número a cada orden.

NOTA: Puede probarse que la relación $\varphi = o(\psi)$ entre variables infinitésimas o infinitas, o sea la de sus órdenes, es un orden con la propiedad de composición o dirección (§ 2-7, nota 2) en cualquiera de los sentidos en que se considere la relación de prioridad. Este orden es noarquimediano (§ 6-5, *b*).

Por otra parte, dos infinitos (o dos infinitésimos) pueden no ser comparables en cuanto al orden, como muestra el siguiente ejemplo, considerado por COURANT:

EJEMPLO: Para $x \to \infty$, el cociente de infinitos $\dfrac{x^2 \operatorname{sen}^2 x + x + 1}{x^2 \cos^2 x + x}$ no sólo no tiene límite, sino que para los múltiplos enteros de π: $x = n\pi$, sus valores son $1/(n\pi) \to 0$, y para $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ son $(n + \frac{1}{2})\pi + 1 + \dfrac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi} \to \infty$.

6. Asíntotas y direcciones asintóticas de las curvas planas. — *a*) Se dice que un punto se aleja infinitamente sobre una curva, cuando su abscisa o su ordenada, o ambas coordenadas, crecen infinitamente.

Se llama *asíntota* una recta t tal que tiende a cero la distancia Pt a ella, de un punto P de la curva que se aleje infinitamente. Distinguiremos tres casos, según que tienda a infinito x, ó y, ó ambas.

1º Si para $x \to \infty, +\infty, -\infty$, es $\lim y = b$ finito, la recta $y = b$ es una asíntota, paralela al eje x.

2º Si para $x \to a$ finito, es $y \to \infty, +\infty, -\infty$, la recta $x = a$ es una asíntota, paralela al eje y.

3º Si al alejarse infinitamente un punto sobre una rama de la curva x e y crecen infinitamente, para que la recta $y = mx + n$ sea una asíntota basta con que tienda a cero la diferencia de ordenadas de recta y curva para la misma abscisa, pues esta diferencia da la distancia Pt, a menos de un factor coseno. Por consiguiente, la ecuación de la curva puede escribirse en la forma:

[37-1] $$y = mx + n + \varepsilon(x),$$

siendo $\varepsilon(x)$ un infinitésimo para $x \to \infty, +\infty$ ó $-\infty$.

EJEMPLOS: 1. Consideremos la función $y = (x + 1)/(x - 1)$.

Si damos a x el valor 1, la función carece de valor numérico; pero si $x \to 1$, el denominador $x - 1$ es un infinitésimo, y la función tiene límite ∞, con signo + ó — según sea $x > 1$, ó bien $x < 1$; porque siendo positivo el numerador, la fracción tiene el mismo signo del denominador; la curva se aleja, pues, infinitamente hacia arriba para valores próximos al $x = 1$, pero situados a la derecha; y hacia abajo para los valores a la izquierda del $x = 1$. Es $\lim y = \infty$, y entonces la recta $x = 1$ es una asíntota de la curva. Si hacemos crecer infinitamente x hacia la derecha o hacia la izquierda, es decir, tomando valores positivos o negativos, la ordenada y tiende hacia 1, pues difiere de 1 en la fracción $2:(x - 1)$, que es infinitésima; luego, $\lim y = 1$. La recta $y = 1$ es otra asíntota (fig. 113).

2. Sea la función $\dfrac{x^2 + 2x}{x - 2}$.

Con razonamiento análogo resulta:

$\lim y = \infty$ para $x \to 2$; $\lim y = \infty$ para $x \to \infty$.

La curva (fig. 114) tiene, por lo tanto, una asíntota $x = 2$; para estudiar la otra rama infinita, separemos del cociente su parte entera, y tendremos:

$$y = x + 4 + \frac{8}{x - 2}.$$

Si construímos la recta $y = x + 4$, la diferencia de ordenadas con la curva es una fracción infinitésima, para $x \to \infty$; luego, también la recta

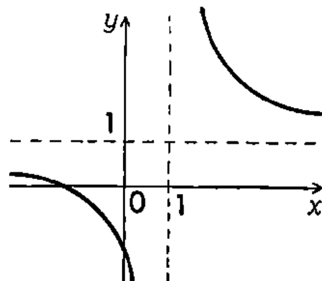


Fig. 113.

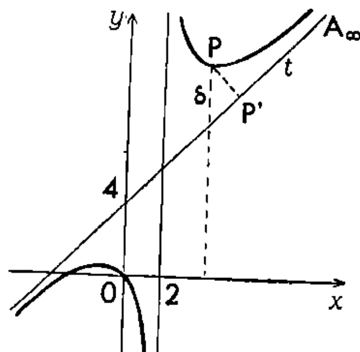


Fig. 114.

$y = x + 4$ es asíntota, quedando la curva por encima de ella, en el primer cuadrante; por debajo en el tercero.

Para que este error sea menor que 0,01, deberá tomarse x superior a 800, es decir: la aproximación de la curva a su asíntota es muy lenta.

b) De [37-1] resulta $\dfrac{y}{x} = m + \dfrac{n}{x} + \dfrac{\varepsilon(x)}{x}$,

y entonces:

[37-2] $\lim \dfrac{y}{x} = m$, para $x \to \infty$, $+\infty$ ó $-\infty$;

pero no puede pasarse recíprocamente de [37-2] a [37-1], pues para que $\dfrac{\varepsilon(x)}{x}$ sea infinitésimo, no es preciso que lo sea $\varepsilon(x)$.

Cuando se verifica [37-2], diremos que la dirección (§ 1-6, ej. 1) de pendiente o coeficiente angular m es una *dirección asintótica* de la curva. Como la dirección de una asíntota es una dirección asintótica, se comienza por hallar estas últimas (puede haber varias, correspondientes a distintas ramas de la curva). Buscando luego

[37-3] $\lim (y - m x)$, para $x \to \infty$, $+\infty$ ó $-\infty$,

pueden presentarse tres casos:

b_1) Si este límite existe y es finito n, reencontramos [37-1], y la recta $y = m x + n$ es una asíntota; la rama de la curva que tiene asíntota se llama *hiperbólica*.

b_2) Si el límite [37-3] es $+\infty$ ó $-\infty$, la rama de la curva se llama *parabólica*. Tal ocurre con $y = +\sqrt{x}$, donde para

$$x \to +\infty: \; m = \lim \frac{+\sqrt{x}}{x} = 0, \; \text{pero} \; y - 0.x = +\sqrt{x} \to +\infty.$$

La otra rama de la parábola, $y = \pm\sqrt{x}$, es también parabólica con igual dirección asintónica $m = 0$.

b_3) Puede ocurrir, finalmente, que para una dirección asintótica no exista el límite [37-3].

NOTA: Usando el lenguaje geométrico de los elementos impropios, podemos decir que una dirección asintótica es un *punto impropio* A_∞ de la curva, y los casos b_1), b_2) y b_3) corresponden, respectivamente, a que en A_∞ haya *tangente propia, tangente impropia* o *no haya tangente* (§ 30-4).

EJEMPLOS: 3. La curva $y = x \operatorname{sen} \pi/x$ (fig. 59) tiene la dirección asintótica del eje x, pues $y : x \to 0$.

Como $\lim\limits_{x \to \infty} y = \pi \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} \pi/x}{\pi/x} = \pi$ es $y = \pi$ asíntota.

4. La parábola $y^2 = x$ tiene un solo punto impropio A_∞: el del eje x; en él la tangente es la recta impropia.

5. La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ tiene la dirección asintótica del eje x, pues $y : x \to 0$. Como $\lim\limits_{x \to \infty} (y - 0.x) = \lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ no existe, la sinusoide no tiene tangente en su punto impropio.

6. La curva $y = x . \operatorname{sen} x$ se aleja infinitamente, pero no tiene dirección asintótica, es decir, no tiene ningún punto impropio.

A veces se buscan directamente las asíntotas, sin pasar por las direcciones asintóticas, como muestran los ejemplos 1 y 2 y los que siguen:

EJEMPLOS: 7. Si la ecuación es $y = P(x) : Q(x)$, siendo el grado del polinomio dividendo $P(x)$, superior en 1 al grado del polinomio divisor $Q(x)$, efectuada la división y sacada la parte entera $mx + a$, la fracción complementaria tiende a 0, por tener el numerador de menor grado que el denominador; luego, se tiene la asíntota $y = mx + a$.

Sea, por ejemplo: $$y = \frac{2x^2 - 3}{x + 1},$$

la parte entera es $2x - 2$; luego, la ecuación de una asíntota es $y = 2x - 2$. Otra asíntota es $x = -1$.

8. $y^2 = x^2 + a$. Es infinitésima la diferencia $\sqrt{x^2 + a} - x$ al crecer x infinitamente; porque multiplicando y dividiendo por la suma, se puede escribir así:

$$\frac{(x^2 + a) - x^2}{\sqrt{x^2 + a} + x} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a} + x},$$

que es infinitésimo, como recíproco de una variable que crece infinitamente. Luego, la recta $y = x$ es asíntota.

Análogamente: es infinitésima, al crecer x infinitamente, la diferencia

$$\sqrt{(ax + b)^2 + c} - (ax + b),$$

y entonces la curva $y = \sqrt{(ax + b)^2 + c}$ tiene la asíntota $y = ax + b$

9. Sea la cónica:

$$3x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 2y - 2 = 0.$$

Despejando, resulta:

$$y = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 3};$$

luego, las dos asíntotas son (ej. 8):

$$y = 2x - 1 + (x+2) = 3x + 1,$$
$$y = 2x - 1 - (x+2) = x - 3.$$

EJERCICIOS

1. Demostrar la equivalencia, para $n \to \infty$, de las funciones:
$10x^4 + x$; $(x+1)^5 - (x-1)^5$; $(2x^2 - 1)(5x^2 + 1)$.

2. Ordenar las funciones siguientes por orden de infinitud para $x \to \infty$: $x!/2^x$; $2^x/x^3$; $x^x/x!$; $e^x/\sqrt{x}$.

3. Calcular la parte principal, para $n \to \infty$, de $n!/(n-m)!$.

4. Averiguar a qué tipo de infinitud pertenece ln $(x!)$.

5. Probar que para $x \to \infty$, toda función racional, o bien tiende a una constante no nula, o bien es un infinito o infinitésimo potencial.

6. Demostrar que e^x no es una función algebraica, basándose en su orden de crecimiento.

7. Probar que no son algebraicas las funciones ln x, hiperbólicas, circulares (considérese sen $x = 0$, etc.).

8. Determinar las asíntotas y representar:
a) $y = (x+2)/(x-2)$; *b*) $y = (2x - 1)/x$; *c*) $y = 1/(x-2)$.

9. Determinar las asíntotas de $y = x^3/(x^2 - 1)$, y verificar que la curva corta a una de ellas.

10. Determinar las asíntotas de las curvas:
a) $x^3 y - x^4 - y + 1 = 0$; *b*) $x^2 - 2y^2 + 4xy - x + 1 = 0$.

11. Determinar las asíntotas de $y^2 = x^2(x-1)/(x-2)$, y verificar que la curva corta a dos de ellas.

12. ¿Es siempre la asíntota posición límite de la tangente cuyo punto de contacto se aleja al infinito sobre la curva? Considerar las funciones: $y = x^{-1}$ sen x^2; $y = e^{-x}$ sen e^x.

NOTAS AL CAPÍTULO IX

I. **Cálculo logarítmico.** — *a*) *Propiedades fundamentales.* — En la práctica de los cálculos numéricos, los logaritmos más ventajosos son los decimales o de base $a = 10$, indicados con lg (§ 8-8, c_2), porque siendo 10 la base del sistema de numeración, todas las reglas se simplifican.

En este sistema, todos los números enteros, excepto las potencias 10, 10^2, 10^3, ... tienen logaritmo irracional (Cap. IV, nota I, *d*), y por lo tanto, sólo se pueden calcular con cierta aproximación. La parte entera del logaritmo suele llamarse *característica*, y la parte decimal, *mantisa*.

a_1) El manejo de los logaritmos negativos se facilita si se los transforma en otros de característica negativa y mantisa positiva, del siguiente modo: Sea el logaritmo $-C, a\,b\,c \ldots l$, de característica $-C$ y mantisa $-0, a\,b\,c \ldots l$; se tiene:

$$-(C, a\,b\,c \ldots l) = -C - 0, a\,b\,c \ldots l = -(C+1) + (1 - 0, a\,b\,c \ldots l),$$

y como el número $0, a'\,b'\,c' \ldots l'$ obtenido en el segundo paréntesis es positivo y menor que 1, resulta: $-(C+1) + 0, a'\,b'\,c' \ldots l'$, que suele escribirse convencionalmente así:

$$-C, a\,b\,c \ldots l = \overline{C+1}, a'\,b'\,c' \ldots l'.$$

Observando que al restar $0, a\,b\,c \ldots l$ de 1, las cifras a', b', c'.

obtenidas son los complementos a 9 de las cifras a, b, c, ..., excepto la última cifra significativa l', que es $10 - l$, resulta esta regla:

Un logaritmo negativo se transforma en otro de característica negativa y mantisa positiva, aumentando en 1 *el valor absoluto de la característica, y sustituyendo cada cifra de la mantisa por su complemento a* 9, *excepto la última significativa, que se sustituye por su complemento a* 10. *El paso inverso se efectuará disminuyendo en* 1 *el valor absoluto de la característica, y sustituyendo la mantisa por su complementaria.*

EJEMPLO 1: $-3{,}07254 = \bar{4}{,}92746$; $-0{,}32550 = \bar{1}{,}67450$.

Para evitar el trazo superior, algunos suelen incrementar en 10 la característica cuando esto no puede producir confusión. Así, en los ejemplos anteriores escriben: 6,92746 y 9,67450.

El *cologaritmo* de un número a se define mediante:

$$\operatorname{colg} a = \lg \frac{1}{a} = -\lg a.$$

En la extracción de raíces de números menores que la unidad, es frecuente tener que dividir por un entero un logaritmo de mantisa positiva, y cuya característica negativa no sea múltiplo del divisor. Entonces se descompone la característica en un múltiplo negativo del divisor más un entero positivo, que se agrega a la mantisa.

EJEMPLO 2. $\bar{1}{,}67450 : 5 = (\bar{5} + 4{,}67450) : 5 = \bar{1}{,}93490$.

a_2) *La característica del logaritmo de un número mayor que* 1 *es el número h de cifras de la parte entera, disminuído en* 1. *La característica del logaritmo de un número menor que* 1 *es el número total k de ceros anteriores a la primera cifra significativa y con signo* —.

En el primer caso, el número está comprendido entre 10^{h-1} y 10^h; luego, su logaritmo está comprendido entre $h - 1$ y h, y su parte entera es, por lo tanto, $h - 1$. En el segundo caso, el número está comprendido entre

$$\frac{1}{10^k} = 10^{-k} \quad \text{y} \quad \frac{1}{10^{k-1}} = 10^{-k+1};$$

luego, el logaritmo está comprendido entre $-k$ y $-k+1$, es decir, es igual a $-k$ más un número positivo menor que 1; luego, su característica es $-k$.

EJEMPLO 3. Los logaritmos de 2307,43, de 5,08, de 0,207 y de 0,00057, tienen las características 3, 0, $\bar{1}$ y $\bar{4}$, respectivamente.

a_3) El cálculo del logaritmo de cualquier número se reduce, pues, a la obtención de la mantisa, y para esto basta saber hallar las mantisas de los logaritmos de todos los números comprendidos entre dos potencias consecutivas 10^m y 10^{m+1}. En efecto: *La mantisa del logaritmo de un número no altera si se multiplica o divide al número por una potencia de* 10. Porque al hacer tal cosa, el logaritmo aumenta o disminuye en un entero, modificándose sólo la característica.

b) *Problema directo.* — Dado un número cualquiera, modificando convenientemente la posición de la coma, se puede lograr que resulte un número entero n contenido en la tabla o un número $n + h$ comprendido entre dos consecutivos n y $n + 1$ de la tabla. En el primer caso, basta copiar la mantisa dada por la tabla, y en el segundo caso, el logaritmo de $n + h$ puede hallarse por interpolación lineal, como vimos (§ 35-5, ej.).

Si los logaritmos dados por las tablas fuesen exactos, tendríamos, por consiguiente, el logaritmo de $n + h$, conocido el de n y la diferencia tabular Δ (§ 35-5, ej.). Pero los números L y L', que las tablas dan como logaritmos de n y de $n + 1$, adolecen de errores ε y ε', respectiva-

mente, que pueden llegar a media unidad de su último orden decimal(*); luego, al aplicar la fórmula de interpolación [35-7] $\lg(n+h) = \lg n + h\Delta$, además del error de interpolación cometemos un error $\varepsilon + h(\varepsilon' - \varepsilon)$; y si además tomamos del número $h\Delta$ su parte entera por defecto o por exceso, según que su primera decimal sea < 5, ó bien $\geqq 5$, cometemos un nuevo error ε'', inferior a media unidad.

Por consiguiente, el error total es $\varepsilon(1-h) + h\varepsilon' + \varepsilon''$, cuyo valor absoluto es seguramente inferior a unidad y media.

Cuando las tablas señalan los logaritmos por exceso, convendrá tomar ε'' menor que media unidad, como antes se ha indicado, cuando ε y ε' tengan signos contrarios; pero si tienen el mismo signo tomaremos $|\varepsilon''| < 1$ con signo opuesto. El error total es < 1.

EJEMPLO 4. Calcular los logaritmos de 0,112915 y de 933603142.

lg 1129	052694		lg 9336	970161
0,1	38,4		0,03	1,38
0,05	19,20			
lg 0,112915 = $\bar{1}$,052752			lg 933603142 = 8,970162	

En el primer caso ha sido preciso considerar los productos de todas las cifras decimales, porque todas influyen en el resultado, pero con escribir hasta las décimas de cada producto parcial es suficiente (Cap. V, nota II, f_1). En el segundo ejemplo, las cifras 1, 4 y 2 no influyen en el resultado.

Si el número 0,112915 tiene un error menor que una unidad de su último orden, como la diferencia tabular es 384, el logaritmo puede tener hasta 3 millonésimas de error. Si el segundo número dado tiene sus cifras exactas (Cap. V, nota II, *b*), puede asegurarse que son exactas las del logaritmo.

c) *Problema inverso.* — Dado un logaritmo, calcular el número correspondiente. Encontradas en las tablas dos mantisas consecutivas, L y $L + \Delta$, que comprendan a la dada $L + k$, el número buscado ha de estar comprendido (§ 27-3, *c*) entre los dos números consecutivos n y $n+1$ correspondientes a dichas dos mantisas. Por lo tanto, llamando ε y ε' a los errores de los logaritmos L y $L + \Delta$, ha de ser:

$$n < n + h < n + 1$$
$$L + \varepsilon < L + k < L + \Delta + \varepsilon',$$

y la proporcionalidad supuesta en la interpolación lineal da el resultado siguiente, que puede considerarse como exacto, por la razón dicha en § 35-5, ej., dentro del orden de aproximación prefijado por las tablas:

$$h = \frac{k - \varepsilon}{\Delta + \varepsilon' - \varepsilon}.$$

Si en vez de $-\varepsilon$ ponemos su valor máximo $+\frac{1}{2}$, esto equivale a sumar al numerador y al denominador un mismo número; luego, la fracción aumenta; si ponemos en vez de $-\varepsilon$ su valor mínimo $-\frac{1}{2}$, la fracción disminuye; por lo tanto:

$$\frac{k - \frac{1}{2}}{\Delta + \varepsilon' - \frac{1}{2}} < h < \frac{k + \frac{1}{2}}{\Delta + \varepsilon' + \frac{1}{2}},$$

y si en vez de ε' ponemos sus valores mínimo $-\frac{1}{2}$ y máximo $+\frac{1}{2}$, resulta:

$$\frac{k}{\Delta} - \frac{1}{2\Delta} = \frac{k - \frac{1}{2}}{\Delta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} < h < \frac{k + \frac{1}{2}}{\Delta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{k}{\Delta} + \frac{1}{2\Delta}.$$

* En todos los cálculos logarítmicos convendremos, por brevedad del lenguaje, en considerar como números enteros las mantisas, lo que equivale a adoptar como unidad fundamental la unidad decimal del último orden.

Resulta, pues, que el error absoluto cometido al tomar $\frac{k}{\Delta}$ como valor del incremento de n, es inferior a $\frac{2\Delta}{1}$; al calcular aquel cociente, bien sea por la regla ordinaria de la división, bien sea por las tablillas de partes proporcionales que acompañan a las tablas, se comete un nuevo error, que puede hacerse inferior a media unidad del último orden conservado, incrementando la última cifra, si la siguiente fuese $\geqq 5$. Ahora bien, ¿hasta qué cifra puede calcularse este cociente para que todas ellas sean exactas?

Consideremos una tabla de 6 decimales (e_2) entre $n = 1.000$ y $n = 10.000$; desde el número 1000 hasta el 4308 es $\Delta > 100$; luego, el error de la fórmula k/Δ es menor que 0,005; calculando este cociente con error absoluto menor que media centésima, el error total será $\varepsilon < 0{,}01$, es decir, obtenemos por interpolación *dos cifras exactas*.

Desde 4308 hasta 9999, es $43 < \Delta < 100$; luego, el error de la fórmula k/Δ es menor que $\frac{1}{86} < 0{,}05$, y por lo tanto, calculando el cociente con error menor que media décima, obtenemos por interpolación *una sola cifra exacta*.

d) Tablas de logaritmos de sumas. — Para calcular el logaritmo de una suma $a + b$, conocidos $\lg a$ y $\lg b$, es preciso hallar los antilogaritmos a y b, y luego calcular $\lg (a + b)$. Las tablas llamadas de GAUSS permiten, como veremos, simplificar notablemente este cálculo.

Constan, esencialmente, de dos columnas; en la columna A están los valores de $\lg x$, dispuestos en progresión aritmética; en la B, los valores de $\lg (x + 1)$. Conocido el logaritmo de un número se tiene, pues, enfrente (sin necesidad de hallar x) el logaritmo del mismo número aumentado en 1; y buscando en la columna B un logaritmo dado, se tiene en la A el logaritmo del número disminuído en 1.

Cuando el logaritmo dado no figura en las tablas, se efectúa la interpolación, como en las tablas ordinarias de logaritmos.

Dados $\lg a$ y $\lg b$, se calcula fácilmente $\lg (a + b)$, observando que:

$$\lg (a + b) = \lg \left[b \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \right] = \lg b + \lg \left(\frac{a}{b} + 1 \right).$$

Comenzaremos, pues, por calcular $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$; en la columna B se busca $\lg \left(\frac{a}{b} + 1 \right)$, como antes se ha explicado, y se le suma $\lg b$.

El cálculo de $\lg (a - b)$, siendo $a > b$, es análogo. Basta observar que

$$\lg (a - b) = \log \left[b \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \right] = \lg b + \lg \left(\frac{a}{b} - 1 \right).$$

Para obtener $\lg \left(\frac{a}{b} - 1 \right)$ puede usarse la misma tabla, pasando de la columna B a la A, pero algunas colecciones traen tablas separadas "de sustracción", como las de HOÜEL (e_2), donde además, frente a $\lg x$, figura, respectivamente, $\lg \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ y $\lg \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-1}$, de modo que se usan basándose en:

$$\lg (a + b) = \lg \left[a \left(1 + \frac{1}{a : b} \right) \right]$$

y $$\lg(a-b) = \lg\left[a\left(1-\frac{b}{a}\right)\right] = \lg\left\{a:\left(1-\frac{1}{a:b}\right)^{-1}\right\},$$

como muestran los ejemplos que siguen:

EJEMPLOS: 3.

$\lg a = 3{,}15186$
$\lg b = 2{,}91843$
$\lg \frac{a}{b} = 0{,}23343$

A	B
0,233	0,19997
0,234	0,19960
	Δ = — 37

$0{,}43\,.\,(-37) = -\ 16$

	0,19997
0,43.(— 37) =	— 16
	0,19981
lg a =	3,15186
lg (a + b) =	3,35167

4.

$\lg a = 1{,}81620$
$\lg b = 1{,}38196$
$\lg \frac{a}{b} = 0{,}43424$

A	B
0,4342	0,19926
0,4343	0,19920
	Δ = — 6

	0,19926
0,4.(— 6) =	— 2
	0,19924
lg a =	1,81620
lg (a — b) =	1,61696

e) *Tablas de logaritmos.* — e_1) Algunas colecciones de tablas varias (Cap. VII, nota II, *d*) contienen breves tablas logarítmicas.

e_2) Entre las tablas de precisión media, muchas de las cuales traen valores logarítmicos y naturales de funciones circulares, tablas auxiliares más precisas, etc., citaremos las siguientes, ordenadas según su número de cifras:

H. SCHUBERT: *Vierstellige Tafeln und Gegentafeln...* (W. de Gruyter, Berlín y Leipzig, 1938);

O. MÜLLER y M. RAJNA: *Tavole di logaritmi con cinque decimali.* (26ª edic. por L. GABBA; Hoepli, Milán, 1935);

J. HOÜEL: *Tables des logarithmes à cinq décimales.* (Gauthier-Villars, París, 1ª edic. 1858, y muchas posteriores. Versión castellana, edit. Mundo Científico, La Plata, 1942);

V. VÁZQUEZ QUEIPO: *Tablas de los logaritmos vulgares de los números 1 hasta* 20.000 *y de las líneas trigonométricas, con* 6 *decimales.* (32ª edic., Hernando, Madrid, 1949).

e_3) De mayor precisión son las tablas siguientes:

L. SCHRÖN: *Siebenstellige gemeine Logarithmen...* (Vieweg, Branschweig; 1ª edic. 1860, y muchas posteriores, totales o parciales, y en otros idiomas). Números 10.000 a 100.000, 7 decimales; 100.000 a 108.000, 8 decimales;

G. VON VEGA - C. BREMIKER: *Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch.* (1856, 1ª edic. de BREMIKER = 40ª edic. del Handbuch; 1935, 94ª edic. del Handbuch, Weidmann, Berlín). 7 decimales, números hasta 1.000.000;

J. MENDIZÁBAL y TAMBORREL (8 dec., 10.000 a 125.000);

J. BAUSCHINGER y J. PETERS (8 dec.; 20.000 a 200.000);

G. VON VEGA (10 dec.; 1 a 101.000), y la obra monumental de

A. J. THOMPSON: *Logarithmetica Britannica* (20 dec., 10.000 a 100.000), vol. I (10.000 a 50.000), vol. II (50.000 a 100.000), Cambridge Univ. Press., 1954.

Ver más referencias en la obra citada (Cap VII, nota II, *c*) de FLETCHER, MILLER y ROSENHEAD.

e_4) Las tablas de logaritmos de sumas se llaman de GAUSS, con plena injusticia, pues en verdad fueron ideadas por LEONELLI. Su importancia, y la de los logaritmos de toda clase, ha decrecido mucho con la difusión de las máquinas de calcular.

Tablas especiales de logaritmos de sumas con siete cifras, son las de

T. WITTSTEIN: *Siebenstellige Gaussische Logarithmen...* (Hahn, Hannover, 1866).

Algunas de las tablas antes citadas, como las de HOÜEL y de MÜLLER-RAJNA, contienen tablas especiales para sumas y diferencias.

II. Relación de Peano. — Si las funciones $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ son derivables en (a, b), y continuas en el intervalo *cerrado* $[a, b]$, vale la relación establecida por PEANO en 1884:

[IX-1] $$\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0, \qquad (a < \xi < b).$$

En efecto, la función
$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$$
se anula (§ 13-2, *c*) para $x = a$ y para $x = b$, y cumple las condiciones del teorema de ROLLE (§ 35-2), de donde resulta [IX-1], siendo ξ un cierto valor comprendido entre a y b (no necesariamente único).

Para $h(x) = 1$ resulta, con ciertas restricciones, el teorema de CAUCHY (§ 35-8), y si además $g(x) = x$, se obtiene el teorema de LAGRANGE (§ 35-1), en forma restringida.

III. Criterio de Stolz. — He aquí el correlativo de la regla de BERNOULLI - L'HOSPITAL:

Si para $x \to \infty$, *existe*
$$\lim \frac{f(x+1) - f(x)}{\varphi(x+1) - \varphi(x)} = \lambda, \quad \textit{es también} \quad \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda$$
en los dos casos siguientes:

1º *Si es* $\lim f(x) = \lim \varphi(x) = 0$ *y la función* $\varphi(x)$ *es monótona*;

2º *Si la función* $\varphi(x)$ *es monótona divergente, equivalente a* $\varphi([x])$, *y además es* $f(x) - f([x]) = o\{\varphi(x)\}$, *para* $x \to \infty$ (§ 24-3 *b*).

Por $[x]$ representamos la parte entera de x (§ 23-3, ej. 3).

Con sólo poner $f(x)$ en vez de α_n, y $\varphi(x)$ en lugar de β_n, la demostración dada en capítulo V, nota I, *d*) para límites aritméticos, es válida para límites funcionales en el caso 1º de aquí (2º de allí). Las restricciones impuestas en el caso 2º de aquí (1º de allí) nos permiten pasar fácilmente del límite aritmético de $f(n)/\varphi(n)$, al funcional de $f(x)/\varphi(x)$, con $n = [x]$.

En particular, si en el 2º caso se supone $\varphi(x) = x$, resulta:

COROLARIO: *Si* $f(x) - f([x]) = o(x)$, *y existe* $\lim\{f(x+1) - f(x)\} = \lambda$ *para* $x \to \infty$, *es también* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

ESCOLIOS: 1. Si se prescinde de la condición impuesta a $f(x)$, el teorema puede no verificarse, como sucede, por ejemplo, con la función $f(x) = \operatorname{tg} \pi x$.

Para ella se verifica:
$$\lim_{x \to \infty} [\operatorname{tg} \pi(x+1) - \operatorname{tg} \pi x] = 0,$$
es decir, existe el límite $\lambda = 0$, y sin embargo, $\frac{\operatorname{tg} \pi x}{x}$ carece de límite para $x \to \infty$.

2. El recíproco no es cierto; puede existir límite del segundo cociente y no del primero.

EJEMPLOS: 1.
$$f(x) = \operatorname{sen} \pi x,$$
$$f(x+1) - f(x) = \operatorname{sen} \pi(x+1) - \operatorname{sen} \pi x = -2 \operatorname{sen} \pi x$$
carece de límite para $x \to \infty$; y sin embargo, $f(x) : x \to 0$.

2.º

$$f(x) = \ln x, \quad \ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right);$$

como para $x \to \infty$ el límite es 0, resulta:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

IV. **Propiedades de la función derivada.** — *a*) Veremos ante todo que dada una función $y = f(x)$, la existencia y continuidad de su derivada en todo intervalo cerrado $[a, b]$ equivale a que $\Delta y/\Delta x$ converge hacia su límite $f'(x)$ *uniformemente* en $[a, b]$, es decir, a que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{[IX-2]} \qquad \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |h| < \delta$$

cualquiera sea x, tal que x y $x + h$ pertenezcan a $[a, b]$.

Ello es consecuencia de los dos teoremas siguientes:

a_1) *Si* $f'(x)$ *es continua en* $[a, b]$, *la razón incremental tiende hacia* $f'(x)$ uniformemente *en* $[a, b]$.

En efecto, por el teorema del incremento finito (§ 35-1), el primer miembro de [IX-2] puede ponerse en la forma:

$$| f'(x + \theta h) - f'(x) |,$$

donde θ depende de x, pero es siempre $0 < \theta < 1$, y como $f'(x)$, por el teorema de Heine-Cantor (§ 26-6), es uniformemente continua en $[a, b]$, se obtiene la conclusión.

a_2) *Recíprocamente, si* $\Delta y/\Delta x$ *converge* uniformemente *hacia su límite* $f'(x)$ *esta función es continua en* $[a, b]$.

Si x_0 es un punto cualquiera de $[a, b]$, dado $\varepsilon > 0$, fijemos h de modo que valga [IX-2] para *cualquier* x de un cierto entorno E de x_0 perteneciente a $[a, b]$. Como $f(x)$ es continua, por ser derivable (§ 30-8), lo es

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{en } x_0, \text{ y entonces:}$$

$$| \varphi(x) - \varphi(x_0) | < \varepsilon, \quad \text{si} \quad | x - x_0 | < \rho.$$

Por consiguiente,

$$| f'(x) - f'(x_0) | \leq | f'(x) - \varphi(x) | + | \varphi(x) - \varphi(x_0) | + \\ + | \varphi(x_0) - f'(x_0) | < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon,$$

si $| x - x_0 | < \rho$ y además $x \in E$, es decir, $f'(x)$ es función continua en x_0

b) Si $f(x)$ es derivable en $[a, b]$, $f'(x)$ no es necesariamente continua, pero tiene la propiedad D (§ 26-4), como resulta del siguiente teorema de Darboux:

Si $f(x)$ *es derivable en un intervalo cerrado* $[a, b]$, $f'(x)$ *no puede pasar de un valor a otro en* $[a, b]$ *sin tomar todo valor intermedio.*

Demostremos primero que si $f'(x)$ toma valores de signo contrario en a y en b, entonces se anula entre a y b. En efecto, si es por ejemplo $f'(a) > 0$, y $f'(b) < 0$, el máximo de $f(x)$ en $[a, b]$ no puede alcanzarse ni en a ni en b (§ 33-1), y entonces (§ 26-5) se alcanza en un punto intermedio ξ, donde, (§ 33-2), $f'(\xi) = 0$.

En el caso general, sea C un número comprendido entre $f'(a)$ y $f'(b)$; la función $f(x) - Cx$ está en las condiciones anteriores. Existe entonces un punto ξ donde se anula su derivada $f'(\xi) - C$, y entonces, $f'(\xi) = C$.

c) Aun cuando exista la derivada en todo un intervalo cerrado $[a, b]$, o en todo el eje x, no necesita ser continua, como veremos enseguida con un ejemplo. Ello nos señala la oportunidad de las siguientes consideraciones:

Para definir la función derivada, hemos partido del concepto de deri-

vada en un punto, y con todos los valores obtenidos en los diversos puntos hemos formado la función $f'(x)$. En la práctica suele procederse a la inversa: se deriva la función $f(x)$, considerando indeterminada la x, y en la función obtenida se da a la x el valor numérico x_0, en que se desea conocer la derivada. Este método tiene un grave inconveniente, sobre el cual conviene llamar la atención: puede suceder que así no resulte ningún valor, por carecer de derivada en este punto alguna de las funciones componentes de $f(x)$, y que sin embargo exista $f'(x_0)$. Tal sucede, por ejemplo, con la función ya estudiada (§ 30-8):

$$y = g(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{para} \quad x \neq 0, \quad g(0) = 0.$$

La regla del producto nos da este resultado:

$$y' = x^2 \cos \frac{\pi}{x}\left(-\frac{\pi}{x^2}\right) + 2x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = -\pi \cos \frac{\pi}{x} + 2x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x},$$

expresión que carece de todo significado en el punto $x = 0$, siendo discontinua en este punto.

Sin embargo, en $x = 0$ existe la derivada y vale 0 como vimos (§ 30-8, ej. 2), es decir, $g'(x)$ existe para todo x, pero no es continua en $x = 0$.

Vemos, pues, que la derivada puede carecer de límite, incluso lateral, para $x \to x_0$, y sin embargo, existir $f'(x_0)$; es decir, la derivada puede tener discontinuidad de segunda especie. También puede tener discontinuidad de primera especie, como acontece en los ejemplos (§ 30-5), en que la derivada es continua a cada lado, pero con límites distintos; pero en este caso la función no puede ser derivable en el punto. En efecto, por el teorema de DARBOUX *b*), si la derivada $f'(x)$ existe finita en *todo* punto de un intervalo, sólo puede tener discontinuidades de segunda especie. En particular, si existe finita $f'(x)$ en *todo* un entorno de x_0 y existe $\lim f'(x)$, tal límite es $f'(x_0)$.

Obsérvese que la función $\operatorname{sg} x$ tiene derivada $(+\infty)$ en el origen y que la función derivada tiene ahí una discontinuidad evitable (cfr. § 35, ejercicio 2).

V. Números derivados y funciones derivadas. — *a*) Aun cuando una función $f(x)$ no tenga derivada en $x = x_0$, y ni siquiera derivadas laterales (§ 30-5), existen siempre los correspondientes límites de oscilación, finitos o infinitos, con signo determinado:

[IX-3]

$$D^+ = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}; \quad D_+ = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

$$D^- = \limsup_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}; \quad D_- = \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

que llamaremos ***números derivados superior e inferior, a derecha y a izquierda***, respectivamente, en x_0, de la función $f(x)$, continua o no en x_0.

EJEMPLOS: 1. Para la función continua $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, se tiene en $x = 0$: $D^+ = 1$, $D_+ = -1$, $D^- = 1$, $D_- = -1$ (figura 115).

2. En la función:

$$f(x) = \begin{cases} = a x \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x} + b x \cos^2 \dfrac{1}{x} & \text{para } x > 0 \ (a > b); \\ = 0 & \text{,, } x = 0; \\ = c x \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x} + d x \cos^2 \dfrac{1}{x} & \text{,, } x < 0 \ (c > d); \end{cases}$$

se tiene, para $x = 0$:

$$D^+ = a, \quad D_+ = b, \quad D^- = c, \quad D_- = d.$$

Recordando § 24-8, resulta:

a_1) *La condición necesaria y suficiente para que exista derivada lateral* (§ 30-5) *a un lado del punto* x_0, *es que coincidan los dos números derivados de la función a dicho lado de* x_0.

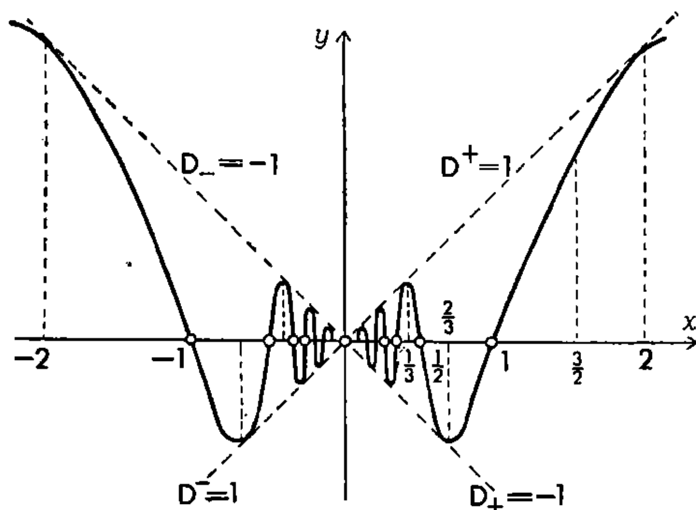


Fig. 115.

Con la notación de § 30-6, si existe derivada lateral a la izquierda de x_0, sería $D_- = D^- = f'_-(x_0)$.

EJEMPLO 3. La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ \text{sen}\,(1/x)}{1 + e^{1/x}}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, tiene en $x = 0$ los números derivados $D^+ = D_+ = f'_+(0) = 0$, $D^- = +\infty$, $D_- = -\infty$.

a_2) *La condición necesaria y suficiente para que exista derivada única* (§ 30-5) *en* x_0 *es que coincidan los cuatro números derivados.*

b) Al variar x en el campo de existencia de $f(x)$, cada uno de los números derivados determina una función de x que llamaremos *derivadas* superior e inferior, a derecha y a izquierda, e indicaremos, respectivamente, con notación de SCHEEFFER:

$$D^+ f(x); \quad D_+ f(x); \quad D^- f(x); \quad D_- f(x).$$

Para distinguirla de éstas, la derivada antes definida (§ 30-6) se llama *ordinaria* o *única*. Como hemos visto en a), si por ejemplo en x_0 existe derivada lateral a derecha, tendremos: $D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0) = f'_+(x_0)$.

b_1) *Si* $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$, *y una de sus funciones derivadas es no-negativa en* $[a, b]$, *con excepción de un conjunto numerable* A, *entonces* $f(a) \leqslant f(b)$.

Sea, por ejemplo, $D^+ f(x) \geqslant 0$, y supongamos por absurdo que $f(b) - f(a) < 0$, con lo cual existirán números $K > 0$ y $p > 0$ tales que para todo $k \in (0, K)$ sea $f(b) - f(a) < -k(b-a) - p$. Poniendo $\varphi(x, k) = f(x) - f(a) + k(x-a) + p$ resulta $\varphi(b, k) < 0$ y $\varphi(a, k) > 0$. Entonces (§ 26-2), será $\varphi(x, k) = 0$ para algunos valores de x entre a y b. Sea $\xi \in (a, b)$ el extremo superior de estos valores [accesible por (§ 26-1)]; será entonces $\varphi(\xi, k) = 0$, $\varphi(x, k) < 0$ para $\xi < x \leqslant b$, y por lo tanto, $D^+\varphi(\xi, k) \leqslant 0 \therefore D^+ f(\xi) \leqslant -k < 0$, de donde $\xi \in A$. Para p fijo, la $\varphi(x, k)$ es tal que $\varphi(x, k_1) - \varphi(x, k_2) = (k_1 - k_2)(x - a)$ y para $k_1 \neq k_2$

con $x \neq a$ es $\varphi(x, k_1) \neq \varphi(x, k_2)$. Como $\xi \varepsilon (a, b)$, esto nos dice que si $k_1 \neq k_2$, será $\xi(k_1) \neq \xi(k_2)$ y por tanto se podría establecer una coordinación entre los valores de k del intervalo $(0, K)$ con potencia del continuo y un conjunto de ξ numerable contenido en A, lo que es contradictorio (Cap. II, nota II, teor. 1).

Recíprocamente: ¿cuál es el signo de cada una de las funciones derivadas de una función monótona?

b_2) *Cada una de las funciones derivadas y las razones incrementales de una función continua en* $[a, b]$ *tienen las mismas cotas en dicho intervalo.* Es decir, si $m \leqslant D^+ f(x) \leqslant M$ en $[a, b]$, es $m \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant M$ para $x_1 \neq x_2$ en $[a, b]$, y recíprocamente; y lo mismo para las otras funciones derivadas.

Por ejemplo: $m \leqslant D^+ f(x)$ en $[a, b]$, equivale a: $D^+(f(x) - m\,x) \geqslant 0$, que equivale a su vez, en virtud de b_1), a $f(x) - m\,x$, monótona creciente en sentido amplio (§ 23-11), o sea: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant m$ en $[a, b]$.

b_3) De aquí resulta que los extremos del conjunto de valores de la razón incremental son los mismos extremos del conjunto de valores de cualquiera de las cuatro derivadas. Por consiguiente: *Las cuatro funciones derivadas de una función continua en* $[a, b]$ *tienen los mismos extremos en todo intervalo abierto o cerrado* contenido en $[a, b]$, pues no es difícil demostrar que el valor de cada uno de dichos extremos no varía si el intervalo cerrado $[a, b]$ se reemplaza por el abierto (a, b).

b_4) Resulta de aquí que si una de las cuatro derivadas, por ejemplo $D^+ f(x)$, es continua en x_0, los extremos superior e inferior de $D^+ f(x)$ (y por lo tanto los de las otras tres derivadas) estarán tan próximos como se quiera a $D^+ f(x_0)$ en un entorno suficientemente pequeño de x_0. Luego: *Si una de las funciones derivadas de la función continua* $f(x)$ *es continua en un punto,* $f(x)$ *tiene derivada única en dicho punto.*

b_5) En particular: *Si una derivada es nula en todo un intervalo, tiene la función continua* $f(x)$ *derivada única nula, y por lo tanto* (§ 35-3), *es* $f(x) = $ *constante.*

c) Algunas de las propiedades de las derivadas ordinarias se generalizan con pequeña modificación. Así, de las propiedades aritméticas, fácilmente demostrables, de los límites de oscilación (§ 24-8, y ejerc. 20) se deduce:

c_1)
$$D^+(f + \varphi) \leqslant D^+ f + D^+ \varphi$$
$$D^+(f - \varphi) \geqslant D^+ f - D^+ \varphi$$
$$D^+ k\, f(x) = k\, D^+ f(x), \quad (k > 0)$$

y análogamente para las otras derivadas, con obvias modificaciones.

c_2) De aquí resulta el fundamental teorema de L. SCHEEFFER:

Si dos funciones continuas en un intervalo cerrado tienen finitas e iguales en todo el intervalo una de las funciones derivadas, difieren en una constante en dicho intervalo; la conclusión subsiste si la igualdad (para valor finito) de una de las cuatro funciones derivadas se da en todo el intervalo, con la posible excepción de un conjunto numerable de puntos, en los que nada se sabe respecto a dichas derivadas

Porque siendo, por ejemplo, $D^+ f = D^+ \varphi$, resulta:
$$D^+(f - \varphi) \geqslant D^+ f - D^+ \varphi = 0,$$
y por b_1), $f - \varphi$ es monótona creciente (§ 23-11). Por igual razón lo es $\varphi - f$; luego, debe ser $f - \varphi = $ constante.

VI. **El teorema fundamental del Cálculo integral** (§ 35-3). — a) Si dos funciones tienen derivadas iguales, pero no siempre finitas, puede no ser constante la diferencia entre ellas, como se ve considerando las funciones sg x (§ 23-6, b) y 2 sg x.

Menos trivial es ver que otro tanto puede ocurrir, *aun cuando las funciones sean continuas*, en los dos casos siguientes:

1º) Si la igualdad de las derivadas admite excepciones;

2º) Si se exige solamente la igualdad de las derivadas, sin sobreentender que sean finitas.

Para ello, comencemos por introducir una notable función monótona y continua, definida por G. CANTOR.

b) *Función de* CANTOR. — Si dividimos el intervalo (0, 1) de la x en tres partes iguales, asignando al tercio central el valor 1/2, y dividimos los otros dos segmentos restantes en tres partes, asignando en el central a la y el valor $1/2^2$ ó el $3/2^2$, respectivamente (fig. 116), y así se prosigue fraccionando en tercios los intervalos de la x mientras se promedian los correspondientes intervalos de la y, resulta una función creciente definida en todo punto cuya expresión en el sistema de base 3 (Cap. I, nota II) ten-

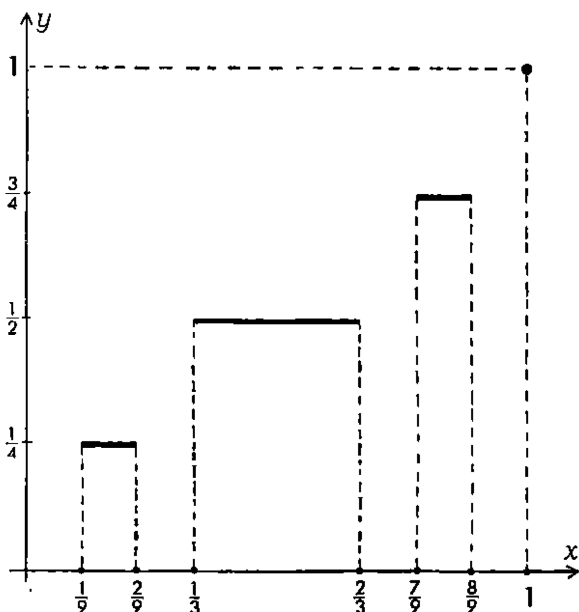


Fig. 116. — Dos pasos en la definición de la familia de CANTOR.

ga número finito de cifras (por ejemplo, 0,1, 0,2, 0,01, 0,02, ...), y también en los que tienen infinitas cifras, entre las que hay algún 1, pues una cifra 1 indica que el punto está en el tercio central correspondiente a esa división, y por lo tanto, tiene asignado valor homólogo, cualesquiera sean las cifras siguientes.

Observemos que así se establece una correspondencia entre los segmentos del eje x y los del eje y, de tal modo que al primero y último tercio de cada división (indicados por las cifras 0 y 2 de la expresión ternaria) corresponde la primera y segunda mitad del segmento homólogo; es decir, las cifras 0 y 1 de la expresión binaria; luego, si al número ternario que sólo tiene cifras 0 y 2, y por lo tanto, carece de homólogo, le asignamos el que tiene esas mismas cifras, cambiando el 2 por 1, queda completada por continuidad la función en el intervalo (0,1). Si x contiene alguna cifra 1, ésta indica que en una de las etapas queda en el tercio

central, y por lo tanto, le corresponde el punto medio, es decir, esa cifra queda 1, terminando en ella la expresión de y. Así:

$$x = 0{,}022\,022\,20\ldots \qquad y = 0{,}011\,011\,10\ldots$$
$$x = 0{,}001\,101\,110\ldots \qquad y = 0{,}001.$$

c) Puede no ser constante la diferencia de dos funciones continuas en el caso 1º *a*), como lo muestra la función de CANTOR *b*), que sin ser función constante tiene derivada nula en todos los segmentos donde es constante, cuya longitud total es:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \ldots = 1.$$

Comparando la función de CANTOR $f(x)$ con la $2f(x)$, vemos que ambas tienen iguales a 0 las derivadas en los intervalos citados; en los

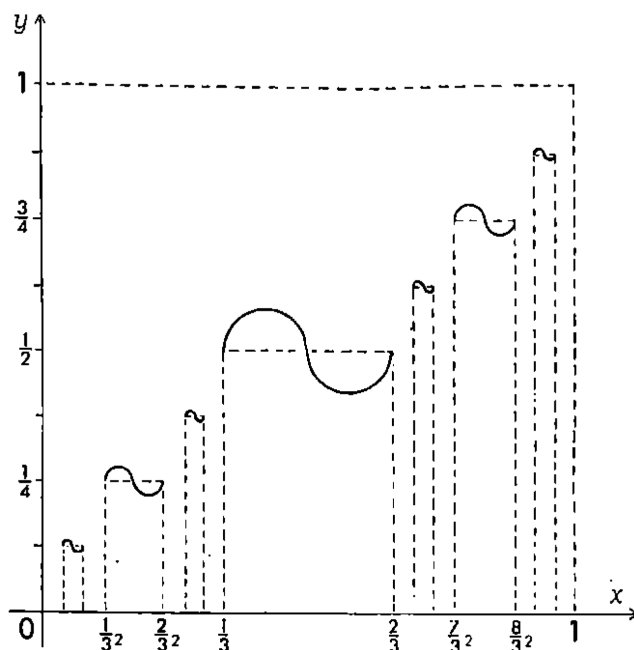


Fig. 117.

puntos cuya abscisa tiene infinitas cifras distintas de 1, se puede demostrar que la derivada es $+\infty$; finalmente, en los extremos de los intervalos citados, la derivada es nula a un lado y es $+\infty$ al otro. Las dos funciones tienen estas mismas derivadas en cada punto, y no difieren en una constante.

Tampoco basta (*a*, caso 2º) que en cada punto haya derivada *única* (§ 30-5) igual para ambas, pues si sobre cada segmento de la curva de CANTOR se construye un par de semicircunferencias, como indica la figura 117, la función así definida tiene derivada $+\infty$ en los extremos donde antes no había derivada única, y en los demás es igual para las funciones así obtenidas a partir de $f(x)$ y de $2f(x)$.

d) No obstante, como consecuencia del teorema de SCHEEFFER (nota

V, α), es constante la diferencia de dos funciones si las derivadas son finitas y coinciden en todos los puntos, con la posible excepción de un conjunto numerable. Esto nos muestra que los puntos en que la función de CANTOR tiene derivada no nula, no forman un conjunto numerable *.

VII. **Funciones continuas sin derivada.** — Un ejemplo sencillo de función continua que carece de derivada finita en todo punto es el siguiente, de VAN DER WAERDEN (1930):

Si $f_n(x)$ *indica la distancia entre* x *y el número más próximo de la forma* $m/10^n$ (m *entero*), *entonces la función*

$$[\text{IX-4}] \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

es continua y carece de derivada finita en todo punto.

DEM. (de A. HEYTING): 1º) Como cada $f_n(x)$ (fig. 118) es continua,

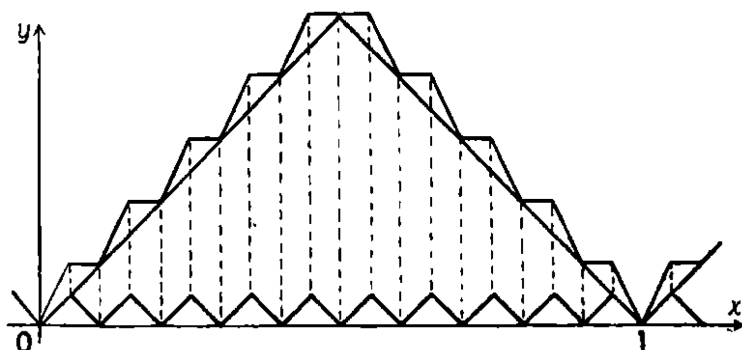


Fig. 118. — $S_2(x) = f_0(x) + f_1(x)$.

lo es para cada k la suma parcial $S_k(x) = \sum_{n=0}^{k-1} f_n(x)$. Por otra parte, de $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2.10^n}$ para cualquier x, resulta:

$$|f(x) - S_k(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{k+1}} + \ldots\right) = \frac{5}{9}\,\frac{1}{10^k},$$

y entonces, dado $\varepsilon > 0$, será $|f(x) - S_k(x)| < \varepsilon$ si $k > k_0(\varepsilon)$. Fijado así k, por la continuidad de $S_k(x)$ en x_0 cualquiera, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, es $|S_k(x) - S_k(x_0)| < \varepsilon$, y entonces:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - S_k(x)| + |S_k(x) - S_k(x_0)| + $$
$$+ |S_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon,$$

lo que prueba que $f(x)$ es continua en x_0.

2º) Consideremos la expresión decimal con infinitas cifras no nulas de un número x del intervalo $(0,1)$: $0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q, \ldots$ Si $\alpha_q = 4$ ó 9,

* F. SUNYER BALAGUER ha demostrado que sigue cumpliéndose el teorema fundamental del Cálculo integral aun cuando el conjunto excepcional, donde las derivadas dejen de ser finitas e iguales, pueda ser totalmente imperfecto, es decir, no contenga ningún subconjunto perfecto no vacío (Cap. VI, nota II, d). Este resultado es el más general posible, como se comprueba mediante el ejemplo anterior de la función de CANTOR. Sin embargo, hasta hoy sólo se sabe asegurar la existencia de un conjunto totalmente imperfecto no numerable mediante el axioma de ZERMELO (§ 94-7, a, Vol. III). P. PI CALLEJA ha extendido en su forma general el teorema de incrementos finitos y sus consecuencias (notas V y VI) a funciones vectoriales, mediante la introducción del concepto de número derivonormado (véase Vol. II, § 72, ejercicios 6 á 11).

demos a x el incremento $h = -10^{-q}$, y en caso contrario, $h = 10^{-q}$. Entonces, si $n < q$, los correspondientes números más próximos de la forma $m/10^n$ difieren también en h. En la figura 118 puede estudiarse el caso $q = 1$, y la conclusión subsiste para otros q. Se tiene (ver figura 118 para $q = 1$):

$$f_n(x+h) - f_n(x) = \begin{cases} = +h & \text{si } n < q, \quad \alpha_{n+1} < 5, \\ = -h & \text{si } n < q, \quad \alpha_{n+1} \geqslant 5, \\ = 0 & \text{si } n \geqslant q. \end{cases}$$

Como consecuencia, la razón incremental es:

$$\text{[IX-5]} \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = q - 2\nu$$

si ν es el número de cifras $\geqslant 5$ entre las $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, y no puede tener límite finito para $h \to 0$ al tender q a infinito, pues es un entero par o impar conjuntamente con q.

La función de VAN DER WAERDEN no tiene tampoco derivada lateral finita, ni a derecha ni a izquierda, en ningún punto.

Comencemos por observar que por ser

$$\text{[IX-6]} \qquad \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 2\,\frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

si existiera $f'_+(x)$ finita, tendría límite finito $f'_+(x)$ el primer miembro para $h \to 0^+$. Entonces, para estar siempre en el caso $h > 0$, si $\alpha_q = 4$ ó 9 se considera en vez del primer miembro de [IX-5] el de [IX-6], resultando el mismo segundo miembro de [IX-5].

Análogamente se prueba que no existe $f'_-(x)$ finita.

El ejemplo clásico de función continua sin derivada es la definida por WEIERSTRASS (1872) mediante una serie trigonométrica. Esta función carece en todo punto de derivada *finita* o *infinita* (con signo determinado), mientras que el anterior de VAN DER WAERDEN tiene derivada única infinita en puntos tales como $x = \frac{1}{3}$. M. JASEK ha señalado la existencia de un manuscrito de BOLZANO, posiblemente de 1834, en el que se define una función continua en un intervalo finito, demostrándose que no tiene derivada finita en ningún punto. K. RYCHLIK probó en 1921 que la función de BOLZANO no tiene derivada ni finita ni infinita (con signo determinado) en ningún punto interior del intervalo donde está definida.

Un método simple para construir funciones continuas no derivables en este sentido estricto fué dado por K. KNOPP (*Math. Zeitschrift*, 2; 1918). Más difícil es la construcción de funciones continuas sin derivada *lateral*, ni finita, ni infinita, realizada por A. S. BESICOVITCH (1925).

VIII. **Bibliografía.** — 1. De las obras mencionadas en el capítulo VI, nota VI, podemos señalar como especialmente adecuadas para adquirir en forma más minuciosa y profunda los conceptos básicos, las de HARDY, CH. DE LA VALLÉE-POUSSIN, LEVI, LANDAU, OSTROWSKI y SEVERI (citadas en Cap. II, nota IV, 2; Cap. VI, nota VI, 4, 2 y 5, y Cap. IV, nota III, 1).

2. Existen diversas obras destinadas a complementar, por los estudiantes que desean profundizar sus conocimientos matemáticos, las nociones de Análisis adquiridas en cursos de iniciación universitaria comunes con los de orientación técnica. Los objetivos de dichas obras pueden sintetizarse así: 1º) Dar una perspectiva general del campo del Análisis desde sus fundamentos; 2º) Pasar revista a los conceptos fundamentales, suponiendo que el lector ha alcanzado la etapa en que puede entender los enunciados precisos de estos conceptos fundamentales y las demostraciones rigurosas de los teoremas, muchas veces expuestos en forma incompleta o equivocada en los textos elementales de Cálculo; 3º) Informar al

estudiante acerca de los teoremas y métodos de investigación que son fundamentales para trabajar en el Análisis moderno, tanto en la matemática pura como en la aplicada. En forma elemental responde a estos objetivos la obra de OSGOOD (citada en Cap. VI, nota VI, 4), y más especialmente las dos siguientes:

L. M. GRAVES: *The theory of functions of real variables.* (Mc Graw-Hill, Nueva York, 2ª ed., 1956);

A. E. SAGASTUME BERRA: *Introducción a la matemática superior* (Publ. Fac. C. Físicomat., La Plata, 1946).

De contenido algo más elevado la primera, más extensa la segunda, ambas constituyen una excelente introducción a la teoría de las funciones reales, en particular a la medida de conjuntos y teoría de la integración. Contienen también valiosísimas colecciones de ejercicios críticos, ejemplos, y teoremas de demostración sólo esbozada, remitiendo a tratados más completos, a fin de no ocupar demasiado espacio con su desarrollo.

Constituyen un notable y breve esquema, señalando los puntos capitales y nociones básicas, los dos fascículos:

A. DENJOY: *Introduction à la Théorie des Fonctions de variables réelles.* (Act. Sci. et Ind., nos. 451, 452; Hermann, París, 1937).

3. Tratado completo, utilísimo en la consulta, por lo destacadas y bien ordenadas que están sus proposiciones, y por escoger siempre los recursos más elementales en las demostraciones, a pesar del carácter superior de la obra, es:

E. W. HOBSON: *The theory of functions of a real variable and the theory of* FOURIER's series. (Vol. I, 3ª ed., 1927; vol. II, 2ª ed., 1926; Univ. Press, Cambridge).

De carácter superior, con abundante aportación original, rica bibliografía fundamental, valiosos ejemplos críticos y teoría de la integración magníficamente desarrollada, es la famosa obra:

C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen.* (2ª ed. Teubner, Leipzig, 1927; Chelsea, Nueva York, 1948).

La parte elemental de la obra anterior, conteniendo su primer tercio, se ha reeditado bajo el nombre:

C. CARATHÉODORY: *Reelle Funktionen.* (Chelsea, Nueva York, 1939).

Una concisa, clara y rigurosa exposición, orientada hacia el problema de la medida y la integración da el primer tomo (basado en un manuscrito póstumo de G. VITALI) de la obra, cuyo segundo volumen se refiere a desarrollos en serie de funciones ortogonales:

G. VITALI y G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* (3ª ed., vol. I, 1951; vol. II, 1952; Zanichelli, Bolonia).

Una traducción inglesa de los cuatro primeros capítulos del vol. II de esta obra, con agregados, es

G. SANSONE: *Orthogonal functions* (Interscience, Nueva York y Londres, 1959).

Con máxima generalidad y en forma difícil y elevada se desarrolla también la teoría de funciones de variable real en la obra de BOURBAKI (citada en Cap. I, nota IV, 9).

Estructuradas a base de la teoría de conjuntos, con conceptos también muy generalizados y empleo del simbolismo logístico en su desarrollo, conteniendo excelentes citas bibliográficas de carácter muy monográfico, están las obras, continuación una de otra:

H. HAHN: *Reelle Funktionen.* (Akad. Verlag, Leipzig, 1932; Chelsea, Nueva York, 1948).

H. HAHN y A. ROSENTHAL: *Set functions.* (Univ. New México Press, Albuquerque, 1948).

Sobre la moderna fundamentación del análisis con orientación topológica está:

J. A. DIEUDONNÉ: *Foundations of modern Analysis* (Academic Press, Nueva York y Londres, 1960).

4. Obra capital de la teoría de conjuntos, de gran influencia en el desarrollo moderno de la matemática, es la clásica:

F. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre.* (1ª ed., más completa que las posteriores, reimpresa por Chelsea, Nueva York, 1949; de Teubner, Leipzig, 1914).

Más elemental y didáctica es la de:

A. FRAENKEL: *Einleitung in die Mengenlehre.* (3ª ed., Springer, Berlín, 1928; reimpresa por Dover, Nueva York, 1949).

Una breve introducción es:

E. KAMKE: *Mengenlehre* (Sammlung Göschen; W. de Gruyter, Berlín; 3ª ed., 1955).

Los fundamentos de la teoría de funciones en su relación con la teoría de conjuntos está expuesta en la obra clásica de:

E. BOREL: *Leçons sur la théorie des fonctions.* (3ª ed., Gauthier-Villars, París 1928).

El estudio y clasificación de las funciones discontinuas ha sido hecho en la importante monografía de:

R. BAIRE: *Leçons sur les fonctions discontinues.* (Gauthier-Villars, París, 1906; reimpresa en 1930).

5. Los que deseen ampliar o profundizar en los temas de este capítulo, pueden hacerlo especialmente en las obras citadas (3) de HOBSON y CARATHÉODORY.

Obra monográfica sobre el mismo es:

W. H. YOUNG: *The fundamental theorems of the differential calculus.* (Cambridge Tracts nº 11, Univ. Press, Cambridge, 1910).

Capítulo X

FÓRMULA DE TAYLOR. ECUACIONES ALGEBRAICAS

§ 38. Derivadas sucesivas y aplicaciones

1. **Derivadas sucesivas.** — Dada una función $y = \mathrm{f}(x)$, su función derivada $y' = \mathrm{f}'(x)$, por ser otra función de x, puede a su vez tener una derivada. La derivada de $\mathrm{f}'(x)$, es decir, la *derivada de la derivada* de $\mathrm{f}(x)$, se llama, como ya dijimos, (§ 33-7), *derivada segunda* de $\mathrm{f}(x)$, y se indica con la notación y'', $\mathrm{f}''(x)$, ó $\mathrm{D}^2 \mathrm{f}(x)$.

Esta derivada segunda, que es a su vez otra función de x, podrá tener una derivada, que llamaremos *derivada tercera* de $\mathrm{f}(x)$:

$$y''' = \mathrm{f}'''(x) = \mathrm{D}^3 \mathrm{f}(x) = \mathrm{D}\, \mathrm{f}''(x).$$

Análogamente se definen las demás *derivadas sucesivas* de una función. La derivada de orden n se indica $y^{(n)}$, ó $\mathrm{f}^{(n)}(x)$ ó $\mathrm{D}^n \mathrm{f}(x)$; de ella se obtiene la derivada de orden $n+1$, mediante una nueva derivación:

$$\mathrm{f}^{(n+1)}(x) = \mathrm{D}\, \mathrm{f}^{(n)}(x).$$

En resumen, las derivadas sucesivas se introducen mediante la siguiente *definición por recurrencia* (§ 2-3):

$$[38\text{-}1] \qquad \begin{cases} \mathrm{f}'(x) = \mathrm{D}\, \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{f}(x+h) - \mathrm{f}(x)}{h}. \\ \mathrm{f}^{(n+1)}(x) = \mathrm{D}\, \mathrm{f}^{(n)}(x). \end{cases}$$

A la derivada $\mathrm{f}'(x)$ la llamaremos también *derivada primera* de la función.

Puede suceder que se llegue a una derivada discontinua o, aun siendo continua, no derivable; pero las funciones elementales admiten infinitas derivadas.

Ejemplos: 1. Las derivadas sucesivas de una función entera de grado n son de grados $n-1$, $n-2$, ..., $n-h$, ... La derivada n-sima es, pues, constante, y las siguientes, idénticamente nulas. En particular: Las derivadas sucesivas de la función $(x-a)^n$, para n natural son:

[38-2] $\quad n(x-a)^{n-1}, \quad n(n-1)(x-a)^{n-2}, \ \ldots, \ n!, \ 0, \ 0, \ \ldots;$

luego, para $x = a$ todas se anulan, excepto la n-sima, que vale $n!$.

2. Las derivadas sucesivas de e^x son todas iguales a e^x.

3. Las derivadas sucesivas de $y = \operatorname{sen} x$ son:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\operatorname{sen} x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{IV} = \operatorname{sen} x \ldots,$$

y se repiten periódicamente, constando el período de cuatro términos.

Dado un índice cualquiera n, puesto en la forma:

$$n = 4h + k, \qquad (k < 4), \qquad \text{es} \qquad y^{(n)} = y^{(k)}.$$

Puede darse una expresión general explícita para la derivada n-ésima, observando que la primera se puede escribir así:

$$\mathrm{D} \operatorname{sen} x = \cos x = \cos(-x) = \operatorname{sen}[\tfrac{1}{2}\pi - (-x)] = \operatorname{sen}(x + \tfrac{1}{2}\pi),$$

lo que nos muestra que cada derivación equivale a aumentar la variable en $\pi/2$, y por consiguiente:

[38-3] $$y^{(n)} = \mathrm{D}^n \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + \tfrac{1}{2} n \pi).$$

4. Análogamente, las derivadas sucesivas de $y = \cos x$ son:

$$y' = -\operatorname{sen} x, \quad y'' = -\cos x, \quad y''' = \operatorname{sen} x, \quad y^{IV} = \cos x, \ldots,$$

y en general:

[38-4] $$y^{(n)} = \mathrm{D}^n \cos x = \cos(x + \tfrac{1}{2} n \pi).$$

EJERCICIO: Hallar la expresión de la derivada n-ésima para las funciones: e^{-3x}; $\operatorname{sen} 2x$; $\operatorname{sen}^2 x$; $\ln(1 + x)$.

2. **Diferenciales sucesivas.** — Observando la definición de diferencial de $y = f(x)$ (§ 34-1):

$$\mathrm{d}y = f'(x) \,.\, \Delta x.$$

vemos que $\mathrm{d}y$ depende de x [pues $f'(x)$ es una nueva función de x] y también del incremento $\Delta x = \mathrm{d}x$. Si ahora *damos a* Δx *un valor fijo* (por ejemplo, $\Delta x = 2$), la diferencial $\mathrm{d}y$ dependerá solamente de x, y considerada *como función de* x, podrá tener a su vez una diferencial, que llamaremos *diferencial segunda* de y, y que indicaremos con $\mathrm{d}^2 y$:

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y).$$

Reemplazando $\mathrm{d}y$ por su definición, y recordando que hemos supuesto Δx constante, tendremos:

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(f'(x) \,.\, \Delta x) = \Delta x \,.\, \mathrm{d}f'(x)$$
$$= \Delta x \,.\, \mathrm{D}f'(x) \,.\, \Delta x = f''(x) \,.\, \overline{\Delta x}^2.$$

Observando que $\overline{\Delta x}^2 = (\mathrm{d}x)^2$, y escribiendo, como se acostumbra, $\mathrm{d}x^2$ en lugar de $(\mathrm{d}x)^2$ *, la relación anterior puede escribirse así:

[38-5] $$\boxed{\mathrm{d}^2 y = f''(x)\,\mathrm{d}x^2}$$

luego: *la diferencial segunda de una función es igual al pro-*

* Esta notación no expone a confusiones, siempre que convengamos en representar la diferencial de x^2 así: $\mathrm{d}(x^2)$.

ducto de su derivada segunda por el cuadrado del incremento $\Delta x = dx$ *de la variable independiente.*

De la relación anterior resulta la expresión de la derivada segunda como cociente:

[38-6] $$\boxed{f''(x) = \frac{d^2 y}{d x^2}}.$$

Análogamente se definen y se calculan las diferenciales sucesivas. Por ejemplo:

$$d^3 y = d(d^2 y) = d[f''(x) \cdot \overline{\Delta x}^2] = \overline{\Delta x}^2 \, d f''(x) =$$
$$= \overline{\Delta x}^2 \, D f''(x) \cdot \Delta x = f'''(x) \overline{\Delta x}^3 = f'''(x) \, d x^3,$$

y en general, la diferencial enésima será por definición

[38-7] $$d^n y = d(d^{n-1} y),$$

y tendrá por expresión

[38-8] $$d^n y = f^{(n)}(x) \, d x^n.$$

De aquí resulta:

[38-9] $$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{d x^n}.$$

NOTA: Hemos visto (§ 34-5) que la expresión de la diferencial $dy = f'(x)dx$ es la misma aunque x sea función de otra variable independiente t: $x = x(t)$. Esta importante propiedad *no subsiste para las diferenciales de orden superior.* Para la segunda se tiene, a partir de $dy = f'(x) \cdot x'(t) dt$:

[38-10] $$d^2y = \{f''(x)[x'(t)]^2 + f'(x) \cdot x''(t)\}dt^2 = = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Si x es independiente, al tomar dx como parámetro constante resulta $d^2x = 0$, y el último miembro se reduce a $f''(x)dx^2$.

3. Aceleración en un movimiento rectilíneo. — *a*) El estudio de la concavidad (§ 33-9) da una indicación sobre el significado *geométrico* de la derivada segunda. Una interpretación *física* importante de ésta nos da la aceleración en un movimiento rectilíneo.

Sea $e = f(t)$ la ley del movimiento de un punto M sobre el eje de abscisas Oe. La velocidad v, en cada instante es (§ 31-4):

[38-11] $$v = e' = f'(t),$$

y será por consiguiente una nueva función del tiempo. Demos ahora al tiempo un incremento Δt, e indiquemos con Δv el incremento correspondiente de la velocidad. Llamaremos *aceleración media* en el intervalo entre t y $t + \Delta t$, a la relación

[38-12] $$\gamma_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

La *aceleración* * en el instante t será por definición el límite de la aceleración media, cuando $\Delta t \to 0$:

[38-13] $$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \gamma_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = f''(t),$$

* La aceleración es un vector (lo mismo que la velocidad), y en el caso en que la trayectoria sea una curva cualquiera, la definición del texto sólo da escalarmente la *componente tangencial* de la aceleración.

es decir: *en un movimiento rectilíneo, la aceleración es en cada instante igual a la derivada de la velocidad, y por lo tanto, igual a la derivada segunda de la ley del movimiento.*

b) *Movimiento uniformemente acelerado.* — En el movimiento rectilíneo, cuya ley es:

[38-14] $$e = \mathrm{f}(t) = a\,t^2 + b\,t + c,$$

la velocidad es $v = \mathrm{f}'(t) = 2\,a\,t + b$, y la aceleración $\gamma = \mathrm{f}''(t) = 2\,a$, es decir, *constante*, por cuya razón el movimiento se llama *uniformemente acelerado.*

EJERCICIOS: 1. Probar que la ley del movimiento uniformemente acelerado es, llamando e_0 y v_0 al espacio y velocidad iniciales (es decir, en el instante $t = 0$):

[38-15] $$e = \tfrac{1}{2}\gamma\,t^2 + v_0 t + e_0.$$

2. Probar que en el movimiento vibratorio armónico (§ 28-4) $e = \mathrm{f}(t) = \mathrm{A}\,.\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}\,t + \alpha\right)$ es $\gamma = -(2\pi/\mathrm{T})^2 e$, es decir, la aceleración es proporcional a e, siendo la constante de proporcionalidad negativa.

4. Derivada n-ésima de un producto. — Derivando sucesivamente el producto $y = u.v$ de dos funciones:

$$y' = u\,v' + u'\,v$$
$$y'' = u\,v'' + 2\,u'\,v' + u''\,v$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

vemos que los desarrollos obtenidos tienen la misma forma que las potencias $(u+v)^1$; $(u+v)^2$; ... reemplazando los exponentes por índices de derivación y conviniendo en que la derivada de orden cero sea la función misma, es decir, reemplazando $u^n = u^n v^0$ por $u^{(n)}v$, $v^n = u^0 v^n$ por $u\,v^{(n)}$, $u^{n-1}v$ por $u^{(n-1)}v'$, uv^{n-1} por $u'v^{(n-1)}$, etc. Demostraremos, por inducción completa (§ 2-2), que esta ley vale para todo n, lo que se expresa simbólicamente por la *fórmula de* LEIBNIZ:

[38-16] $$\overline{u.v}^{(n)} = (u + v)^{(n)}.$$

Como [38-16] se verifica para $n = 1$, sólo falta probar que, supuesta válida para h:

$$y^{(h)} = u.v^{(h)} + \ldots + \underline{\binom{h}{k-1}u^{(k-1)}\,v^{(h-k+1)}} + \underline{\binom{h}{k}u^{(k)}\,v^{(h-k)}} + \ \ldots\ + u^{(h)}\,v;$$

se verifica para $h + 1$; en efecto, al derivar de nuevo, el término en $u^{(k)}\,v^{(h+1-k)}$ resulta de los dos subrayados, y su coeficiente es, por [11-16]:

$$\binom{h}{k-1} + \binom{h}{k} = \binom{h+1}{k}.$$

La fórmula [38-16] se generaliza, también por inducción, para un producto cualquiera, obteniéndose:

[38-17] $$\overline{u\,v\,\ldots\,z}^{(n)} = (u + v + \ldots + z)^{(n)} = \Sigma\,\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\,u^{(\alpha)}\,v^{(\beta)}\ldots z^{(\lambda)}$$

donde la suma se extiende a todos los sistemas de enteros no negativos que cumplan la condición $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n$ como en la potencia de un polinomio (§ 12-2).

5. **La función de Cauchy.** — Esta función (fig. 119) está definida por

[38-18] $$f(x) = e^{-1/x^2}$$

en todo el campo real, excepto $x = 0$, donde el exponente carece de sentido. Pero como para $x \to 0$ es $\lim f(x) = 0$, si completamos la definición de $f(x)$, poniendo $f(0) = 0$ resulta:

a) La función de CAUCHY *es continua en todo el campo real.*

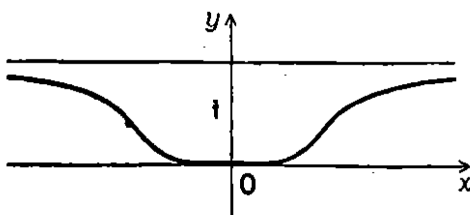


Fig. 119.

Para todo valor $x \neq 0$, existe derivada que viene definida por la fórmula:

[38-19] $$f'(x) = f(x) \,.\, 2 \,.\, x^{-3},$$

pero en el punto $x = 0$ es preciso calcular directamente la derivada, puesto que la demostración de la regla de derivación empleada no es aplicable a este caso, ya que no existe el valor u_0. Según la definición de derivada, formaremos el cociente

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{e^{-1/h^2}}{h},$$

y como la exponencial es un infinitésimo de orden superior, resulta el límite 0; es decir: $f'(0) = 0$; por otra parte, la fórmula [38-19] da:

$$\lim f'(x) = \lim 2\,\frac{e^{-1/x^2}}{x^3} = 0;$$

luego, podemos enunciar:

b) La función de CAUCHY *tiene derivada finita en todo el campo real, y esta derivada es continua, sin excepción.*

Obsérvese que esta derivada tiene la misma propiedad de la función, a saber: para $x \to 0$, su valor es infinitésimo de orden superior a cualquier potencia de x; es decir, su cociente por cualquier potencia de x de exponente positivo, tiene por límite cero, pues el factor exponencial

$$f(x) = e^{-1/x^2}$$

es de orden superior a cualquier potencia de x.

Derivando el producto [38-19] tenemos:

$$f'' = 2 \,.\, f' x^{-3} - 2 \,.\, 3 \,.\, f \,.\, x^{-4},$$

función continua en todo el campo real, incluso en el punto $x = 0$; puesto que $f''(x) \to 0$, y, por otra parte,

$$f''(0) = \lim \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim \frac{f'(h)}{h} = 0.$$

Así siguiendo, resulta la fórmula general:

$$f^{(n)} = 2\,!\, f^{(n-1)}\, x^{-3} - \binom{n-1}{1} 3\,!\, f^{(n-2)} \,.\, x^{-4} + \ldots \pm \binom{n-1}{1} n\,!\, f' \,.\, x^{-(n+1)}$$

función también continua y nula en el origen. Resumiendo:

c) La función de CAUCHY *admite infinitas derivadas, que son funciones continuas en todo el campo real y nulas en el origen.*

6. **Ceros reales de las funciones continuas.** — *a)* Las funciones, representadas por parábolas de eje vertical:

$$y = f(x) = (x-1)^2 \quad , \quad y = g(x) = (x-1)(x-2) \quad ,$$

se anulan ambas para $x = 1$. Pero en el primer caso la parábola es tangente al eje x por ser *no sólo* $f(1) = 0$ *sino también* $f'(1) = 0$. También es para $x \to 1$, $f(x)$ infinitésimo *de orden* 2 con respecto a $x - 1$ (§ 24-3, c_2).

En el caso de un polinomio cualquiera, al considerar su descomposición factorial [18-6] para valores $z = x$ reales suponiendo $\zeta_1 = x_1$ real:

$$f(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - \zeta_2)^{k_2} \ldots (x - \zeta_j)^{k_j} \quad ,$$

subsisten conclusiones análogas: 1º) En x_1 [cero del polinomio $f(x)$ (§ 18-1) con orden de multiplicidad k_1 (§ 18-2)] se anula no sólo $f(x)$ sino también las $k_1 - 1$ primeras derivadas; 2º) Para $x \to x_1$ es $f(x)$ infinitésimo de orden k_1 con respecto a $x - x_1$ (§ 24-3, c_2). Esto nos permitirá extender fuera del campo algebraico la clasificación de los ceros de una función (o puntos donde ésta se anula) reemplazando el concepto de orden de multiplicidad (§ 18-2) por el de orden infinitesimal (§ 24-3, c):

DEF. 1: Un número x_1 se llama *cero de orden* p *($p > 0$ real cualquiera)* de la función continua $f(x)$, o *raíz de orden* p de la ecuación $f(x) = 0$, si para $x \to x_1$ es $f(x)$ infinitésimo de orden p, es decir (§ 24-3, c_2), si existen dos constantes positivas, k y K, tales que:

[38-20] $$f(x) = (x - x_1)^p \varphi(x),$$

siendo en un entorno reducido de x_1:

[38-21] $$0 < k < |\varphi(x)| < K.$$

DEF. 2: Diremos que el cero x_1 es *por lo menos de orden* p, si para $x \to x_1$ es $f(x) = O(h^p)$ con $h = x - x_1$, y *de orden infinito*, si es por lo menos de orden p para todo p.

Caso frecuente y particularmente importante del concepto introducido en def. 1 es:

DEF. 3: Un cero x_1 de orden p de $f(x)$ [38-20], se llamará *de equivalencia potencial* si existe $\lim \varphi(x) = a \neq 0$. En tal caso es $f(x)$ un infinitésimo equivalente (§ 24-3, c) a $(x - x_1)^p . a$.

b) Si la función es derivable, se pueden utilizar los criterios siguientes:

b_1) *Si x_1 es cero de orden $p - 1$ y equivalencia potencial de $f'(x)$, es cero de orden p y equivalencia potencial de $f(x) - f(x_1)$. Recíprocamente, si x_1 es cero de orden p y equivalencia potencial de $f(x)$, es cero de orden p-1 y equivalencia potencial de $f'(x)$, supuesta $\varphi'(x)$ acotada en un entorno reducido de x_1.*

En efecto, por la regla de BERNOULLI - L'HOSPITAL (§ 36-1), es (ver def. 3):

$$\lim \frac{f(x) - f(x_1)}{(x - x_1)^p} = \lim \frac{f'(x)}{p(x - x_1)^{p-1}}.$$

puesto que estas derivadas (siempre finitas, por la hipótesis b) no se anulan simultáneamente en un entorno reducido de x_1, por ser $p(x-x_1)^{p-1}$ distinta de cero. Para el recíproco, derivando [38-20] tendremos:

$$f'(x) = (x-x_1)^{p-1} [p\,\varphi(x) + (x-x_1)\,\varphi'(x)],$$

y al existir $\lim f'(x)/(x-x_1)^{p-1} = p\,\varphi(x_1) \neq 0$, queda demostrada la tesis.

Propiedad análoga vale sin suponer la equivalencia potencial, pero para demostrarla se debe utilizar una generalización del teorema del valor medio de CAUCHY referente a los límites de oscilación (cfr. HOBSON, citado en Cap. IX, nota VIII, 3).

b_2) *Si x_1 anula a $f(x)$, $f'(x)$, ... y es $f^{(p)}(x)$ finita la primera derivada que no se anula en x_1, es x_1 cero de orden p de $f(x)$, y ésta es infinitésima equivalente a*

$$\frac{(x-x_1)^p}{p!}\,f^{(p)}(x_1).$$

Porque será, aplicando $p-1$ veces la regla de BERNOULLI-L'HOSPITAL, y luego la definición de derivada $f^{(p)}$:

$$\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)}{(x-x_1)^p} = \lim_{x\to x_1}\frac{f'(x)}{p(x-x_1)^{p-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_1}\frac{f^{(p-1)}(x)}{p!(x-x_1)} =$$

$$= \frac{1}{p!}\lim_{x\to x_1}\frac{f^{(p-1)}(x)-f^{(p-1)}(x_1)}{x-x_1} = \frac{f^{(p)}(x_1)}{p!}.$$

De aquí resulta también:

b_3) *Si x_1 anula a $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(p)}(x)$, es $f(x)$ infinitésimo de orden superior a p* (§ 24-3, c_2):

$$f(x) = o\,[(x-x_1)^p].$$

NOTA: Obsérvese que en (b_2) no exigimos que x_1 sea cero de equivalencia potencial de orden nulo de $f^{(p)}(x)$, lo cual supondría (def. 3) la continuidad de ésta, sino solamente la existencia de $f^{(p)}(x_1)$ finita.

EJEMPLOS: 1. La función $\operatorname{sen} x$ tiene todos sus ceros $0, \pm\pi, \pm 2\pi$, ..., simples; como resulta directamente de la definición, o bien por el criterio (b_2), siendo además infinitésima equivalente a $(-1)^n(x \mp n\pi)$.

2. Análogamente resulta que la función $1-\cos x$ tiene todos sus ceros $0, \pm 2\pi$, ..., dobles, y es infinitésima equivalente a $\frac{1}{2}(x \mp 2n\pi)^2$. La función $\operatorname{tg} x - x$ tiene simples sus ceros, excepto $x=0$, que es triple, en donde es infinitésima equivalente a $\frac{1}{3}x^3$.

3. La ecuación $\operatorname{sen} x = x$ tiene la raíz $x=0$. Como para $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ es $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, pero $f'''(0)=1\neq 0$, es $x=0$ raíz triple de la ecuación dada, siendo ahí $f(x)$ infinitésima equivalente a $\frac{1}{3!}x^3$.

4. El valor $x=0$ es un cero de orden infinito de la función e^{-1/x^2}, es decir, la función es infinitésimo de orden superior a cualquier número.

5. El valor $x=0$ es un cero de las funciones $f(x)=x\operatorname{sen}(\pi/x)$, $g(x)=x/\ln|x|$, sin orden determinado, aunque sí por lo menos de orden p para todo $p \leqslant 1$ y ningún $p>1$. No existe $\lim f(x)/x$, en cambio $\lim g(x)/x = 0$ (§ 37-4).

6. En cambio, $x=0$ es un cero de primer orden, aunque no de equivalencia potencial, para la función $x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} - 2x$; en ella es cero ais-

lado, como en $g(x)$ de ej. 5, mientras que en la función $f(x)$ de ej. 5 es límite de ceros.

7. **Cambios de signo de $f(x)$ y de $f'(x)$.** — *a*) Sea x_1 un cero de $f(x)$ [38-20], de orden p *entero* y además de equivalencia potencial (§ 38-6, def. 3). Como $\varphi(x)$ conserva signo constante en un entorno de x_1, y al pasar x de la izquierda a la derecha de x_1, la potencia $(x - x_1)^p$ cambia o no de signo, según que p sea impar o par, resulta:

Al pasar x por un cero de equivalencia potencial y orden entero de $f(x)$, la función cambia de signo o tiene signo constante, según que el orden del cero sea impar o par.

b) Así mismo, resulta que los ceros de equivalencia potencial y orden entero son puntos aislados, es decir, en un cierto entorno suyo no hay ningún otro cero. La recíproca no es cierta, pues un cero aislado puede no ser de equivalencia potencial, como se observa en el ejemplo 6 de § 38-6. Corolario inmediato es:

Si $f(x)$ tiene número finito de ceros en (a, b), y todos son de equivalencia potencial y orden entero, el número total de ellos, contado cada uno tantas veces como indique su orden de multiplicidad, es par o impar según que $f(a)$ y $f(b)$ tengan el mismo o contrario signo.

c) Resulta de [38-20], suponiendo $\varphi(x)$ *derivable*:

[38-22] $$f'(x) = p(x - x_1)^{p-1}\varphi(x) + (x - x_1)^p \varphi'(x),$$

y dividiendo por [38-20] se obtiene para la *derivada logarítmica* $f'(x)/f(x) = D \ln f(x)$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{p}{x - x_1} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Como $\varphi(x)$ se conserva acotada inferiormente en un entorno de x_1, por ser $\lim \varphi(x) = a \neq 0$ para $x \to x_1$, resulta:

Si x_1 es un cero de equivalencia potencial de $f(x)$ [38-20], y $|\varphi'(x)|$ está acotado superiormente, la razón $f'(x)/f(x)$ pasa de $-\infty$ a $+\infty$ al pasar x por x_1 en sentido creciente.

Como la acotación de $|\varphi'(x)|$ se verifica siempre cuando $f(x)$ es entera, pues también lo es $\varphi(x)$, la propiedad (*c*) tiene validez general para los ceros de las funciones enteras que son siempre de equivalencia potencial.

Nota: Las propiedades *a*), *b*) y *c*) no subsisten si el cero, aun siendo de orden entero, no es de equivalencia potencial, como lo muestra para *a*) y *b*) la función $x^2 \operatorname{sg} x$, que cambia de signo al pasar x por 0, y para *c*) el ejemplo 6 de § 38-6, en que la razón f'/f oscila infinitamente en todo entorno del punto 0, cambiando infinitas veces de signo.

Compruébese que aunque la derivada de $x^2 \operatorname{sen} \pi/x + x$ cambie infinitas veces de signo en todo entorno del origen (donde vale 1), éste es un cero de equivalencia potencial y orden 1, pero la propiedad *c*) tampoco subsiste por no conservarse acotado $|\varphi'(x)|$.

8. **Órdenes de contacto de dos curvas.** — *a*) Si las curvas

$y = \mathrm{f}(x)$ e $y = \varphi(x)$ se cortan en un punto A de abscisa a, se tiene $\mathrm{f}(a) = \varphi(a)$. Entonces, la diferencia

$$[38\text{-}23] \qquad \delta(h) = \mathrm{f}(a+h) - \varphi(a+h)$$

tiende a cero con h, es decir, es un infinitésimo para $h \to 0$. Este infinitésimo representa el segmento de ordenada entre ambas curvas en una abscisa próxima a a, y nos proponemos estudiar su orden, en caso de que existan y sean finitas en a las derivadas de $\mathrm{f}(x)$ y de $\varphi(x)$, hasta llegar a un orden en que sean distintas. Entonces, el cero de $\delta(h)$ es de orden entero y equivalencia potencial (§ 38-6, b_2).

Si las curvas no son tangentes en A, es decir, $\mathrm{f}'(a) \neq \varphi'(a)$, resulta (§ 38-6, b_2) $\delta(h)$ un infinitésimo de primer orden (en h).

Si en cambio $\mathrm{f}'(a) = \varphi'(a)$ (es decir, las curvas son tangentes en A), pero $\mathrm{f}''(a) \neq \varphi''(a)$, resulta (§ 38-6, b_2) $\delta(h)$ un infinitésimo de segundo orden; se dice que las curvas tienen un *contacto simple* o *de primer orden.*

Si es $\mathrm{f}'(a) = \varphi'(a)$, $\mathrm{f}''(a) = \varphi''(a)$, pero $\mathrm{f}'''(a) \neq \varphi'''(a)$, será $\delta(h)$ un infinitésimo de tercer orden, y se dice que el contacto es *de segundo orden.*

En general, diremos que dos curvas $y = \mathrm{f}(x)$ e $y = \varphi(x)$ tienen en A un *contacto de orden n,* cuando el infinitésimo $\delta(h)$ es de orden $n+1$, y si este infinitésimo es de orden entero y equivalencia potencial, lo mismo decimos del contacto respectivo. Tal ocurre (§ 38-6, b_2) cuando las dos funciones tienen iguales sus derivadas hasta la n-ésima inclusive en a, siendo finitas y distintas las de orden $n+1$.

Resulta, como hemos visto, de la hipótesis hecha sobre la existencia de derivadas finitas, que el cero de $\delta(h)$ es de orden entero y equivalencia potencial, y entonces (§ 38-7, a), si n es par, este infinitésimo de orden impar cambia de signo de uno a otro lado del punto; y si n es impar, no hay cambio de signo. En resumen:

Para que dos curvas $y = \mathrm{f}(x)$, $y = \varphi(x)$ tengan en un punto un contacto de orden n entero de equivalencia potencial, basta que en dicho punto tengan igual valor las derivadas de ambas funciones, hasta las de orden n inclusive, y sean desiguales y finitas las de orden $n+1$.

Si el contacto es de orden par, las dos curvas se atraviesan en el punto, y si es de orden impar, no se atraviesan.

b) Cuando la existencia e igualdad de las derivadas (finitas en $x = a$) se ha verificado en $x = a$ hasta la n-ésima, el contacto es *de orden superior a $n-1$* (§ 38-6, b_3).

c) Dada una curva C, otra curva *de una familia dada* se llama *osculatriz* de C en un punto P cuando es, *de entre todas las de dicha familia,* la que tiene un contacto de orden más elevado en P.

EJEMPLO: Determinar la parábola $y = a x^2 + b x + c$ osculatriz de la curva $y = e^x$ en $x = 0$.

Igualando los valores de y, y', e y'' en ambas curvas para $x = 0$, se determinan a, b y c por $c = b = 2a = 1$, y entonces, la *parábola osculatriz* es $y = \frac{1}{2} x^2 + x + 1$.

NOTA: Hemos supuesto que las derivadas para $x = a$ son finitas; si las derivadas primeras son infinitas, es decir, si la recta tangente es paralela al eje y, tomaremos las x como ordenadas, o cualquier otra dirección distinta de la dirección de la tangente. Si un sistema de secantes paralelas (de dirección distinta de la recta tangente) da segmentos infinitésimos de un cierto orden, el mismo orden resulta con secantes de otra dirección siempre que sea distinta de la tangente; porque aplicando las fórmulas de cambio de eje y, resultan infinitésimos del mismo orden.

EJERCICIOS

1. Derivada n-ésima de las funciones: a^x, $x . e^{2x}$, $(x+1)/(x-1)$.

2. Demostrar, por inducción, que la derivada n-sima de $y = \operatorname{arc\,tg} x$ puede ponerse en la forma:

$$D^n \operatorname{arc\,tg} x = (n-1)!\cos^n y \,.\, \operatorname{sen} n\,(y + \pi/2).$$

3. Demostrar, por inducción, esta nueva forma:

$$D^n \operatorname{arc\,tg} x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \operatorname{sen}(n \,.\, \operatorname{arc\,ctg} x).$$

4. Derivada n-ésima de $\cos a x \,.\, \cos b x$.

5. Demostrar las fórmulas:

$$D^n (e^{ax} \cos b x) = r^n \,.\, e^{ax} \,.\, \cos (b x + n \varphi),$$
$$D^n (e^{ax} \operatorname{sen} b x) = r^n \,.\, e^{ax} \,.\, \operatorname{sen} (b x + n \varphi),$$

siendo:

$$r^2 = a^2 + b^2, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} b/a.$$

6. Si x, y son funciones de t, demostrar las fórmulas:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{y'}{x'}; \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^3} \quad \text{(cfr. [40-19])};$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{x' (x' y''' - y' x''') - 3 x'' (x' y'' - y' x'')}{x'^5}.$$

7. Las coordenadas de los puntos de una trayectoria tienen por primeras derivadas, respecto al tiempo, las componentes del vector velocidad, y como segundas derivadas, las del vector aceleración. Probar que estas últimas son $x'' = -\omega^2 x$, $y'' = -\omega^2 y$ en el caso de un punto que se mueva con velocidad angular constante ω sobre una circunferencia de radio r con centro en el origen, y que por lo tanto la aceleración está dirigida hacia el centro (*aceleración centrípeta*). Hallar su módulo.

8. Expresar la aceleración en el movimiento vibratorio armónico amortiguado $s = a e^{-ht} \operatorname{sen} \omega t$, aplicando el ejercicio 5.

9. Probar que $D^n (x^2 a^x) = a^x (\ln a)^{n-2} [(x \ln a + n)^2 - n]$.

10. Estudiar la concavidad e inflexiones de la curva de CAUCHY (§ 38-5). ¿Cuál es su parábola osculatriz en $x = 0$?

11. Probar que los ceros de las siguientes funciones en $x = 0$ son de equivalencia potencial, e indicarla: $x - \operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$, $1 - \cos 3x$.

12. Hallar los órdenes de contacto mutuo en $x = 0$, de las curvas:

$$y = x; \quad y = \operatorname{sen} x; \quad y = x . \cos x.$$

13. Órdenes de contacto de las curvas $x^2 + y^2 = y$, $y = x^2$, en sus puntos de intersección.

14. Parábola osculatriz de segundo grado y eje vertical de la curva *versiera* $y = 1/(1+x^2)$ (ej. 17 de § 33) en $x = 0$ y en $x = 1$. Orden de contacto en ambos casos.

15. Lo mismo en $x = 0$ para las curvas $y = \sqrt{1+x}$, $y = 1 + (1/2)x - (1/8)x^2 + (1/16)x^3$. ¿Cuál es el orden de contacto de estas dos?

16. Determinar los coeficientes, de modo que la curva

$$y = a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x$$

sea osculatriz de $y = 3 \cdot e^{2x}$ en $x = 0$.

§ 39. Fórmula de Taylor

1. **Introducción: expresión de un polinomio por sus derivadas en un punto.** — En este parágrafo nos proponemos resolver el importante problema de *aproximar una función* $f(x)$ *en el entorno de un punto* a*, mediante un polinomio de grado prefijado que tenga el contacto de orden más elevado (polinomio osculador), y hallar el orden de magnitud del error que se comete con esta aproximación.* Para abordarlo comencemos por expresar un polinomio $P(x)$ de grado n, mediante sus derivadas en $x = a$, para lo cual lo escribimos en la forma:

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n.$$

Para determinar los coeficientes, basta derivar sucesivamente, y luego hacer $x = a$; se obtiene:

$$P(a) = c_0; \quad P'(a) = 1!\, c_1; \quad P''(a) = 2!\, c_2; \quad \ldots; \quad P^{(n)}(a) = n!\, c_n,$$

de donde, reemplazando, resulta la expresión buscada:

$$[39\text{-}1] \qquad P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

que puede enunciarse así: *el incremento* $P(x) - P(a)$ *de un polinomio es la suma de los productos de las potencias del incremento de la variable por las derivadas sucesivas en el punto inicial, divididas por los factoriales respectivos.*

2. **Fórmula de Taylor.** — Si $f(x)$ es una función cualquiera definida en un entorno E de a, y con derivadas sucesiones finitas en $x = a$ hasta la n-ésima, el problema planteado en § 39-1 se resuelve aproximándola por un polinomio $P_n(x)$ de grado n, que coincida en $x = a$ con $f(x)$, conjuntamente con las n primeras derivadas respectivas, pues se tendrá entonces (§ 38-8, *b*) un contacto de orden superior a $n - 1$. En virtud de [39-1], dicho polinomio existe y es único:

$$[39\text{-}2] \qquad P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Llamando $T_n(x)$ al *término complementario* que hay que agregar a este polinomio para obtener $f(x)$, se tiene la *fórmula general de* Taylor:

$$[39\text{-}3] \quad f(x) = P_n(x) + T_n(x) =$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + T_n(x).$$

Los polinomios $P_n(x)$ aproximan a $f(x)$ en la vecindad de $x = a$, tanto mejor cuanto mayor sea n (ver figura 120), y el término complementario $T_n(x)$, que pronto estudiaremos, da el error de aproximación.

NOTAS: 1. Cuando $f(x)$ es ya un polinomio de grado n [39-3] se reduce a [39-1], siendo $T_n(x) \equiv 0$. Por eso la identidad [39-1] suele llamarse *fórmula de* TAYLOR *para polinomios.*

2. Tomando la identidad [39-1] como punto de partida, TAYLOR logró generalizarla para las funciones indefinidamente derivables, desarrollándolas en serie, como veremos en § 44; pero es mejor expresar la función (como hicieron después D'ALEMBERT y LAGRANGE), en la forma [39-3], que no exige sino un número finito de derivadas. La fórmula de TAYLOR ha sido tan pródiga en consecuencias importantes, que constituye el núcleo fundamental de todo el Análisis matemático durante el siglo XIX.

3. Los polinomios [39-2] tienen la siguiente propiedad, de gran importancia práctica: para pasar de $P_n(x)$ a $P_{n+1}(x)$ basta agregar un término, *sin modificar los coeficientes de los anteriores.*

3. Diversas formas del término complementario. — *a) Forma infinitesimal.* — HIPÓTESIS: Existe $f^{(n)}(a)$ finita.

El término complementario es:

$$[39\text{-}4] \quad T_n(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

que se anula para $x = a$, lo mismo que sus derivadas hasta la de orden n inclusive; luego (§ 38-6, b_3), llamando $h = x - a$:

$$[39\text{-}5] \quad T_n(x) = o(h^n).$$

En muchas cuestiones (concavidad, inflexiones, contactos) es suficiente esta expresión, es decir, basta saber que al detener el desarrollo en la potencia h^n, *el término complementario es infinitésimo respecto de ella.* Por otra parte, un desarrollo de esta forma permite definir derivadas sucesivas generalizadas (nota I).

b) Forma de LAGRANGE. — Impongamos ahora a $f(x)$ la condición más restrictiva de que en un entorno de $x = a$ sea $f^{(n)}(x)$ continua y que exista $f^{(n+1)}(x)$ como derivada única (§ 30-5). Tomemos un $x = a + h$ en él. Entonces [39-3] se transforma en:

$$[39\text{-}6] \quad f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + T_n,$$

siendo (para a y h fijos) T_n una constante. Vamos a demostrar que puede dársele la siguiente forma, atribuída a LAGRANGE:

[39-7] $$T_n = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

Para ello, pongamos $b = a + h$ y consideremos la función de t:

[39-8] $$f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(b-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(b-t)^n + \frac{T_n}{h^{n+1}}(b-t)^{n+1},$$

que es *continua* y toma el mismo valor $f(b) = f(a+h)$, para $t = a$ y $t = b$. En virtud del teorema de ROLLE (§ 35-2), su derivada, que existe en virtud de las hipótesis hechas y es:

[39-9] $$\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n - \frac{T_n}{h^{n+1}}(n+1)(b-t)^n,$$

se anula en un punto intermedio $\xi = a + \theta h$, de donde resulta [39-7].

Volviendo a la notación de [39-3], tendremos el término de LAGRANGE en la forma

[39-10] $$T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

que da a $T_n(x)$ la misma estructura de los términos del polinomio $P_n(x)$, con la sola modificación de tomar la derivada en el punto ξ, que depende de x y de n.

NOTA 1. Cuando en la hipótesis *b*) se supone que $f^{(n+1)}(a)$ es finita, el polinomio $P_n(x)$ tiene con la curva un contacto de orden no menor que n (§ 38-6, b_2), pero éste puede ser mayor, como en el caso de la figura 120, donde los polinomios son de grado impar y los contactos son de orden par, y por eso las curvas se atraviesan.

c) *Otras formas.* — Si se modifica la función [39-8], reemplazando en el último término $n+1$ por p $(0 < p < n+1)$, el razonamiento anterior puede repetirse *mutatis mutandis,* y se llega a la forma de T_n, llamada de SCHLÖMILCH:

[39-11] $$T_n = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!\,p} h^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p},$$

y en particular para $p = 1$ se tiene la forma *de* CAUCHY:

[39-12] $$T_n = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!} h^{n+1}(1-\theta)^n.$$

NOTA 2. En el Cálculo integral (§ 51-5, *c*) veremos otra expresión del término complementario (llamada forma integral), donde no aparece ningún número desconocido. Obsérvese que para una función dada, en [39-3] $f(x)$ y $P_n(x)$ están bien determinados, por lo que también lo está $T_n(x)$, es decir, los "distintos" términos complementarios son sólo diferentes expresiones de una misma cosa.

4. **Diversas expresiones de la fórmula de Taylor.** — *a*) Si tomamos $a = 0$ en la fórmula de TAYLOR [39-3], adopta esta forma (impropiamente llamada fórmula de MAC-LAURIN):

[39-13] $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + T_n.$$

Estando ξ en [39-10] comprendido ahora entre 0 y x, puede ponerse $\xi = \theta x$ (cumpliendo θ la condición $0 < \theta < 1$), y T_n tiene la expresión:

[39-14] $$T_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

b) Si en la forma [39-6] de la fórmula de TAYLOR tomamos para T_n la forma de LAGRANGE [39-7], y ponemos luego $a = x$, $h = \mathrm{d}\,x$, aquella fórmula adopta la llamada *forma diferencial*:

[39-15] $$\Delta f(x) = \frac{\mathrm{d}\,f(x)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{2!} + \ldots + \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{n!} + \\ + \frac{\mathrm{d}^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!},$$

siendo ahora $\xi = x + \theta\,\mathrm{d}\,x$. Esta forma nos da la relación del incremento Δf con infinitésimos diferenciales. Para $n = 0$ resulta como caso particular el teorema del incremento finito (§ 35-1). También resulta, de [39-15], que el incremento es un infinitésimo equivalente a la primera diferencial *no nula* dividida por el factorial del índice. Esta forma diferencial es la más adecuada para la generalización a varias variables (cfr. § 69 en Vol. II).

EJEMPLO 1. Desarrollo de MAC-LAURIN de $f(x) = e^x$.
Las derivadas son todas e^x, y para $x = 0$ valen 1; luego:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} e^{\theta x}.$$

Tomemos el polinomio osculador $P_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$, y veamos cuál es la magnitud del error cometido para $x = 0{,}1$. El valor aproximado de $e^{0,1}$ es $P_2(0{,}1) = 1{,}105$; como el término complementario de LAGRANGE de orden 2 es:

$$T_2(x) = \frac{x^3}{3!} e^{\theta x} \quad \text{y} \quad e^{\theta x} < e^{0,1} < 1{,}2,$$

una acotación del error cometido es la siguiente para $|x| < 0{,}1$:

$$|T_2(x)| < \frac{(0{,}1)^3}{3!} 1{,}2 = 0{,}0002,$$

lo que nos indica que el valor aproximado 1,105 tiene todas sus cifras exactas.

c) El ejemplo anterior nos muestra que aunque se desconoce el valor exacto del término complementario, en los cálculos aproximados sólo interesa hallar una *cota superior* para el mismo, ya sea en un punto, ya sea en un intervalo. En este último caso, si la derivada $f^{(n+1)}(x)$ se conserva en módulo menor que un número fijo K para todo x del intervalo, tendremos:

$$|T_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} K.$$

EJEMPLO 2. Fórmulas de MAC-LAURIN, para $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $n = 2, 4, 6$.

Por [38-3], los valores de la función y sus derivadas en $x = 0$ son: 0, 1, 0, —1; 0, 1, 0, —1; ... Tendremos, entonces:

Para $n = 2$: $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} \cos \theta x.$

Para $n = 4$: $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \cos \theta' x.$

Para $n = 6$: $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} \cos \theta'' x.$

Los errores cometidos en cada caso al despreciar el término complementario, tienen las cotas superiores $|x|^3/6$, $|x|^5/120$ y $|x|^7/7! = |x|^7/5040$. La primera nos muestra que la diferencia entre el arco y su seno es menor que la sexta parte del cubo del arco, y da para arcos pequeños los siguientes límites de error:

Arcos	hasta	$1° = 0{,}017$	$\varepsilon < 0{,}000001$
„	„	$2° = 0{,}035$	$\varepsilon < 0{,}00001$
„	„	$3° = 0{,}052$	$\varepsilon < 0{,}00003$
.....	.....	.....	.....
„	„	$10° = 0{,}175$	$\varepsilon < 0{,}001.$

Para arcos mayores, el error va creciendo, como puede verse en la figura 120, si se observa la sinusoide y su tangente; pero si tomamos $n = 4$ tenemos:

$|x| < 10° = 0{,}175 \qquad |T_4| < 0{,}00076 : 5! = 0{,}000\,001\ldots$

$|x| < 45° = 0{,}785 \qquad |T_4| < 0{,}0025$

BROOK TAYLOR (1685-1731), matemático, músico, pintor, publicó en 1715 un folleto que con su centenar de páginas ha ejercido perdurable influjo en el desarrollo del Análisis, a pesar de la oscuridad de su estilo

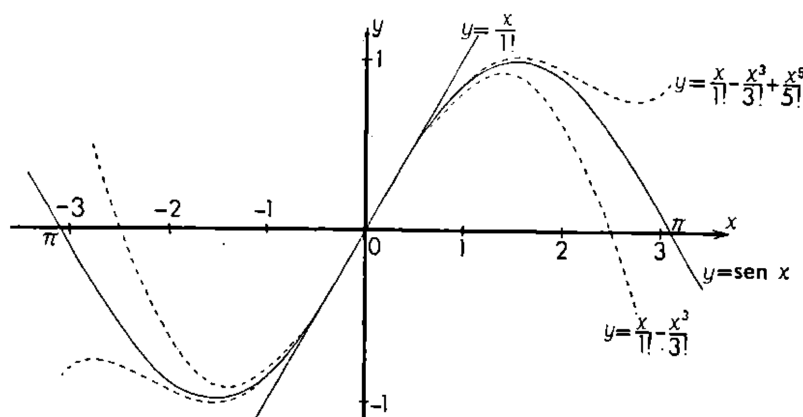


Fig. 120. — Aproximación de los polinomios sucesivos hacia $y = \operatorname{sen} x$.

y de su impresión. En él está contenida la famosa fórmula que lleva su nombre, y también la que se designa como de MAC-LAURIN, a pesar de que este insigne geómetra la cita en su tratado (1742) como debida a TAYLOR. Ni uno ni otro se preocupan de la evaluación del término complementario o *mantisa*.

5. **Desarrollos de las funciones elementales.** — Dada la utilidad del desarrollo de TAYLOR para diversos problemas, conviene tener reunidos los correspondientes a las funciones elementales:

a) Función exponencial $y = e^x$. — Es (§ 39-4, ej. 1):

[39-16] $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad (0 < \theta < 1).$$

b) Funciones circulares. — Recordando las derivadas sucesivas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ ya obtenidas [38-3] y [38-4], resulta:

[39-17] $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \operatorname{sen} \theta x.$$

[39-18] $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \operatorname{sen} \theta x.$$

c) Función potencial $y = x^m$. — Como no es desarrollable en el origen (salvo en el caso de exponente natural), se adopta la función $f(x) = (1+x)^m$, para la cual:

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\ldots(m-k+1),$$

y entonces el desarrollo con la forma infinitesimal [39-5] del término complementario es:

[39-19] $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

EJEMPLOS (con $n = 2$):

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 + o(x^2),$$

$$\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3} + o(x^2).$$

d) Función logarítmica. — El desarrollo [39-13] de MAC-LAURIN no puede aplicarse a $\ln x$, pero sí a $f(x) = \ln(1+x)$. Se tiene:

$$f(0) = 0; \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!; \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

y entonces:

$$[39\text{-}20] \quad \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

NOTA: Obsérvese que aplicar el desarrollo de MAC-LAURIN a $f(x) = \ln(1+x)$ es una forma equivalente y más cómoda de aplicar a $\ln x$ el desarrollo [39-6] con $a = 1$.

EJERCICIO: Probar que las funciones hiperbólicas $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$ admiten desarrollos análogos a [39-17] y [39-18], pero más sencillos que ellos, porque todos los signos son $+$.

6. Aplicación al cálculo de límites indeterminados. — El método más rápido y seguro para calcular límites de cocientes y productos en los casos de indeterminación, consiste en efectuar los desarrollos taylorianos de las funciones elementales que componen la expresión, utilizando la forma infinitesimal del término complementario, que no es preciso siquiera escribir.

EJEMPLOS: Límite para $x \to 0$ de:

$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos 3x)} = \frac{x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots\right)}{x\left(\frac{9x^2}{2} - \ldots\right)} = \frac{\frac{1}{6}x^3 - \ldots}{\frac{9}{2}x^3 - \ldots} \to \frac{1}{27}$$

$$\frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos\frac{1}{2}x} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \ldots}{(x^2/8) - \ldots} \to -4,$$

$$\operatorname{cotg} x \cdot \ln(1+x) = \frac{x - \ldots}{x - \ldots}\cos x \to 1.$$

EJERCICIOS

1. Reconstruir un polinomio de segundo grado $f(x)$, siendo $f(0) = 2$, $f'(0) = f''(0) = 6$.

2. Obtener la fórmula del binomio de NEWTON (§ 12-1) aplicando la fórmula de TAYLOR a la función $f(x) = x^n$.

3. Demostrar en detalle la fórmula de SCHLÖMILCH [39-11].

4. *a*) Desarrollar por la fórmula de TAYLOR la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el entorno de $\pi/6$. *b*) Calcular los tres primeros valores aproximados de sen 31º con todas las cifras exactas que puedan asegurarse (cap. V, nota II, *b*).

5. Desarrollar $\ln(a+h)$ en $a = 10$, y calcular ln 11 con 6 decimales, siendo $\ln 10 = 2{,}302\,585\,09$.

6. Obsérvese que los términos complementarios de [39-17] y [39-18] son infinitésimos de órdenes $2k+1$ y $2k+2$, respectivamente. Probar que pueden reemplazarse, respectivamente, por:

$$\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x; \quad \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos\theta x.$$

7. Desarrollos de MAC-LAURIN de a^x y $\operatorname{sen}^2 x$.

8. Hallar los polinomios osculadores de cuarto grado para $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $1/\sqrt{a^2 + x^2}$.

9. Demostrar las acotaciones, válidas en el primer octante:

$$x - x^3/6 < \operatorname{sen} x < x; \quad x + x^3/3 < \operatorname{tg} x < x + x^3/2.$$

10. Calcular la parte principal del infinitésimo para $x \to 0$:

$$x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}^2 x.$$

11. Límite para $x \to 0$ de $(2 - 2 \cos x - x^2)/(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$.

12. Límite para $x \to 0$ de $(a^x - b^x)/\operatorname{sen} x$.

13. Límite para $x \to 1$ de $(x^x - 1)/\ln x$.

14. Determinar a y b, para que la función

$$\cos x - (1 + a x^2)/(1 + b x^2)$$

sea, para $x \to 0$, infinitésima del mayor orden posible, y hallar éste.

15. Dada la función $y = \ln^{-1}[(1 - x^2)/x^2]$, infinitésima en $x = 0$, ¿puede encontrarse un $p > 0$ suficientemente grande para que $y = x^{1/p}$ sea de orden inferior a ella en $x = 0^+$? Gráfica correspondiente.

§ 40. APROXIMACIÓN LINEAL Y CUADRÁTICA

1. **Aproximación lineal.** — El objeto principal de la fórmula de TAYLOR es, como hemos visto, expresar aproximadamente las funciones en forma de polinomio de grado prefijado. El error viene dado por un término complementario, cuyo valor es desconocido; pero si se sabe entre qué límites se conserva la derivada $(n + 1)$-ésima, se puede acotar dicho término complementario (§ 39-4, c), sabiendo así el grado de aproximación lograda con el polinomio de grado n.

Limitemos el desarrollo de TAYLOR así:

$$y = f(a) + h f'(a) + \tfrac{1}{2} h^2 f''(\xi).$$

Si tomamos solamente los dos términos primeros, tenemos una aproximación lineal:

$$y = f(a) + h f'(a), \quad \text{o sea:} \quad y = f(a) + (x - a) f'(a),$$

que representa (§ 31-1) la tangente en el punto $A(a, f(a))$.

NOTA: En las ciencias físicas se presentan funciones empíricas, dadas por experiencias, que conviene representar analíticamente, esto es, por fórmulas, para inducir la marcha de los fenómenos análogos. Tal sucede, por ejemplo, con las deformaciones producidas en los ensayos a la tracción, de varillas metálicas, donde se observa que la gráfica tiene un trazo sensiblemente rectilíneo, que revela la proporcionalidad entre los esfuerzos y las dilataciones dentro del límite de elasticidad. Es la ley de HOOKE. Pero esta proporcionalidad es sólo aproximada; y si bien suele ser suficiente para predecir la cuantía de la dilatación, hay casos en que la deformación crece más rápidamente que los esfuerzos. La función lineal no es entonces suficiente para expresar la ley de deformación, por lo cual hay que agregarle un término cuadrático, y aun de tercer grado.

Lo mismo sucede con la fórmula de dilatación de varillas por el calor.

Según la fórmula de TAYLOR, es suficiente la aproximación lineal en un intervalo mayor o menor, según que la derivada segunda sea menor o mayor.

EJERCICIO: Utilizando la aproximación lineal, hallar un valor apro-

ximado de tg 46°, acotar el error, y comparar con una tabla de tangentes naturales (1° = 0,01745 en medida radial).

2. **Discusión general de la concavidad e inflexiones.** — Los resultados (§ 33-9) sobre el sentido de la concavidad y los puntos de inflexión se pueden reencontrar y completar estudiando el error de la aproximación lineal. En efecto, ésta nos da la tangente, y su error mide la diferencia de ordenadas entre la curva y la tangente.

Para estudiar su signo conviene escribir el desarrollo en la forma (39-3, a), que sólo supone la existencia de $f''(a)$ finita:

$$y = f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \tfrac{1}{2} h^2 f''(a) + o(h^2) =$$
$$= f(a) + h f'(a) + \tfrac{1}{2} h^2 [f''(a) + \delta],$$

siendo δ infinitésimo para $h \to 0$.

Si es $f''(a) > 0$ es $T_1 = \tfrac{1}{2} h^2 [f''(a) + \delta] > 0$ a uno y a otro lado del punto en un cierto entorno, la curva se conserva en él por encima de la tangente, y la concavidad se dirige hacia las y positivas (§ 33-9).

Si es $f''(a) < 0$, y por lo tanto $T_1 < 0$ en un cierto entorno, la curva queda debajo de la tangente y la concavidad se dirige hacia las y negativas.

Si T_1 tiene signos distintos a ambos lados del punto, la curva queda atravesada por la tangente y el punto se llama (§ 33-9) de *inflexión*. Condición necesaria pero no suficiente para tal cambio de signo es $f''(a) = 0$. En este caso, nada puede asegurarse *a priori* respecto del signo del término complementario que da la posición de la curva con relación a la tangente cuando no es fácil estudiar el cambio de signo. Extenderemos el desarrollo de TAYLOR hasta llegar a una derivada $f^{(n)}(x)$ que no se anule en el punto considerado; si es $f^{(n)}(a)$ finita, tendremos por § 39-3, a, siendo δ infinitésimo para $h \to 0$

$$y = f(a) + h f'(a) + \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(a) + \delta].$$

El error o diferencia de ordenadas entre la curva y la recta tangente viene expresado por el término de grado n, el cual cambia o no de signo en el entorno de a, según que sea n impar o par.

En el primer caso, la curva queda atravesada por la tangente, y A es un punto de inflexión; en el segundo caso, la curva queda a un lado de la tangente (en un cierto entorno del punto), por encima o por debajo de ella, según sea $f^{(n)}(a) \gtrless 0$, es decir, el signo + corresponde a la concavidad hacia las y positivas, y el signo — expresa la concavidad hacia las y negativas. Luego:

La curva presenta una inflexión en el punto A, *o queda en un cierto entorno a un mismo lado de la tangente, según que la primera derivada no nula de orden superior al primero, sea de orden impar o par. En este último caso, la concavidad de la curva se dirige hacia las y positivas o negativas, según que el signo de dicha derivada, no nula, sea + ó —.*

3. **Discusión general de los máximos y mínimos relativos.** — Otra aplicación interesante de la fórmula de TAYLOR es la discusión general de los máximos y mínimos relativos de una función, cuando ésta admite derivadas sucesivas finitas en un intervalo.

Hemos demostrado que es condición necesaria para que la función derivable $f(x)$ tenga un máximo o un mínimo relativo en el punto a, que sea $f'(a) = 0$. Cumplida esta condición, sea $f^{(n)}(x)$ la primera derivada que no se anula para $x = a$: supuesta finita, como corolario del apartado anterior resulta:

Si n es impar, existe inflexión, y por lo tanto no hay ni máximo ni mínimo.

Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, hay concavidad hacia $y > 0$, es decir, las ordenadas son en un entorno mayores que $f(a)$; luego, existe mínimo; si $f^{(n)}(a) < 0$, hay concavidad hacia $y < 0$, es decir, las ordenadas son menores que $f(a)$; luego, existe máximo. Resumen:

La condición necesaria y suficiente para que una función derivable sucesivamente en un punto a, tenga en él un máximo o un mínimo, es que la primera derivada que no se anule para $x = a$ sea de orden par; si esta derivada se hace negativa (positiva) para $x = a$, el valor es máximo (mínimo), respectivamente.

EJEMPLO: Calculemos los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x}.$$

Desarrollando el numerador de la función dada, resulta:

$$\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + T\right) - \left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + T'\right) - 2x = \frac{x^3}{3} + \ldots$$

y, por lo tanto:

$$f(x) = \frac{x^2}{3} + \ldots;$$

luego, en el punto $x = 0$ tiene un mínimo, pues la primera derivada se anula y la segunda es positiva.

NOTA: En general, si el desarrollo de MAC-LAURIN es:

$$f(x) = a x^n + \ldots$$

hay máximo en el punto $x = 0$, si n es par y $a < 0$;
" mínimo " " " " " " " " $a > 0$;
" inflexión " " " " " " impar.

4. Resolución aproximada de ecuaciones. — *a) Regla de* NEWTON. — Hemos visto (§ 26-3) cómo el proceso de demostración del teorema de BOLZANO (§ 26-2) permite aproximar las raíces de la ecuación

[40-1] $$f(x) = 0,$$

conociendo un intervalo de continuidad de $f(x)$ en cuyos extremos ésta tenga signos opuestos.

Si además $f(x)$ admite derivadas hasta un cierto orden, la aproximación puede mejorarse más rápidamente si se utiliza la fórmula de TAYLOR, que al dar aproximaciones de $f(x)$ mediante polinomios, permite sustituir la ecuación algebraica o trascendente [40-1] por otra algebraica entera de más fácil resolución, y cuyas raíces serán valores aproximados de las raíces de [40-1], con un error que se puede acotar.

Sea $f(x) = 0$ una ecuación cuyo primer miembro admite derivada segunda; si a es un valor aproximado de una raíz de esta ecuación, es decir, si existe una raíz α y sólo una en (a, b)

o (b, a), y ponemos $\alpha = a + x'$, aplicando el desarrollo de TAYLOR al intervalo (a, α), la ecuación puede escribirse así:

$$[40\text{-}2] \quad f(\alpha) = f(a) + x' . f'(a) + \tfrac{1}{2} x'^2 . f''(\xi) = 0$$

donde la nueva incógnita x' es el incremento que debe asignarse al valor a, para tener exactamente la raíz $\alpha = a + x'$. Adoptamos la forma de LAGRANGE (§ 39-3, b), que supone la continuidad de $f'(x)$ y la existencia de $f''(x)$ en todo el intervalo de extremos a y α, que es fijo, no siendo suficiente, por lo tanto, la forma infinitesimal del término complementario (§ 39-3, a).

Naturalmente, la ecuación [40-2] no podemos resolverla, por desconocer el término de segundo grado; pero si prescindimos de él y tomamos como expresión aproximada de la función el polinomio de primer grado, la ecuación lineal

$$[40\text{-}3] \quad f(a) + x' . f'(a) = 0 \quad \text{da:} \quad x' = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

mientras que el valor exacto satisface a la relación:

$$[40\text{-}4] \qquad x' = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \tfrac{1}{2} x'^2 \frac{f''(\xi)}{f'(a)}.$$

NOTA: Cuando la derivada segunda está acotada en el intervalo considerado, y se conoce un número k al cual se conserva inferior en valor absoluto, el error cometido al tomar [40-3] como término de corrección del valor a es:

$$[40\text{-}5] \qquad \left| x'^2 \frac{f''(\xi)}{2 f'(a)} \right| < \frac{l^2 k}{2 \; f'(a)},$$

llamando l a la longitud del intervalo, o sea: $l = b - a$.

Si, por ejemplo, el intervalo (a, b) es $(4{,}071,\ 4{,}072)$, y la derivada segunda se conserva inferior a 10, siendo $f'(a) = 1/15$, el error cometido con la regla de NEWTON será menor que $0{,}000001 \times 10 \times 7{,}5 < 0{,}0001$, y por lo tanto, obtendremos exactamente la cifra de las diezmilésimas *.

Al calcular el término de corrección [40-3], será inútil, pues, obtener más cifras que las indicadas por la fórmula [40-5], puesto que en general serán inexactas.

b) *Representación geométrica.* — La sustitución $x = a + x'$ equivale, geométricamente, a tomar como origen de abscisas el punto a; la ecuación

$$[40\text{-}6] \qquad y = f(a) + x' f'(a) + x'^2 \frac{f''(\xi)}{2}$$

representa, pues, la curva referida a este origen, y la ecuación [40-2] representa sus intersecciones con el eje x.

En cambio, la ecuación simplificada

$$[40\text{-}7] \qquad y = f(a) + x' . f'(a)$$

representa una recta que es la tangente en el punto de abscisa a.

La regla de NEWTON para obtener un valor de la raíz α,

* Es extraño que algunos autores den *como norma general* que con la regla de NEWTON se obtiene doble número de cifras exactas, de las que tiene el primer valor a.

más aproximado que el valor dado a, equivale, por lo tanto, a sustituir la curva por su tangente en el punto de abscisa a.

c) *Regla perfeccionada de* FOURIER. — El examen de la fórmula [40-4], donde las derivadas 1ª y 2ª pueden tener valores cualesquiera, o la simple inspección de la figura 121, muestra claramente que el nuevo valor $a_1 = a + x'$ puede ser menos aproximado que el a al verdadero valor de la raíz.

Para tener la garantía de que se mejora la aproximación aplicando la regla de NEWTON, procederemos así:

Suponemos que $f''(x)$ no se anula en el intervalo, y por lo tanto, que tiene el mismo signo en a y b; en cambio, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios; luego, hay un extremo, y uno solo, tal que $f(x)$ y $f''(x)$ tienen *el mismo signo*; pues bien, elegimos ese punto, y agregándole el término complementario de NEWTON, tenemos una mejor aproximación, como se observa en la figura 121, donde se han puesto los cuatro casos posibles, y en todos ellos queda a_1 entre el valor de partida y el de α, es decir, más aproximado al valor de la raíz buscada.

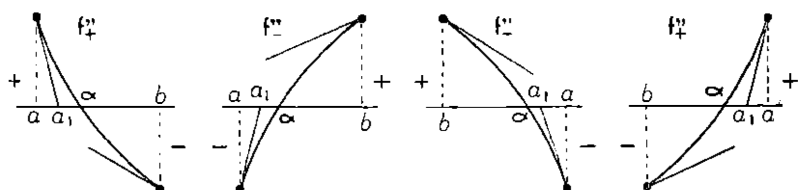


Fig. 121.

En efecto, llamando a al extremo en que $f(x)$ y $f''(x)$ tienen igual signo, los dos términos de [40-4] tienen igual signo; si ambos son positivos, resulta: $a < a_1 < \alpha$; y si ambos son negativos, $a > a_1 > \alpha$; luego, en ambos casos nos hemos aproximado hacia el valor α.

Partiendo del nuevo valor $a_1 = a + x_1$, aplicaremos de nuevo la regla de NEWTON y obtendremos un nuevo término de corrección:

$$x_2 = -\frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

que nos da otro valor aproximado: $a_2 = a_1 + x_2$. Así siguiendo, tenemos, en general:

[40-8] $$x_{n+1} = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}; \quad \text{o sea:} \quad f(a_n) = -x_{n+1} f'(a_n).$$

Puesto que la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es monótona, pero acotada, tiene un límite α'. Si en la relación [40-8] tomamos límites para $n \to \infty$, como $f(x)$ y $f'(x)$ son funciones continuas y, además, $x_{n+1} \to 0$, resulta: $f(\alpha') = 0$, y como en el intervalo sólo existe, por hipótesis, la raíz α, debe ser $\alpha' = \alpha$.

El valor exacto de la raíz α aparece, pues, dado por la fórmula:

[40-9]
$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n \quad ; \quad \text{o bien:}$$
$$\alpha = a + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots$$

EJEMPLO: Como aplicación notable del método anterior, vamos a hallar la menor raíz positiva de la ecuación trascendente

[40-10] $$\operatorname{tg} x = x.$$

En § 26-3 hemos obtenido como primera aproximación:

$$257°\,27' < x' < 257°\,28', \qquad \varepsilon < 1' = 0{,}00029 \ldots < 0{,}001;$$

y como

$$f''(x') = 2\,\frac{\operatorname{sen} x'}{\cos^3 x'} > 0,$$

partiremos del valor $257°\,28'$, poniendo $x' = 257°\,28' + x''$; teniendo en cuenta que el error [40-5] es, aproximadamente, en valor absoluto:

$$\frac{x''^2}{2}\,\frac{f''(\xi)}{f'(a)} = x''^2\,\frac{\operatorname{sen}\xi \,.\, \cos^2 a}{\cos^3\xi \,.\, \operatorname{sen}^2 a} < 10\,x'^2 < 0{,}000001,$$

podremos calcular seis cifras decimales exactas en la corrección:

$$\begin{array}{r}
180° = 3{,}141593 \\
77° = 1{,}343903 \\
28' = 0{,}008144 \\ \hline
4{,}493640 \\
\operatorname{tg} 257°\,28' = 4{,}498323 \\ \hline
f(257°\,28') = 0{,}004683 \\
f'(257°\,28') = 20{,}23\ldots(*)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
-\dfrac{0{,}004683}{20{,}23} = -\,0{,}000231 = -\,47'' \\
a = 4{,}493640 = 257°\,28' \\ \hline
a_1 = 4{,}493409 = 257°\,27'\,13'' \\ \hline
\left(\varepsilon < \dfrac{1}{10^6}\right) \qquad (\varepsilon < 1'')
\end{array}$$

EJERCICIO: ¿Qué puede ocurrir cuando $f''(x)$ cambia de signo en (a, b)?

d) *Regula falsi.* — Así como la regla de NEWTON equivale a sustituir la curva por su tangente en un punto, muchas veces conviene más sustituir (como hicimos en el § 35-5 para calcular valores intermedios) el arco de curva comprendido entre las abscisas a, b por la cuerda que une sus extremos. Esta simplificación para calcular las raíces suele llamarse método de *partes proporcionales*, o *regula falsi*.

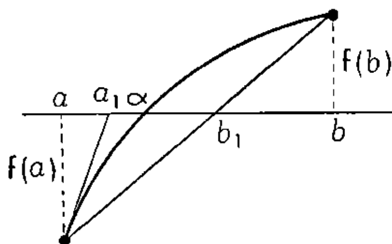


Fig. 122.

Si es b_1 el punto del intervalo en que la cuerda corta al eje, tenemos la proporción siguiente (fig. 122):

[40-11] $$\frac{f(b) - 0}{b - b_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad ;$$

de donde:

[40-12] $$b_1 = b - f(b)\,\frac{b - a}{f(b) - f(a)} = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}\,.$$

(*) Puesto que sólo podemos calcular tres cifras significativas del cociente, bastará tomar cuatro en el dividendo y en el divisor.

Como la derivada $f''(x)$ no se anula en (a, b), el arco está comprendido en el ángulo de la cuerda y la tangente en un extremo; porque si atravesara a una u otra, por el teorema del valor medio tendría dos tangentes paralelas, y en un punto intermedio sería $f''(\xi)=0$.

El punto α en que el arco corta al eje está, pues, comprendido entre el a_1 de intersección de la tangente, dado por la regla de NEWTON, y el b_1, intersección de la cuerda, dado por la *regula falsi*; es decir, el a_1 mejora la aproximación del extremo a, en que f y f″ tienen igual signo; el b_1 sustituye al extremo b, en que f y f″ tienen signo contrario, y se verifica:

$$a < a_1 < \alpha < b_1 < b \quad ; \quad \text{o bien:} \quad a > a_1 > \alpha > b_1 > b$$

e) *Método mixto.* — La combinación del método de NEWTON con el de partes proporcionales permite obtener una segunda sucesión de valores aproximados a la raíz, pero en sentido opuesto que los a_i; por lo tanto, da un límite del error cometido.

Elegido el extremo a, en el que $f(x)$ tiene igual signo que $f''(x)$, y sustituído por el valor a_1, dado por la regla de NEWTON, podemos reemplazar el otro extremo b por el valor dado por la *regula falsi*, y obtenemos un nuevo intervalo (a_1, b_1) con iguales propiedades que el (a, b), a saber: en él hay una raíz de $f(x)$, y sólo una; en el extremo a_1 tiene $f(x)$ el mismo signo que $f''(x)$, y signo contrario en b_1.

Aplicando reiteradamente el mismo proceso, obtenemos las sucesiones $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, que se aproximan al valor α en sentidos opuestos.

La primera tiene, por [40-9], el límite α, y también la segunda, definida por recurrencia por:

$$[40\text{-}13] \qquad b_{n+1} = \frac{a_n\, f(b_n) - b_n\, f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

En efecto, puesto que la sucesión $\{b_n\}$ es monótona, tiene límite β, y tomando límites para $n \to \infty$, en la relación $b_{n+1}[f(b_n) - f(a_n)] = a_n f(b_n) - b_n f(a_n)$, resulta $\beta f(\beta) = \alpha f(\beta)$; luego, es $f(\beta) = 0$, ó bien $\alpha = \beta$, y en ambos casos debe ser $\beta = \alpha$.

5. **Parábola osculatriz.** — Estudiada ya la aproximación lineal, o sea la posición de la curva respecto de su tangente, y algunas de sus múltiples consecuencias, pasemos a la obtenida con el polinomio osculador de TAYLOR de segundo grado. Obtenemos la curva:

$$[40\text{-}14] \quad y = P_2(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \tfrac{1}{2}(x-a)^2 f''(a),$$

que es la parábola osculatriz, entre las de eje paralelo al y (§ 38-8, c) y tiene con la curva $y = f(x)$ un contacto por lo menos de orden 2 en el punto a, si existe $f'''(a)$ finita, pues la diferencia de ordenadas es, por § 39-3, a, poniendo $x - a = h$:

$$T_2 = \frac{1}{3!} h^3 f'''(a) + o(h^3) = \frac{1}{3!} h^3 [f'''(a) + \delta],$$

siendo δ infinitésimo para $h \to 0$. Esta diferencia de ordenadas tiene un cero de orden 3 y equivalencia potencial, si $f'''(x)$ es finita y no nula en $x = a$, y entonces $f(x) - P_2(x)$ cambia de signo al pasar h de negativo a positivo. Es decir: la pará-

bola atraviesa a la curva en el punto de contacto, a no ser que el contacto sea superior, por anularse la derivada 3ª. Tal ocurre en $x = 0$ con $y = +\sqrt{1 - x^2}$ (semicircunferencia) y con $y = \cos x$, como puede verse a partir de [39-18].

Esta parábola tiene el eje paralelo al y; al cambiar los ejes coordenados, la parábola varía, y por esto se prefiere la circunferencia osculatriz o círculo osculador, que en el punto dado tiene un contacto poı lo menos de orden 2 con la curva dada; es decir, que tiene comunes con la función $f(x)$ las derivadas 1ª y 2ª en dicho punto, el que, como veremos (§ 40-6), queda así determinado.

EJERCICIOS: 1. Como aproximación de la catenaria $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, obtener la parábola osculatriz en el punto más bajo ($x = 0$, $y = 1$).

2. Ídem la parábola osculatriz en el punto (a, b).

3. Determinar la parábola osculatriz de la curva $y = e^x$ en el punto $x = 1$.

NOTA: Si $f''(a) = 0$, la aproximación lineal coincide con la cuadrática, y la "parábola osculatriz" [40-14] se reduce a una recta (recta tangente), como ocurre en $y = \operatorname{sen} x$ para $x = 0$ (fig. 120). Como en el caso general, esta "parábola" atraviesa la curva, y $x = a$ es entonces punto de inflexión, a no ser que el contacto sea superior y de orden impar (§ 40-2).

6. **Circunferencia osculatriz.**—Una circunferencia arbitraria,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2, \quad [40\text{-}15]$$

queda unívocamente determinada dando los valores de y, y', y'' en un punto cualquiera de ella. En efecto, derivando los dos miembros de la ecuación

$$(y - \beta)^2 = \rho^2 - (x - \alpha)^2,$$

que son funciones de x, se obtienen las relaciones:

$$(y - \beta)\, y' = -(x - \alpha)$$
$$(y - \beta)\, y'' + y'^2 = -1,$$

de donde:

$$y - \beta = -\frac{1 + y'^2}{y''}; \quad x - \alpha = y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad [40\text{-}16]$$

relaciones que determinan las coordenadas (α, β) del centro. Sustituyendo en la ecuación dada, resulta el radio, cuyo cuadrado es:

$$\rho^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}. \quad [40\text{-}17]$$

Estas tres fórmulas, [40-16] y [40-17], resuelven el problema.

Dada una curva $y = f(x)$, los valores $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ en un punto cualquiera determinan, como hemos visto (§ 40-5), una parábola de eje paralelo al y, que tiene un contacto por lo menos de orden 2 con la curva si existe $f''(a)$ finita. Análogamente, entre las infinitas circunferencias tangentes a la

curva en dicho punto, hay una sola que tiene con la curva un contacto por lo menos de orden 2, y es entonces (§ 38-8, *c*), la *circunferencia osculatriz* o *círculo osculador*.

En efecto, tomando como elementos determinativos de la circunferencia los mismos valores y, y', y'', que en dicho punto tiene la función dada, según exige la condición de contacto por lo menos de orden 2, las fórmulas [40-16] y [40-17] determinan el centro y el radio. Este último se llama *radio de curvatura* (§ 55).

Si la curva viene dada en forma paramétrica, $x = \mathrm{x}(t)$, $y = \mathrm{y}(t)$, convendrá transformar la fórmula anterior. No siendo ya x variable independiente, se tendrá:

[40-18] $$y' = \mathrm{d}\,y/\mathrm{d}\,x$$
$$\mathrm{d}\,y' = [\mathrm{d}\,x\,.\,\mathrm{d}^2 y - \mathrm{d}\,y\,.\,\mathrm{d}^2 x] : \mathrm{d}\,x^2$$

de donde:

[40-19] $$y'' = \frac{\mathrm{d}\,x\,.\,\mathrm{d}^2 y - \mathrm{d}\,y\,.\,\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,x^3}$$

y sustituyendo resulta:

[40-20] $$\rho = \frac{(\mathrm{d}\,x^2 + \mathrm{d}\,y^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{d}\,x\,.\,\mathrm{d}^2 y - \mathrm{d}\,y\,.\,\mathrm{d}^2 x} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}},$$

representando por $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ las derivadas segundas respecto de t.

NOTAS: 1. Como en el caso de la parábola osculatriz, también la circunferencia osculatriz atraviesa a la curva en el punto de contacto, a no ser que este contacto sea de orden mayor que 2 e impar (§ 40-2). Tal ocurre en $x = 0$ con $y = \cos x$, como se ve por simples consideraciones geométricas de simetría.

2. Si $\mathrm{f}''(a) = 0$, carece de sentido la expresión [40-17], pero (cfr. § 40-5, nota) podemos considerar como "circunferencia osculatriz de radio infinito" a la recta tangente.

3. Una generalización del concepto de circunferencia osculatriz puede verse en nota I, *c*).

EJERCICIOS

1. Mínimo de $y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$.

2. *a*) Discutir los máximos, mínimos y puntos de inflexión de $y = x^3 + px + q$. *b*) Utilizar los resultados para discutir la naturaleza de las raíces de la ecuación $x^3 + px + q = 0$ (§ 19-3, *b*).

3. Comportamiento en $x = 0$ de las funciones:
$$\mathrm{f}(x) = \sqrt{a^2 + x^2} - a; \quad \mathrm{g}(x) = \cos 2\,x - e^{-2\,x^2}.$$

4. Sabiendo que $\sqrt{2}$ está comprendida entre 1,41 y 1,42, hallar nuevas cotas con una aplicación de la regla de NEWTON.

5. *a*) Probar que la ecuación $\lg x = 1/x$ tiene una sola raíz real; *b*) aproximarla, a partir de $2{,}506 < x < 2{,}507$, con una sola aplicación de la regla de NEWTON-FOURIER, y acotar el error.

6. Calcular la raíz positiva de $x^3 + 6\,x - 8 = 0$ con cinco cifras exactas (cap. V, nota II, *b*)

7. Hallar la menor raíz positiva de $\mathrm{tg}\,x = x$ (§ 40-4, ejemplo), por el método de partes proporcionales combinado con el de NEWTON.

8. *a*) En el método mixto, aplicando el teorema del incremento finito al intervalo (a_n, a_{n+1}), demostrar que no sólo convergen los números a_n hacia α, es decir, $\alpha = a + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$, sino que esta convergencia es muy rápida, pues $x_{n+1}/x_n \to 0$; *b*) probar lo mismo para la sucesión $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$

9. Demostrar que la sucesión de valores obtenidos al aplicar reiteradamente la *regula falsi* (sin combinar con la de NEWTON), converge también hacia la raíz; pero la razón de un término al anterior en la sucesión de correcciones tiene un límite distinto de cero.

10. Expresar y representar conjuntamente con $f(x) = \operatorname{sen} x$, sus dos primeros polinomios osculadores $P_1(x)$ (recta tangente), y $P_2(x)$ (parábola osculatriz), para $x = \pi/6$ (cfr. ej. 4 de § 39).

11. Calcular el radio de curvatura de la *catenaria*

$$y = a \operatorname{ch} x/a = \tfrac{1}{2} a\,(e^{x/a} + e^{-x/a}).$$

§ 41. RESOLUCIÓN NUMÉRICA GENERAL DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

1. **Función general de variable compleja.** — *a*) Hemos visto (§ 18-1) que una ecuación algebraica de grado n en una incógnita z tiene siempre solución *en el campo complejo*, y que sus raíces, distintas o coincidentes, son en dicho campo precisamente n (§ 18-2). Por esto el estudio de la resolución algebraica es más sencillo y natural en el campo complejo, lo que haremos dando breves nociones previas de *función compleja de variable compleja* (§ 23-8, *c*).

Una tal función:

[41-1] $$w = \mathrm{w}(z),$$

establece una correspondencia entre los *planos complejos* (fig. 123) de las variables $z = x + i\,y$ y $w = u + i\,v$, equivalente al par de correspondencias reales:

[41-2] $$u = \mathrm{u}(x, y), \quad v = \mathrm{v}(x, y).$$

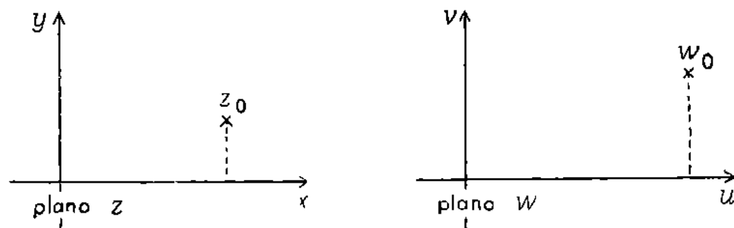


Fig. 123.

Las definiciones de límite, continuidad, infinitésimos e infinitos son análogas a las vistas en el campo real.

a_1) Así es:

$$\lim \mathrm{w}(z) = w_0 \text{ para } z \to z_0,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$| w(z) - w_0 | < \varepsilon \quad \text{para} \quad 0 < | z - z_0 | < \delta .$$

Lo dicho en § 24-1 se traslada aquí, con obvias modificaciones, llamando *entorno* de un punto w_0 a un círculo con centro en él, y *entorno reducido* de un punto z_0 al conjunto obtenido al suprimir dicho punto de un entorno de él.

a_2) La función $w(z)$ es *continua* en z_0 si es

[41-3] $$\lim w(z) = w(z_0) \quad \text{para} \quad z \to z_0 .$$

De otro modo, si

$w_0 = u_0 + i\, v_0$, con $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, $z_0 = x_0 + i\, y_0$, la [41-3] es equivalente a:

$$+ \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \varepsilon ,$$

es decir:

[41-4] $$| u(x, y) - u(x_0, y_0) | < \varepsilon \quad y \quad | v(x, y) - v(x_0, y_0) | < \varepsilon$$

para

$$+ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta .$$

Las condiciones [41-1] establecen que las funciones [41-2] son *continuas en* (x_0, y_0), (cfr. § 65 en Vol. II). Recíprocamente, por ser $| w - w_0 | \leqq | u - u_0 | + | v - v_0 |$, de las [41-4] se deduce [41-3], es decir: *la condición necesaria y suficiente para que la función* $w(z)$ *sea continua en el punto* z_0 *es que lo sean en este punto las dos funciones componentes* $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$.

EJEMPLO 1. El módulo $| z | = + \sqrt{x^2 + y^2}$ es función real de variable compleja, continua en todo el plano z. El *valor principal* (§ 9-4, *b*) del argumento Arg z es función real de variable compleja z, continua en todo el plano z, incluso en los puntos del semieje positivo $x > 0$, pero discontinua en los puntos del semieje negativo, incluído el origen: $x \leqq 0$.

a_3) Si $w(z)$ es una función continua de z, y el punto z describe una curva plana (§ 29-2), definida por dos funciones continuas:

[41-5] $$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

de la variable real t, como su punto homólogo en el plano w, está determinado por las coordenadas [41-2], dando las *funciones compuestas*:

[41-6] $$u = u[x(t), y(t)] = \varphi(t), \quad v = v[x(t), y(t)] = \psi(t);$$

por demostración análoga a la del teorema final del § 25-7, quedan las [41-6] funciones continuas de t, es decir, el punto w describe tambiéh una curva plana.

a_4) *La función racional entera* (§ 23-7):

[41-7] $$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n ,$$

de variable compleja z, con coeficientes reales o complejos, es continua en todo el plano z. En efecto, para cualquier valor complejo z fijo, consideremos un incremento complejo h, y para calcular $w(z + h)$, podemos aplicar (§ 12-1) la potencia del binomio $(z + h)^\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, dando:

$$w(z + h) - w(z) = b_1 h + b_2 h^2 + \ldots + b_{n-1} h^{n-1} + b_n h^n ,$$

donde $b_n = a_0$, con $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ dependientes de z, pero no de h. Si $m =$ máx. $(|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n|)$, basta tomar $|h| < \delta = \varepsilon/(n\,m + \varepsilon)$, para que:

$$|w(z+h) - w(z)| \leqq (|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|) . |h| < \varepsilon,$$

como queríamos demostrar.

a_5) Se dice que $w(z)$ es un *infinitésimo* para $z \to z_0$, si $\lim w(z) = 0$ para $z \to z_0$, mientras que $w(z)$ es un *infinito* para $z \to z_0$ si para cada $H > 0$ existe un $\delta = \delta(H) > 0$ tal que $|w(z)| > H$ para $0 < |z - z_0| < \delta$.

b) La definición de *derivada* es también la misma:

$$[41\text{-}8] \quad w'(z_0) = w'_0 = \lim \frac{w(z_0+h) - w(z_0)}{h} \quad \text{para } h \to 0,$$

y la función se llama *derivable* o *monógena* en el punto z_0, si este límite existe y es finito. En el campo real (§ 30-2), el límite de la razón incremental k/h debe ser único, tanto si h es positivo como negativo, es decir, si $x_0 + h$ tiende a x_0 por la derecha o por la izquierda. En el campo complejo hay no *dos*, sino *infinitos* caminos para tender a un punto z_0, y es preciso que el cociente de incrementos $\Delta w : \Delta z$ tenga el mismo límite para $\Delta z \to 0$, cualquiera sea el camino elegido; cuando tal sucede, ese límite único w'_0 es la derivada [41-8].

EJEMPLO 2. Para derivar la función $w = z^2$, el mismo cálculo hecho para variables reales (§ 30-2, ej.) sirve aquí:

$$\Delta w = (z + \Delta z)^2 - z^2 = 2z \,.\, \Delta z + (\Delta z)^2,$$

y como el cociente $\Delta w : \Delta z$ se compone del sumando fijo $2z$ y el sumando infinitésimo Δz, tiene como límite $2z$ para $\Delta z \to 0$.

Por lo tanto: la derivada de z^2 es $2z$.

Análogamente, la derivada de z^n es $n z^{n-1}$ (n natural).

DEF.: Las funciones que para cada punto z de una cierta región * tienen derivada, se llaman *analíticas*.

El teorema capital (CAUCHY) de la teoría de funciones de variable compleja es la identificación de este concepto con el del mismo nombre dado (§ 23-8) a las expresables por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. (Cfr. § 114 en vol. III).

Son analíticas todas las funciones elementales, y también las compuestas con ellas, pues las reglas de derivación de sumas, diferencias, productos, cocientes, funciones de función, etc., conservan su validez en el campo complejo, como se observa repasando sus demostraciones.

EJERCICIO: Comprobar que $w = \bar{z}$, $w = |z|$, $w = R(z)$, $w = I(z)$, $w = \operatorname{Arg} z$ son ejemplos de funciones continuas no derivables en el campo complejo.

---

* En el vol. III (§ 114) precisaremos la locución "cierta región", viendo que ésta debe contener todo un entorno de cada uno de sus puntos y pueda obtenerse por "prolongación" (intuitivamente ensanchamiento) de uno cualquiera de estos entornos.

c) *La interpretación geométrica de la derivada* en el campo complejo es importantísima, tanto para la teoría como para las aplicaciones. Si $w = \mathrm{w}(z)$ es monógena en el punto z_0, y

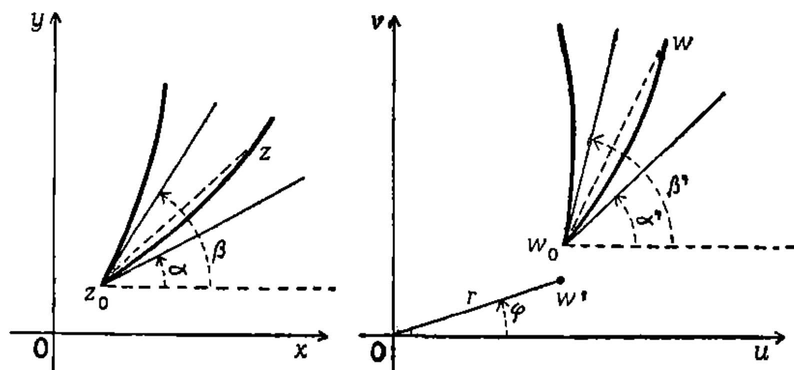


Fig. 124.

la derivada es $w' = r_\varphi$, $(r \neq 0)$, como el módulo y el argumento son funciones continuas, es:

$$\lim \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = |w'| = r; \qquad \lim \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \operatorname{Arg} w' = \varphi.$$

Para $|\Delta z| \to 0$ y $\operatorname{Arg} \Delta z \to \alpha$, si z tiende a z_0 según una curva (fig. 124) cuya semitangente en z_0 forma el ángulo α con el semieje $+ x$, es

$$\operatorname{Arg} \Delta w = \operatorname{Arg} \Delta z + \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} \to \alpha + \varphi;$$

es decir, el punto w describe una curva con semitangente en w_0, de inclinación $\alpha' = \alpha + \varphi$. Si $z \to z_0$ según otra curva con semitangente en z_0 de inclinación β, la homóloga tiene inclinación $\beta' = \beta + \varphi$.

Restando resulta: $\beta' - \alpha' = \beta - \alpha$; luego:

El ángulo de dos curvas que pasan por z_0 es igual al de las homólogas en el punto w_0.

Dicho brevemente: *la correspondencia es isogonal en los puntos de derivada no nula.*

Como $\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| \to r$ independientemente del argumento, resulta que las longitudes de los vectores homólogos tienen razón que se aproxima indefinidamente a r. Dos triángulos homólogos (z_0, z_1, z_2) y (w_0, w_1, w_2) son, pues, sensiblemente semejantes, y por lo tanto, se conserva la forma de las figuras infinitesimales. Por esto se dice que la correspondencia o transformación o representación efectuada por la función monógena es *conforme directa* en todo punto donde la derivada no es nula.

EJEMPLO 3. En la correspondencia $w = z^2$ son rectos los ángulos que forman en cada plano las curvas homólogas de las rectas paralelas a los ejes en el otro plano.

Consideremos el punto $z = 1 + i$; su homólogo es $w = 2i$; la derivada vale en él $2(1 + i)$, cuyo argumento es $\pi : 4$; luego, el haz de tangentes a las curvas homólogas de las trazadas por aquel punto se deduce de él girando 45° en sentido positivo.

2. **Raíces múltiples. Reducción de la ecuación y continuidad de las raíces.** — *a*) Mediante la descomposición factorial (§ 18-2), la definición que hemos dado de raíz múltiple de una ecuación algebraica [18-1] de grado n es ésta:

Se dice que ζ es raíz múltiple de orden p, si se verifica:

[41-9] $$\mathrm{f}(z) = (z - \zeta)^p \varphi(z),$$

siendo $\varphi(z)$ un polinomio de grado $n - p$, que no se anula para $z = \zeta$. La fórmula [41-9] es análoga a la [38-20], y como en el campo complejo un producto se deriva por la misma regla que en el campo real (§ 41-1, *b*), se obtendrá también

$$\mathrm{f}'(z) = p(z - \zeta)^{p-1} \varphi(z) + (z - \zeta)^p \varphi'(z) =$$
$$= (z - \zeta)^{p-1} [p\varphi(z) + (z - \zeta)\varphi'(z)] \quad ,$$

tomando el corchete el valor $p\varphi(\zeta) \neq 0$ para $z = \zeta$, es decir ζ *es raíz múltiple de orden* $p - 1$ *de la derivada* $\mathrm{f}'(z)$, y por lo tanto:

La condición necesaria y suficiente para que un número ζ sea raíz múltiple de orden p del polinomio $\mathrm{f}(z)$, *es que anule a este polinomio y a sus* $p - 1$ *primeras derivadas, pero no a la siguiente, es decir, el orden de un cero ζ es el índice de la primera derivada que no se anula en ζ.*

b) *Descomposición de la derivada logarítmica en fracciones simples.* — Se llama así a la siguiente:

[41-10] $$\frac{\mathrm{f}'(z)}{\mathrm{f}(z)} = \frac{1}{z - \zeta_1} + \frac{1}{z - \zeta_2} + \ldots + \frac{1}{z - \zeta_n},$$

obtenida por derivación de la descomposición factorial [18-5]. En [41-10] pueden agruparse las p fracciones que corresponden a una raíz p-ple, resultando el numerador p en vez de 1. Por lo tanto, *si* $\mathrm{f}(x)$ *es un polinomio de coeficientes reales,* subsistirá el teorema de § 38-7, *c*, es decir:

TEOR.: *Al pasar la variable real x en sentido creciente por una raíz real ξ de orden cualquiera de la ecuación algebraica* $\mathrm{f}(x) = 0$ *de coeficientes reales, la fracción* $\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x)$ *pasa de* $-\infty$ *a* $+\infty$. *El cociente inverso* $\mathrm{f}(x)/\mathrm{f}'(x)$ *es continuo en ξ, donde se anula pasando de negativo a positivo.*

c) Veamos ahora cómo, sólo mediante operaciones de derivación y división, podemos reducir el problema de hallar las raíces de una ecuación algebraica $\mathrm{f}(z) = 0$, al de ecuaciones más sencillas, que tengan sólo raíces simples.

En la descomposición factorial [18-5] agrupemos todos los factores correspondientes a raíces simples, y llamemos $\mathrm{f}_1(z)$ a su producto; agru-

pemos igualmente los factores correspondientes a raíces dobles, sin tomar en cuenta el exponente 2, y llamemos $f_2(z)$ a su producto; sea $f_3(z)$ el producto de los binomios que representan raíces triples, etc. Así, podemos escribir la descomposición factorial en la forma:

[41-11] $$f(z) = f_1(z) \cdot [f_2(z)]^2 \cdot [f_3(z)]^3 \ldots$$

La derivada tendrá la forma

[41-12] $$f'(z) = f_2(z) \cdot [f_3(z)]^2 \ldots \varphi(z),$$

donde $\varphi(z)$ no tiene raíces comunes con $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., es decir, es prima con ellas.

El m. c. d. de $f(z)$ y $f'(z)$ (§ 17-5, *c*) es:

[41-13] $$D(z) = \text{m. c. d. } [f(z), f'(z)] = f_2(z) \cdot [f_3(z)]^2 \ldots,$$

es decir, tiene las raíces [41-11], con sus órdenes de multiplicidad disminuídos en una unidad. Análogamente será:

[41-14] $$D_1(z) = \text{m. c. d. } [D(z), D'(z)] = f_3(z) \cdot [f_4(z)]^2 \ldots, \text{ etc.}$$

De [41-11], [41-13], [41-14], ... deducimos, por división de cada dos consecutivas:

[41-15] $$\begin{cases} \dfrac{f(z)}{D(z)} = f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot f_3(z) \ldots \\[2ex] \dfrac{D(z)}{D_1(z)} = f_2(z) \cdot f_3(z) \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

y volviendo a dividir cada dos igualdades consecutivas [41-15] habremos obtenido los polinomios $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., con lo cual la resolución completa de la ecuación $f(z) = 0$ se reduce a la de las ecuaciones:

[41-16] $$f_1(z) = 0, \ f_2(z) = 0, \ f_3(z) = 0, \ \ldots,$$

que tienen todas sus raíces *simples*. O bien anulando la primera [41-15] se obtiene una ecuación *con todas las raíces de la ecuación dada y sólo ellas, pero todas simples*. Obsérvese que si $f(z)$ tiene coeficientes racionales, los coeficientes de las [41-16] serán también racionales (§ 41-4). Sin embargo, este laborioso proceso no se tiene en cuenta en el método práctico de GRÄFFE (§ 41-12) para resolver ecuaciones numéricas.

d) Continuidad de las raíces de una ecuación algebraica. — Comparemos ahora la ecuación [18-1] con esta otra:

[41-17] $$F(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_n = 0,$$

y sea ζ una raíz de ésta. Efectuando el cambio de variable: $Z = z - \zeta$, resultan nuevas ecuaciones (§ 39-1):

$$F(z) = F(\zeta) + Z F'(\zeta) + Z^2 \frac{F''(\zeta)}{2\,!} + \ldots + Z^n = 0,$$

[41-18] $$f(z) = f(\zeta) + Z f'(\zeta) + Z^2 \frac{f''(\zeta)}{2\,!} + \ldots + Z^n = 0.$$

Pero si ζ es raíz múltiple de orden p de $F(z)$, es:

$$F(\zeta) = 0, \ F'(\zeta) = 0, \ \ldots, \ F^{(p-1)}(\zeta) = 0;$$

y como los polinomios análogos $f(\zeta)$, $f'(\zeta)$, ..., $f^{(p-1)}(\zeta)$ sólo difieren de éstos en que tienen los coeficientes a_i en vez de los A_i, tomando suficientemente próximos los coeficientes variables a_i a los coeficientes fijos A_i, estos números $f(\zeta)$, $f'(\zeta)$, ..., $f^{(p-1)}(\zeta)$ se harán tan pequeños como se quiera (§ 41-1, a_4), y por lo tanto, la ecuación [41-18] tendrá p raíces menores que ε (§ 18-2), o sea, la ecuación [18-1] tendrá p raíces que diferirán de ζ en menos de ε.

Si en el plano complejo representamos los coeficientes fijos A_i, quedan así determinados entornos de cierta amplitud δ, tales que todas las ecuaciones cuyos coeficientes a_i estén comprendidos en tales entornos, tienen p raíces en el entorno prefijado de ζ.

¿Habrá más de p raíces de [18-1] contenidas en dicho entorno de amplitud ε? Si asignamos un entorno análogo a cada una de las raíces

de [41-17], quedarán así determinados diversos números, δ_1, δ_2, ...; y elegido el menor de todos, que llamaremos δ, resulta que toda ecuación cuyos coeficientes estén comprendidos en los respectivos entornos de amplitud δ, en el entorno de cada raíz de [41-17] tiene *por lo menos* tantas raíces como indique su multiplicidad; pero como el número total de raíces es n, y la suma de órdenes de multiplicidad es también n, resulta que en cada entorno de una raíz quedan incluídas *precisamente tantas como indique su orden de multiplicidad.*

Si convenimos en llamar a una ecuación *límite* de otra cuando sus coeficientes son respectivamente los límites de los coeficientes de ésta, podemos enunciar brevemente la continuidad de las raíces diciendo: *las raíces de la ecuación límite son los límites de las raíces de la ecuación variable*, o también: *las raíces de una ecuación son funciones continuas* (cfr. vol. II, § 65-3) *de los coeficientes.*

Si los coeficientes son *polinomios* de una o más variables, resultan, pues, n funciones uniformes: z_1, z_2, ..., z_n, de estas variables independientes, y estas n funciones forman una sola función multiforme de tales variables (§ 23-8). Tal es la *definición más general de función algebraica* (§ 23-8), de cualquier número de variables.

3. Búsqueda de las raíces reales. Acotación de las raíces. — *a*) Dada una ecuación de coeficientes reales:

$$[41\text{-}19] \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0,$$

para calcular sus raíces reales conviene ante todo *acotarlas*, esto es, determinar los números entre los cuales están comprendidas *todas* las raíces reales de la ecuación.

Lograda esta acotación de las raíces, el problema siguiente es *separarlas*, es decir, determinar ciertos intervalos en cada uno de los cuales esté comprendida una raíz y sólo una, y finalmente *aproximarlas* tanto como se quiera.

Más aún, los tres problemas que entraña la resolución de una ecuación numérica, a saber: determinación del *número* de raíces, *separación* de éstas, y *cálculo* de ellas con error menor que un número dado, quedan reducidos a resolver este problema único:

PROBLEMA FUNDAMENTAL: *Determinar el número de raíces de una ecuación contenidas en un intervalo dado* (a, b).

En efecto, resuelto este problema mediante un criterio general, basta aplicar éste al intervalo total (— L, L) que comprende *todas* las raíces, y tendremos el número de éstas; subdividido suficientemente este intervalo, y aplicando el mismo criterio a los intervalos parciales, llegaremos a *separarlas*; y cuando la amplitud de estos intervalos sea menor que el número prefijado ε, las tendremos *calculadas* con error menor que ε.

Nos ocuparemos ahora de la acotación de las raíces para abordar luego el problema fundamental (§ 41-7 a 9), pero si la ecuación es de coeficientes racionales aplicaremos antes los métodos de § 41-4 para hallar las raíces racionales si existen, con el propósito de rebajar el grado de la ecuación, simplificando así los cálculos posteriores.

b) Suelen acotarse separadamente las raíces positivas y las negativas, calculando dos números positivos, l y L, llamados *cota inferior* y *cota superior de las raíces positivas*, entre los que estén comprendidos éstas y otros dos números negativos, llamados *cota inferior* y *cota superior de las negativas*, entre las cuales quedan todas las raíces negativas de la ecuación.

Basta dar una regla para determinar la cota superior L de las positivas; en efecto, poniendo $x = 1/\gamma$, la ecuación:

[41-20] $$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \ldots + a_1 \gamma + a_0 = 0$$

tiene por cota superior el recíproco $1/l$ de la cota inferior l de las raíces positivas de [41-19]. Análogamente, poniendo $x = -\gamma$, **la ecuación**

[41-21] $$a_0 \gamma^n - a_1 \gamma^{n-1} + a_2 \gamma^{n-2} - \ldots \pm a_n = 0$$

tiene por cota inferior λ, y **superior Λ,** de **sus raíces positivas, $\lambda < \gamma_p < \Lambda$, las opuestas $-\lambda > x_n > -\Lambda$** de **las raíces negativas,** $x_n = -\gamma_p$ de la ecuación [41-19].

c) *Regla de* LAGUERRE-THIBAULT: *Si en la división de* f(x) *por* $x - $L *son positivos todos los coeficientes del cociente y también el resto, es* L *una cota superior de las raíces de* f$(x) = 0$.

En efecto, por el teorema del resto (§ 16-5, *b*) es:

[41-22] $$f(x) \equiv f(L) + (x - L)(c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots + c_{n-2} x + c_{n-1}),$$

y si damos a x valores mayores que L, resulta f$(x) > 0$; luego, no hay raíces superiores a L. En la práctica se eligen valores enteros crecientes de L, aplicando en cada caso la regla de RUFFINI (§ 16-5), hasta que todos los coeficientes y el resto resulten positivos.

d) Mejor resultado, aunque de aplicación más laboriosa, da la *regla de acotación de* NEWTON:

***Si el número* L *hace positivos a los polinomios* f(x), f$'(x)$,** f$''(x)$, ..., f$^{(n)}(x)$, *es una cota superior de las raíces de* f(x). *Por lo tanto, si un número hace positivos a* f$^{(n)}(x)$, f$^{(n-1)}(x)$, ..., f$^{(n-s)}(x)$, *todo número mayor tiene igual propiedad.*

La regla es consecuencia directa del desarrollo de TAYLOR (§ 39-1):

[41-23] $$f(x) = f(L) + (x - L)\, f'(L) + (x - L)^2 \frac{f''(L)}{2!} + \ldots + (x - L)^n \frac{f^{(n)}(L)}{n!},$$

que muestra que en las hipótesis hechas, para $x > $L resulta f$(x) > 0$.

La segunda parte de la regla nos dice que *hemos de empezar los ensayos* por f$^{(n-1)}(x)$, e ir aumentando si es necesario el número, para hacer positivas las *derivadas sucesivamente anteriores*, f$^{(n-2)}(x)$, f$^{(n-3)}(x)$, ..., hasta llegar a un número que haga positiva f(x); ésta es la cota buscada. Con ello, al aumentar cada vez el número ensayado, no es preciso comprobar si hace positivas a las derivadas ya utilizadas.

Es interesante demostrar que la cota dada por la regla de LAGUERRE-THIBAULT es igual o mayor que la dada por la regla de NEWTON. Como corolario del teorema de ROLLE que veremos en § 41-5, resulta también que en caso de que *todas* las raíces de la ecuación sean *reales*, la regla de NEWTON da, al ensayar enteros, la *mínima* cota superior entera.

EJEMPLO:

[41-24] $$f(x) = 3x^4 - 18x^3 + 24x^2 - 18x + 73,$$

$$\frac{1}{6} f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + 8x - 3,$$

$$\frac{1}{12} f''(x) = 3x^2 - 9x + 4,$$

$$\frac{1}{36} f'''(x) = 2x - 3.$$

Desde $x = 2$ es $f''' > 0$, pero $f''(2) < 0$; sustituyendo $x = 3$, resulta ésta positiva, pero todavía es $f'(3) < 0$; finalmente, para $x = 4$ es $f'(4) > 0$, $f(4) > 0$; luego, $L = 4$, mientras que la regla de LAGUERRE da $L = 6$.

Aplicando a la transformada en $1/x$ la regla de LAGUERRE, resulta sin cálculo alguno la cota superior 1. La transformada en $-x$ tiene todos los términos positivos; luego, no hay raíces negativas en la propuesta. En resumen, todas las raíces de [41-24] son positivas y están comprendidas entre 1 y 4.

c) En la demostración del teorema fundamental del álgebra (§ 18-1) se ha determinado una cota superior, R, del módulo de todas las raíces complejas de una ecuación algebraica cualquiera [18-1], mediante la desigualdad [18-2].

He aquí otra regla de acotación de los ceros, válida también para las series:

Si los coeficientes de la serie o polinomio $\Sigma a_\nu z^\nu$ *cumplen la condición* $|a_m/a_0| \leqq k^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, *la función no tiene ceros de módulo inferior al número* $1/(2k)$.

En efecto, si es $|z| < 1/(2k)$, resulta:

$$|a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots| \leqq |a_1 z| + |a_2 z^2| + \ldots + |a_n z^n| + \ldots <$$
$$< |a_0| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) = |a_0|;$$

luego, no puede anularse la función

Obsérvese que la cota $1/(2k)$ es la mayor que puede darse para todas las series o polinomios, pues la serie

$$1 - kz - k^2 z^2 - \ldots - k^n z^n - \ldots = \frac{1 - 2kz}{1 - kz}$$

tiene por raíz $z = 1/(2k)$.

4. **Investigación de las raíces racionales de una ecuación de coeficientes racionales.** — No hay regla general para investigar si una ecuación tiene raíces enteras o fraccionarias. Únicamente cuando los coeficientes son números racionales, una serie de tanteos metódicos permite decidir esta cuestión y calcular dichas raíces racionales, si existen.

Podemos suponer que los coeficientes racionales son *enteros*, pues en caso contrario se logra ésto multiplicándolos por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

a) Dada por lo tanto la ecuación de coeficientes *enteros*:

[41-25] $$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

vamos a dar previamente las siguientes reglas de tanteo para hallar sus raíces *enteras*:

a_1) *Se acotan las raíces por* § 41-3.

a_2) *Si* f(0) y f(1) *son impares, no hay raíces enteras* *.

a_3) *En caso contrario se ensaya si los números* $+1$ *y* -1 *satisfacen la ecuación, dividiendo por* $x-1$ *y* $x+1$, *según la regla de* RUFFINI, *todas las veces posibles, y conservando los últimos residuos,* f(1) *y* f(—1), *cuando se llegue a división inexacta.*

a_4) *Se calculan los divisores positivos y negativos del término constante* a_n, *prescindiendo de los que no estén dentro de la acotación establecida antes. Se desechan aquellos divisores* p *de* a_n *que no cumplan*

[41-26] $$f(1) = \overline{\dot{p}-1}\,; \qquad f(-1) = \overline{\dot{p}+1}\,.$$

En efecto, pasando a_n al segundo miembro de [41-25], vemos que es necesario sea múltiplo de toda raíz entera de [41-25]; además, si $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ son los coeficientes *enteros* cambiados de signo, según nos indica la regla de RUFFINI, al dividir $f(x)$ por $p-x$, suponiendo p raíz de [41-25], será:

[41-27] $$f(x) = (p-x)\,(c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}),$$

de donde, para $x = +1$, se deduce la regla [41-26].

a_5) *Para cada uno de los divisores restantes se ensaya que los números sucesivos*:

[41-28] $$c_{n-1} = \frac{a_n}{p}, \quad c_{n-2} = \frac{c_{n-1} + a_{n-1}}{p}, \ \ldots, \ c_0 = \frac{c_1 + a_1}{p},$$

sean enteros y $c_0 + a_0 = 0$, *desechando el número ensayado apenas se llegue a una división inexacta; pero si se cumplen aquellas condiciones, el número ensayado es una raíz, los coeficientes* [41-28] *son los de* [41-27], *y en el cociente, que es de grado inferior, se ensayan los restantes números* p.

En efecto, para calcular el cociente [41-27], conviene ordenar el polinomio según potencias ascendentes:

$$a_n + a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + \ldots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n =$$
$$= (p-x)\,.\,(c_{n-1} + c_{n-2} x + \ldots + c_1 x^{n-2} + c_0 x^{n-1}),$$

de donde se deducen las fórmulas [41-28].

b) Para el cálculo de las raíces *fraccionarias* de [41-25], sea $x = y/q$ la expresión irreducible de una de ellas, con lo que habrá de ser:

[41-29] $$a_0 y^n + a_1 q y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} q^{n-1} y + a_n q^n = 0;$$

y por la misma razón vista en la regla a_4) debe ser:

* Porque $f(x)$ es entonces impar para todo x entero, según muestra el desarrollo de TAYLOR aplicado a $f(0 + 2n)$ y a $f(1 + 2n)$.

[41-30] $a_0 = \dot{q} \quad ; \quad a_n = \dot{y}\,.$

Por consiguiente, *una ecuación de coeficientes enteros, cuyo primer coeficiente es la unidad, carece de raíces fraccionarias.*

Como a_0 es múltiplo de todos los denominadores de las raíces fraccionarias, *puede adoptarse $q = a_0$, y hallar los numeradores desconocidos y como raíces enteras de la ecuación* [41-29]. Sin embargo, las raíces fraccionarias pueden tener un m.c.m. de sus denominadores menor que a_0, y en este caso convendrá *hallar el menor valor de q que en la ecuación* [41-29] *hace todos los coeficientes de las potencias de y divisibles por a_0, pues entonces podrá tomarse para común denominador de todas las raíces fraccionarias dicho valor q, y dividiendo* [41-29] *por a_0, las raíces enteras de la ecuación obtenida son los numeradores de las raíces fraccionarias de la ecuación* [41-25] *dada.*

Se demuestra fácilmente que si y/q es forma irreducible de una raíz fraccionaria de [41-25], deben cumplirse análogamente a [41-26] las siguientes condiciones:

[41-31] $f(1) = \dot{\overline{q - y}}\,; \quad f(-1) = \dot{\overline{q + y}}$

que simplifican los tanteos a efectuar.

Ejemplo: Sea la ecuación

$$5{,}4\,x^7 - 4{,}5\,x^6 - 113{,}55\,x^5 + 227{,}825\,x^4 + 13{,}95\,x^3 - 132{,}325\,x^2 - \\ - 0{,}3\,x + 3{,}5 = 0.$$

Multiplicando por 1 000 todos los coeficientes, para hacerlos enteros, y suprimiendo el factor 25, resulta:

$$216\,x^7 - 180\,x^6 - 4542\,x^5 + 9113\,x^4 + 558\,x^3 - 5293\,x^2 - 12\,x + 140 = 0.$$

El ensayo previo de los números +1 y —1 nos da este resultado:

	216	—180	—4542	+9113	+558	—5293	—12	+140,
+1)	216	+36	—4506	+4607	+5165	—128	—140	(0,
+1)	216	+252	—4254	+353	+5518	+5390	(+5250,	
—1)	216	—180	—4326	+8933	—3768	+3640	(—3780.	

Los divisores positivos de 140 son 1, 2, 4, 5, 10, 20, 7, 14, 28, 35, 70, 140; los únicos que aumentados en 1 dividen a $f(-1) = -3780 = -2^2.5.3^3.7$, y que disminuídos en 1 dividen a $f(1) = 5250 = 2.5^3.3.7$, son: positivos 2, 4, y negativos —2, —4, —5.

He aquí todos los ensayos necesarios, efectuando el cálculo de derecha a izquierda, como se indicó en (a_5):

	216	+36	—4506	+4607	+5165	—128	—140,
$x = +2$)	+216	+468	—3570	—2533	+99	+70,	(0,
$x = -2$)	+216	+36	—3642	+4751	—9502	+18806	
$x = -5$)	+216	—612	—510	+17	+14.	(0,	

La ecuación dada tiene, pues, como únicas raíces enteras $+1$, $+2$, -5, y desprovista de ellas, queda reducida a esta más sencilla:

[41-32] $$216\,x^4 - 612\,x^3 - 510\,x^2 + 17\,x + 14 = 0.$$

Para calcular las raíces fraccionarias de [41-32], poniendo $x = y/q$, resulta la ecuación transformada

$$2^3.3^3.y^4 - q.2^2.3^2.17.y^3 - q^2.2.3.5.17.y^2 + q^3.17.y + q^4.14 = 0;$$

y el menor valor posible de q que hace todos los coeficientes divisibles por $2^3.3^3$, es $q = 6$; simplificada esta ecuación, resulta:

$$y^4 - 17\,y^3 - 85\,y^2 + 17\,y + 84 = 0;$$

separadas las raíces $y = 1$ é $y = -1$, obtenemos:

$$y^2 - 17\,y - 84 = 0,$$

cuyas dos raíces son $y = -4$, $y = 21$; luego, las raíces fraccionarias de la ecuación [41-32] son $1/6$, $-1/6$, $-2/3$, $7/2$, que junto con las tres enteras, $+1$, $+2$, -5, antes halladas, dan las siete raíces de la ecuación propuesta.

5. **Teorema de Rolle.** — El teorema de § 41-2, *b*, conduce a una regla sencilla, y útil en muchos casos, de separación de raíces. Sean α y β dos raíces reales *consecutivas* de la ecuación de coeficientes reales:

[41-33] $$\mathrm{f}(x) = 0,$$

y tomemos $\delta > 0$ suficientemente pequeño como para que la función $\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x)$ sea positiva en $\alpha + \delta$, y negativa en $\beta - \delta$ (§ 41-2, *b*); como $\mathrm{f}(x)$ tiene igual signo en ambos puntos, pues α y β son raíces consecutivas (§ 26-2), $\mathrm{f}'(x)$ tendrá signos opuestos en ellos, y por lo tanto, tendrá por lo menos una, y en general un número impar de raíces (§ 38-7, *b*), en $(\alpha + \delta\,;\,\beta - \delta)$, y por lo tanto, también en $\alpha < x < \beta$, por ser δ arbitrariamente pequeño. Esto es lo que expresa el teorema de ROLLE (generalización para funciones racionales enteras del teorema visto en § 35-2):

Entre cada dos raíces consecutivas de la ecuación de coeficientes reales $\mathrm{f}(x) = 0$ *hay un número impar de ceros de su derivada* $\mathrm{f}'(x)$, *contando cada uno de ellos tantas veces como indique su orden de multiplicidad.*

COROLARIO: *Entre dos raíces consecutivas de la derivada* $\mathrm{f}'(x)$ *hay a lo sumo una sola raíz de la función (cuya existencia se decide por el teorema de* BOLZANO, § 26-2). Porque si hubiera dos, tendría $\mathrm{f}'(x)$ una raíz intermedia, y aquéllas no serían consecutivas, y si la eventual raíz de $\mathrm{f}(x)$ fuese múltiple, también lo sería de la derivada. Las raíces de $\mathrm{f}(x)$ quedan así separadas por las de $\mathrm{f}'(x)$ que por ser de menor grado se calcularán más fácilmente; el teorema es particularmente útil cuando *todas* las raíces de $\mathrm{f}'(x)$ son reales, pues si entonces también lo son las de $\mathrm{f}(x)$, existe forzosamente una en cada uno de los intervalos determinados por las primeras.

(Obsérvese que para $\mathrm{f}(x) = x^2 + x + 1$ la ecuación $\mathrm{f}'(x) = 2\,x + 1 = 0$ tiene raíz real, sin que $\mathrm{f}(x)$ tenga ceros reales).

EJEMPLOS: 1. Sea:

$$f(x) = 1{,}8\,x^5 - 7{,}08\,x^3 + 2{,}25\,x + 1,$$
$$f'(x) = 9\,x^4 - 21{,}24\,x^2 + 2{,}25.$$

Las raíces de la ecuación bicuadrada $f'(x) = 0$ son (§ 19-2, a):

$$\pm\sqrt{2{,}2488\ldots} = \pm\, 1{,}499\ldots; \quad \pm\sqrt{0{,}1112\ldots} = \pm\, 0{,}333\ldots$$

y sustituídos los valores aproximados $\pm\,1{,}5$ y $\pm\,1/3$, obtenemos:

Para $\quad -\infty, \quad -3/2, \quad -1/3, \quad +1/3, \quad +3/2, \quad +\infty$

el signo de $f(x)$ es $\quad -, \quad +, \quad +, \quad +, \quad -, \quad +$;

luego, $f(x)$ tiene *tres* raíces, una en cada uno de los intervalos $(-\infty, -3/2)$, $(1/3, 3/2)$, $(3/2, +\infty)$.

2. Si en la ecuación anterior, el término independiente, en vez de ser $+1$ fuera -1, los signos obtenidos serían:

$$-, \quad +, \quad -, \quad -, \quad -, \quad +$$

y la ecuación tendría tres raíces, una en cada uno de los intervalos $(-\infty, -3/2)$, $(-3/2, -1/3)$, $(3/2, +\infty)$.

Si el término independiente fuera 0,2, la ecuación tendría cinco raíces reales.

3. Sea la ecuación

$$x^3 + 1{,}74\,x^2 - 2{,}52\,x - 3{,}97 = 0.$$

Las raíces de la derivada son aproximadamente $\frac{1}{2}$ y $-5/3$. Sustituyendo en la ecuación dada los valores -3, $-5/3$, $\frac{1}{2}$, 2, quedan separadas las tres raíces, que son reales.

6. Función racional de coeficientes reales: exceso algebraico. Sucesión de Sturm. — En este parágrafo anteponemos varias cuestiones cuya importancia en el problema de la resolución numérica de ecuaciones algebraicas se verá en los tres siguientes.

a) Se dice que dos números reales no nulos, A y B, presentan *permanencia*, si son del *mismo signo*, y se dice que presentan *variación*, si son de *distinto signo*. Dados varios números: A, B, ..., H, K, el número total de variaciones que ofrecen los pares de números consecutivos, prescindiendo de los números nulos intermedios, se representa por $V[A, B, \ldots, H, K]$.

EJEMPLO 1. $V[-3, \pi] = 1; \qquad V[-3, 0, -2] = 0;$
$V[-1, 0, -3, 4/5, 0, -7] = 2$

b) Sea la función racional, cociente de dos polinomios de coeficientes reales:

$$[41\text{-}34] \qquad u(x) = \frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{b_0\,x^m + b_1\,x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \ldots + a_n},$$

que es continua y derivable en todos los puntos que no anulan al denominador $f(x)$. Llamaremos *infinitos* de la función $u(x)$ en el campo real, a los valores de x que anulan al denominador $f(x)$ sin anular al numerador $f_1(x)$.

De los infinitos, solamente nos interesan aquellos en que $u(x)$ *cambia de signo*, y supongamos que en el intervalo (a, b),

en cuyos extremos no se anula el denominador $f(x)$ de $u(x)$, ocurra que para:

p valores pase u de $-\infty$ a $+\infty$;
q valores pase u de $+\infty$ a $-\infty$;

entonces llamaremos *exceso algebraico* E de la función u en el intervalo (a, b) a la diferencia:

[41-35] $$E_a^b\, u(x) = p - q.$$

Los autores franceses llaman *índice* (algebraico) al exceso.

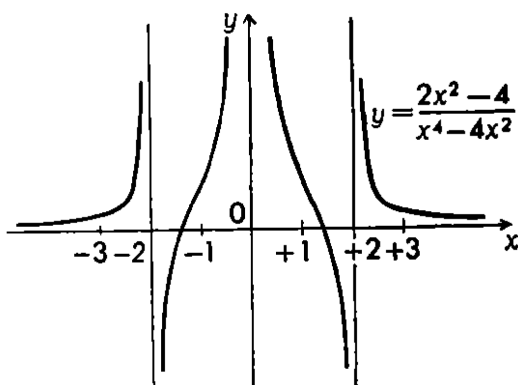


Fig. 125.

EJEMPLO 2. Para la función

$$u(x) = \frac{2x^2-4}{x^4-4x^2} \quad \text{(fig. 125)}$$

es $E_{-3}^{3}\, u(x) = 0$; $E_{-1}^{3}\, u(x) = +1$, no interesando el punto $x = 0$.

c_1) Si el denominador es constante, es decir, $u(x)$ es entera, su exceso es nulo en cualquier intervalo. Si el denominador $f(x)$ de [41-34] tiene r raíces, en (a, b), es:

[41-36] $$-r \leqq E_a^b\, u \leqq r.$$

c_2) Si la suma de dos fracciones de igual denominador es un polinomio (o una constante), la suma de sus excesos es nula; en efecto, si:

[41-37] $$\frac{f_2(x)}{f(x)} = Q(x) - \frac{f_1(x)}{f(x)},$$

donde $Q(x)$ es un polinomio, ambas fracciones $\frac{f_2}{f}$ y $\frac{f_1}{f}$ tienen los mismos infinitos con signos contrarios; de donde:

[41-38] $$E_a^b \frac{f_1}{f} + E_a^b \frac{f_2}{f} = 0.$$

c_3) Demostremos ahora que la suma de los excesos en el intervalo (a, b) de dos fracciones recíprocas:

$$u(x) = \frac{f_1(x)}{f(x)}, \qquad v(x) = \frac{f(x)}{f_1(x)},$$

es igual al número de variaciones perdidas por el par de polinomios $f(x)$, $f_1(x)$ al pasar del valor $x = a$ al $x = b$; es decir:

[41-39] $$E_a^b \frac{f}{f_1} + E_a^b \frac{f_1}{f} = V[f(a), f_1(a)] - V[f(b), f_1(b)] = V_a - V_b,$$

designando abreviadamente por V_a y V_b los términos del segundo miembro.

Consideremos todos los infinitos con cambio de signo en $a < x < b$:

$$u(x) \text{ pasa } \begin{cases} p \text{ veces de } -\infty \text{ a } +\infty; \\ q \text{ veces de } +\infty \text{ a } -\infty; \end{cases}$$

$$v(x) \text{ pasa } \begin{cases} p' \text{ veces de } -\infty \text{ a } +\infty; \\ q' \text{ veces de } +\infty \text{ a } -\infty. \end{cases}$$

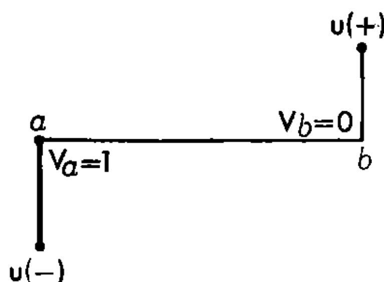


Fig. 126.

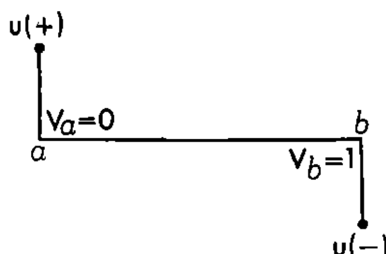


Fig. 127.

Como $u(x)$ sólo puede cambiar de signo al pasar por ∞ ó por 0, y los ceros de $u(x)$ son los infinitos de $v(x)$, tendremos que en (a, b) los cambios de signo de $u(x)$ serán:

$$u(x) \text{ pasa } \begin{cases} p + p' \text{ veces de } - \text{ a } +; \\ q + q' \text{ veces de } + \text{ a } -. \end{cases}$$

Examinemos ahora todos los casos posibles, según sean los signos de $u(x)$ en a y b, observando que:

si $u(a) > 0$, es $V_a = 0$, y si $u(a) < 0$, es $V_a = 1$,

y lo mismo para b.

En el caso de la figura 126, $u(x)$ ha de pasar una vez más de $-$ a $+$ que de $+$ a $-$, y por lo tanto:

$$p + p' = q + q' + 1;$$

en el caso de la figura 127, por razón análoga a la anterior,

$$p + p' = q + q' - 1;$$

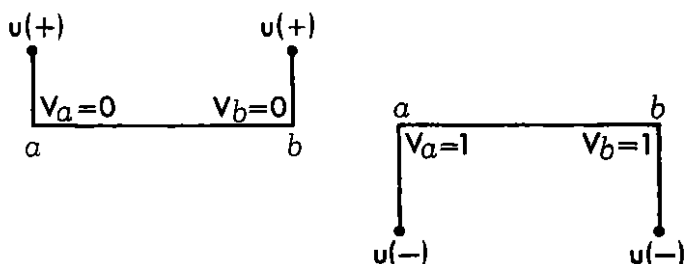


Fig. 128.

del mismo modo, en los casos de la figura 128, es:

$$p + p' = q + q'.$$

Si en todos los casos obtenemos V_a y V_b, vemos que siempre se cumple

$$(p - q) + (p' - q') = V_a - V_b,$$

es decir, la igualdad [41-39], que queríamos demostrar.

d) Las propiedades anteriores permiten calcular sencillamente el exceso algebraico de una fracción $\frac{f_1(x)}{f(x)}$, con sólo aplicar al par $f(x)$, $f_1(x)$ el algoritmo de EUCLIDES del m. c. d. (§ 17-3, *e*), pero teniendo cuidado de *cambiar el signo a cada residuo*, al tomarlo como nuevo divisor. Podemos suponer que el grado de f_1 es inferior al de f, pues de lo contrario, separando la parte entera de la fracción, el exceso es el mismo. En el algoritmo del m. c. d. de f, f_1, llamemos f_2, f_3, ... a los divisores sucesivos, obtenidos *cambiando el signo* a los residuos:

		Q_1	Q_2	....	Q_{n-1}	Q_n
[41-40]	f	f_1	f_2	..... f_{n-2}	f_{n-1}	f_n
	$-f_2$	$-f_3$		...$-f_n$	0	

donde f_n es una constante, o bien el m. c. d. $D(x)$ de $f(x)$ y $f_1(x)$. Si llamamos E al exceso buscado, $E = E_a^b \frac{f_1}{f}$, y tenemos en cuenta la propiedad vista en [41-37], [41-38], podemos escribir:

$$\frac{f}{f_1} = Q_1 - \frac{f_2}{f_1}; \qquad E_a^b \frac{f}{f_1} + E_a^b \frac{f_2}{f_1} = 0;$$

$$\frac{f_1}{f_2} = Q_2 - \frac{f_3}{f_2}; \qquad E_a^b \frac{f_1}{f_2} + E_a^b \frac{f_3}{f_2} = 0;$$

....

$$\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = Q_{n-1} - \frac{f_n}{f_{n-1}}; \qquad E_a^b \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} + E_a^b \frac{f_n}{f_{n-1}} = 0;$$

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} = Q_n; \qquad E_a^b \frac{f_{n-1}}{f_n} = 0.$$

Sumando por columnas las segundas igualdades a la

$$E_a^b \frac{f_1}{f} = E,$$

y teniendo en cuenta [41-39], será:

$$E = \left(E_a^b \frac{f_1}{f} + E_a^b \frac{f}{f_1}\right) + \left(E_a^b \frac{f_2}{f_1} + E_a^b \frac{f_1}{f_2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(E_a^b \frac{f_n}{f_{n-1}} + E_a^b \frac{f_{n-1}}{f_n}\right) =$$

$$= V[f(a), f_1(a)] + V[f_1(a), f_2(a)] + \ldots + V[f_{n-1}(a), f_n(a)] -$$

$$- V[f(b), f_1(b)] - V[f_1(b), f_2(b)] - \ldots - V[f_{n-1}(b), f_n(b)];$$

es decir:

[41-41] $$E_a^b \frac{f_1}{f} = V[f(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \ldots,\ f_n(a)] -$$

$$- V[f(b),\ f_1(b),\ f_2(b),\ \ldots,\ f_n(b)],$$

importante teorema que se enuncia así:

El exceso algebraico de la fracción $\frac{f_1(x)}{f(x)}$, *en el intervalo* (a, b), *es igual al número de variaciones perdidas por la sucesión de polinomios (llamada sucesión de* STURM) *del algoritmo* [41-40]: $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$, *al pasar del valor* $x = a$ *al* $x = b$.

e) Veamos ahora las propiedades más interesantes de los polinomios de STURM:

e_1) La identidad

[41-42] $$f_{h-1} \equiv Q_h f_h - f_{h+1},$$

que liga a tres polinomios consecutivos, nos dice que si en un punto a se anulan dos consecutivos $f_h(a) = f_{h+1}(a) = 0$, se anularán también el anterior y el siguiente, es decir, resultarán todos los polinomios nulos en $x = a$, incluso $f_1(a) = f(a) = 0$; esto no es posible si f y f_1 son primos entre sí, porque entonces f_n en una constante que no puede anularse.

e_2) Si f y f_1 son primos entre sí, y f_h se anula en $x = a$ o en $x = b$, los polinomios contiguos toman valores opuestos $f_{h-1} = -f_{h+1}$, y por lo tanto, cualquiera sea el signo de f_h en la proximidad de dicho valor de x, la terna f_{h-1}, f_h, f_{h+1} presenta una sola variación, lo mismo que el par f_{h-1}, f_{h+1}, *si prescindimos del valor nulo*; llegamos al mismo resultado con esta regla, considerando el intervalo (a, b) que el $(a + \delta, b)$ ó $(a, b - \delta)$ ó $(a + \delta,\ b - \delta)$, en cuyos extremos no se anulan dichos polinomios, y como por otra parte los excesos en esos intervalos son iguales si elegimos δ suficientemente pequeño, resulta:

La aplicación de la regla anterior al teorema [41-41] *permite calcular el exceso, aunque algún polinomio intermedio se anule para $x = a$ ó $x = b$, si* f *y* f_1 *son primos entre sí.*

e_3) En cada una de las divisiones efectuadas para obtener los polinomios $f_2, f_3, \ldots$ por el algoritmo [41-40], puede multiplicarse o dividirse el dividendo o divisor por un número *positivo* cualquiera, lo que sólo afecta al resto en un factor positivo; en el teorema [41-41] sólo intervienen los signos y no los valores absolutos. Ésta es una observación importante, porque para los coeficientes pueden tomarse valores aproximados, con dos o tres cifras exactas, plantear las divisiones en forma sintética (§ 16-4) y efectuar rápidamente las operaciones, mediante la regla de cálculo, con un solo movimiento de la reglilla para cada división parcial, como veremos en el ejemplo de § 41-7.

EJEMPLO 3. Calcular el exceso de

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{2x - 5}{3x^2 - 6x - 4}$$

en los intervalos determinados por los puntos $-\infty$, -1, 0, 2, 3.

Designemos sintéticamente el polinomio f por sus coeficientes (3, -6, -4) y efectuemos su división sintética por $f_1 = (2, -5)$:

2 f	6	-12	-8
$-3\ f_1$	-6	$+15$	
		3	-8.
Duplo del residuo anterior		6	-16
$-3\ f_1$		-6	$+15$
$-f_2$			-1.

La sucesión de STURM y los signos que toma en los puntos $-\infty$, -1, 0, 2, 3 con sus variaciones y excesos correspondientes son:

	$-\infty$	-1	0	2	3
$f = 3x^2 - 6x - 4$	+	+	—	—	+
$f_1 = 2x - 5$	—	—	—	—	+
$f_2 = 1$	+	+	+	+	+
Variaciones	2	2	1	1	0
Excesos	0	1	0	1	.

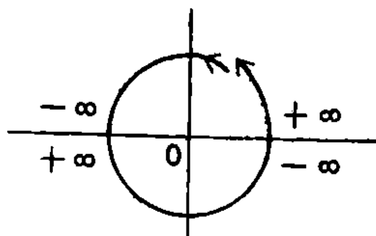


FIG. 129.

NOTA: Una aplicación interesante del exceso algebraico es el *cálculo del número de vueltas alrededor del origen de una curva cerrada unicursal*, esto es, una curva cuyas ecuaciones paramétricas

[41-43] $$x = \mathrm{X}(t), \quad y = \mathrm{Y}(t), \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

son funciones *racionales*, y que por ser cerrada la curva cumplen

[41-44] $$\mathrm{X}(a) = \mathrm{X}(b)\,; \quad \mathrm{Y}(a) = \mathrm{Y}(b).$$

Vemos (fig. 129) que por cada vuelta que la curva da alrededor del origen, atraviesa el eje de las x, haciendo que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\mathrm{X}(t)}{\mathrm{Y}(t)}$ pase dos veces más de $-\infty$ a $+\infty$, que de $+\infty$ a $-\infty$, siempre que la curva no tenga puntos impropios (§ 37-6). Cfr. ejercicio 9 de § 41.

Por lo tanto, el número buscado, N, de vueltas será:

[41-45] $$\mathrm{N} = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{E}_a^b \frac{\mathrm{X}(t)}{\mathrm{Y}(t)}.$$

7. El problema fundamental. Teorema de Sturm. — Volvamos ahora al problema fundamental planteado en § 41-3, *a*. Dada la ecuación algebraica de coeficientes reales

[41-46] $$\mathrm{f}(x) = 0,$$

y la derivada $\mathrm{f}'(x)$ de su primer miembro, el teorema de § 41-2, *b*, con la definición de exceso algebraico (§ 41-6, *b*), conduce al importante *teorema de* STURM (1829):

El número r de raíces simples o múltiples de $\mathrm{f}(x)$ *contenidas en el intervalo $a < x < b$, en cuyos extremos suponemos no se anula* $\mathrm{f}(x)$, **es:**

[41-47] $$r = \mathrm{E}_a^b \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)}.$$

En este cómputo, cada raíz múltiple queda contada una sola vez; así, si $\mathrm{f}(x)$ tiene entre a y b tres raíces confundidas en un punto, y además otra distinta, la fórmula [41-47] dará $r = 2$.

Para calcular el exceso [41-47], hay que aplicar el teorema [41-41]. Por lo tanto, haremos el cálculo del m. c. d. de f, f′ *cambiando el signo de los restos*, y teniendo en cuenta las observaciones hechas en § 41-6, *e*:

[41-48]

	Q_1	Q_2	....	Q_{n-1}	Q_n
f	f'	f_2	$\ldots\ldots \mathrm{f}_{n-2}$	f_{n-1}	f_n
$-\mathrm{f}_2$	$-\mathrm{f}_3$		$\ldots - \mathrm{f}_n$	0	

Así, el número de raíces buscado será:

[41-49] $$r = \mathrm{V}[\mathrm{f}(a), \mathrm{f}'(a), \mathrm{f}_2(a), \ldots, \mathrm{f}_n(a)] - \\ - \mathrm{V}[\mathrm{f}(b), \mathrm{f}'(b), \mathrm{f}_2(b), \ldots, \mathrm{f}_n(b)].$$

Ejemplo: Veamos cómo, con la técnica de Runge, aplicada en § 41-6, ejemplo 3, la separación de raíces de la complicada ecuación

[41-50] $$f(x) = 7x^5 - 5{,}47\,x^3 + 3{,}33\,x^2 + 1{,}72\,x - 0{,}15 = 0,$$

mediante el teorema de Sturm, se efectúa en forma sencilla y practicable.

Derivando, tendremos:

$$f'(x) = 35\,x^4 - 16{,}4\,x^2 + 6{,}66\,x + 1{,}72.$$

Para efectuar la división sintética pondremos:

	f	+ 7	0	— 5,47	+ 3,33	+ 1,72	— 0,15
$-\frac{1}{5}$	f'	— 7	0	+ 3,28	— 1,33	— 0,34	
	— f_2		0	— 2,19	+ 2,00	+ 1,38	— 0,15

obteniendo:

$$f_2(x) = 2{,}19\,x^3 - 2\,x^2 - 1{,}38\,x + 0{,}15.$$

Para dividir $f' : f_2$, le sumaremos al dividendo el divisor multiplicado por $-\frac{35}{2{,}19}\,x$, es decir, hallaremos una cuarta proporcional de cada uno de los coeficientes de f_2 con un solo movimiento de la reglilla de la regla de cálculo correspondiente a la razón $\frac{35}{2{,}19}$; con ello obtenemos:

	f'	+ 35	0	— 16,4	+ 6,66	+ 1,72
$-\frac{35}{2{,}19}$	f_2	— 35	+ 32	+ 22,1	— 2,40	
			+ 32	+ 5,7	+ 4,26	+ 1,72
$-\frac{32}{2{,}19}$	f_2		— 32	+ 29,2	+ 20,15	— 2,19
	— f_3			+ 34,9	+ 24,41	— 0,47

y por lo tanto:

$$f_3(x) = -\,34{,}9\,x^2 - 24{,}41\,x + 0{,}47.$$

Dividiendo $f_2 : f_3$ tendremos:

	f_2	+ 2,19	— 2,00	— 1,38	+ 0,15
$\frac{2{,}19}{34{,}9}$	f_3	— 2,19	— 1,53	+ 0,03	
			— 3,53	— 1,35	+ 0,15
$-\frac{3{,}53}{34{,}9}$	f_3		+ 3,53	+ 2,47	— 0,05
	— f_4			+ 1,12	+ 0,10.

esto es:

$$f_4(x) = -\,1{,}12\,x - 0{,}10.$$

Dividiendo finalmente $f_3 : f_4$ tendremos:

	f_3	$-\ 34{,}9$	$-\ 24{,}41$	$+\ 0{,}47$
$-\dfrac{34{,}9}{1{,}12}$	f_4	$+\ 34{,}9$	$+\ 3{,}12$	
			$-\ 21{,}29$	$+\ 0{,}47$
$-\dfrac{21{,}29}{1{,}12}$	f_4		$+\ 21{,}29$	$+\ 1{,}90$
	$-\ f_5$			$+\ 2{,}37$

es decir:

$$f_5 = -\ 2{,}37.$$

Obtenida ya la sucesión de STURM, hagamos mentalmente el cálculo del exceso en los intervalos dados por los puntos $(-\infty,\ 1,\ 0,\ +1,\ +\infty)$, según indica el cuadro siguiente:

	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$f = 7x^5 - 5{,}47x^3 + 3{,}33x^2 + 1{,}72x - 0{,}15$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f' = 35x^4 - 16{,}4x^2 + 6{,}66x + 1{,}72$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f_2 = 2{,}19x^3 - 2x^2 - 1{,}38x + 0{,}15$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f_3 = -\ 34{,}9x^2 - 24{,}41x + 0{,}47$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$f_4 = -\ 1{,}12x - 0{,}10$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f_5 = -\ 2{,}37$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
Variaciones	4	4	2	1	1
Excesos	0	2	1	0	

Como no existen raíces múltiples ($f_5 = -\ 2{,}37 \neq 0$), la ecuación [41-50] tiene tres raíces reales, de las cuales dos están en el intervalo $(-1;\ 0)$ y la otra en el $(0;\ +1)$. Como $f(-1) < 0$, $f(0) < 0$ y $f(-\frac{1}{2}) > 0$, las dos primeras (fig. 180) quedan separadas por $x = -\frac{1}{2}$ (§ 26-2); en resumen, la ecuación [41-50] tiene dos raíces imaginarias conjugadas y tres reales situadas en los intervalos $(-1;\ -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2};\ 0)$, $(0;\ 1)$; más adelante (§ 41-10) daremos métodos para ir sucesivamente aproximando cada una de las tres raíces reales.

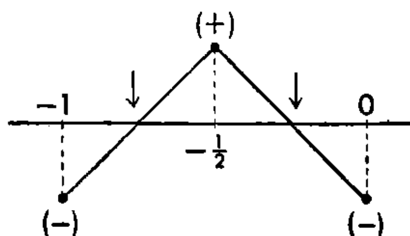


Fig. 180.

8. **Teorema de Budan-Fourier.** — De la desigualdad [41-36] y de la igualdad [41-47] deducimos que la suma de los excesos de dos funciones racionales de coeficientes reales y de igual denominador no puede ser negativa si en el numerador de una de ellas figura la derivada del denominador, ya que en ese caso el exceso alcanza su valor máximo posible. Por lo tanto, podemos establecer:

[41-51]

$$\left.\begin{array}{l}
E_a^b \dfrac{f'}{f} = r \\[2mm]
E_a^b \dfrac{f}{f'} + E_a^b \dfrac{f''}{f'} \geqslant 0 \\[2mm]
E_a^b \dfrac{f'}{f''} + E_a^b \dfrac{f'''}{f''} \geqslant 0 \\[2mm]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2mm]
E_a^b \dfrac{f^{(n-2)}}{f^{(n-1)}} + E_a^b \dfrac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} \geqslant 0 \\[2mm]
E_a^b \dfrac{f^{(n-1)}}{f^{(n)}} = 0
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
r \leqslant \left(E_a^b \dfrac{f'}{f} + E_a^b \dfrac{f}{f'}\right) + \\[2mm]
+ \left(E_a^b \dfrac{f''}{f'} + E_a^b \dfrac{f'}{f''}\right) + \\[2mm]
+ \ldots + \left(E_a^b \dfrac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} + E_a^b \dfrac{f^{(n-1)}}{f^{(n)}}\right) =
\end{array}$$

$$= V[f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)] -$$
$$- V[f(b), f'(b), f''(b), \ldots, f^{(n)}(b)].$$

Obtenemos así, como límite superior del número de raíces en (a, b), el de variaciones perdidas, $V_a - V_b$, en la sucesión de derivadas al pasar del valor a al b. En la deducción de este teorema, como en el caso del de STURM, cada raíz cuenta como una unidad, prescindiendo de su orden de multiplicidad.

Pero en este caso, veamos qué alteración sufren los signos de las derivadas cuando se sustituye una raíz múltiple por raíces sencillas, aplicando un principio clásico de continuidad, debido a PONCELET; basta para ello, en la descomposición factorial, poner en vez del binomio $(x - x_1)^k$ los binomios lineales:

[41-52] $(x - x_1 - \varepsilon)\ (x - x_1 - 2\varepsilon)\ \ldots\ (x - x_1 - k\varepsilon)$,

obteniendo un polinomio cuyos coeficientes contienen el parámetro ε y tienen como caso límite los del dado para $\varepsilon \to 0$; lo mismo acontece para las derivadas, y tomando ε suficientemente pequeño, los signos de las nuevas sucesiones serán los mismos que los de las que intervienen en [41-51], es decir, el *número de raíces de* $f(x) = 0$ *en el intervalo* (a, b), *contada cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad, no supera tampoco* $V_a(f, f', f'', \ldots, f^{(n)}) - V_b(f, f', f'', \ldots, f^{(n)})$.

Hagamos notar que esta observación no es aplicable a la sucesión de STURM, porque allí la modificación [41-52] hace que la última división [41-48] deje de ser exacta, y por lo tanto, la sucesión de STURM modificada queda *prolongada*, lo que hará aparecer nuevas variaciones.

Otra observación interesante es la de que al ser $f^{(n)}(x)$ una constante, y por lo tanto común el último término de ambas sucesiones V_a y V_b, tendrán V_a y V_b la misma o distinta paridad, según tengan $f(a)$, $f(b)$ igual o distinto signo; de lo dicho en § 38-7, *b*, el número de raíces, contada cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad, es también par o impar, según que $f(a)$ y $f(b)$ tengan igual o distinto signo; comparando ambas observaciones:

$f(a)\,f(b) > 0$ da $V_a - V_b$ par y número par de raíces en (a, b),

$f(a)\,f(b) < 0$ da $V_a - V_b$ impar y número impar de raíces en (a, b).

Resulta que el número r de raíces vendrá dado por:

[41-53] $r + \dot{2} = V_a(f, f', f'', \ldots, f^{(n)}) - V_b(f, f', f'', \ldots, f^{(n)})$,

que expresa el siguiente importante teorema de BUDAN (1807) - FOURIER (1831):

El número de raíces de una ecuación de coeficientes reales comprendidas en un intervalo (a, b), *contada cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad, no excede el número de variaciones perdidas por la sucesión* $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, *al pasar del valor* a *al valor* b, *y tiene la misma paridad que este número.*

Este teorema no nos da, como el de STURM, el número *exacto* de raíces *distintas* en (a, b), pero en cambio la sucesión de derivadas es mucho más fácil de obtener que la de STURM, y además toma en cuenta el orden de multiplicidad de las raíces.

9. **Teorema de Harriot-Descartes.** — Si aplicamos el teorema de FOURIER al intervalo $(0, b)$, es:

[41-54] $f(0) = a_n,\ f'(0) = a_{n-1},$
$f''(0) = 2!\, a_{n-2},\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = n!\, a_0;$

y si tomamos a b suficientemente grande como para que el signo del polinomio sea el de su primer término respectivo, la sucesión de derivadas tendrá los signos de:

[41-55] $a_0,\ n\, a_0,\ n(n-1)a_0,\ \ldots,\ n!\, a_0,$

es decir, no presentará ninguna variación; por lo tanto, si r_p designa el número de raíces *positivas* de la ecuación $f(x) = 0$, será:

[41-56] $r_p = V_0 - \dot{2},$

en que V_0 indica las variaciones de la sucesión [41-54]. La fórmula [41-56] expresa el teorema de HARRIOT (1631) - DESCARTES (1637), que tiene la ventaja de poder ser aplicado en forma inmediata:

El número de raíces positivas, contada cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad, no supera el número de variaciones que presenta la sucesión de coeficientes (supuestos todos reales), y ambos números tienen la misma paridad.

Así, en el ejemplo [41-50] de § 41-7, el número de raíces positivas será 3 ó 1; *para obtener las negativas* basta poner $-x$ en vez de x, y los nuevos coeficientes tienen los signos $- + + - - -$; luego, la ecuación tiene dos raíces negativas o ninguna: el teorema de STURM permite resolver estas dudas.

10. **Cálculo de las raíces irracionales de una ecuación de coeficientes reales.** — Si la ecuación dada:

[41-57] $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$

tiene sus coeficientes racionales, es conveniente ante todo hallar sus posibles raíces racionales (§ 41-4), y proceder a su supresión, mediante la división de $f(x)$ por los binomios correspondientes; la reducción del grado de la ecuación abrevia considerablemente los cálculos numéricos subsiguientes.

Para aproximar una determinada raíz α, cuya existencia en un intervalo (a, b) se conoce por tener $f(a)$ y $f(b)$ signos contrarios (§ 26-2), aunque sin saber si es simple o múltiple, única en el intervalo o no, es mejor proceder directamente a las sustituciones de valores intermedios entre a y b vistas al demostrar constructivamente el teorema de BOLZANO (§ 26-3), para obtener así el valor aproximado de la raíz buscada, con error menor que un ε prefijado; si en el intervalo hay más de una raíz, desde el punto de vista de la resolución *aproximada* deben ellas considerarse como iguales.

Para las sucesivas sustituciones del teorema de BOLZANO conviene aplicar la regla de RUFFINI (§ 16-5), efectuando las multiplicaciones y adiciones mediante una máquina de calcular o tablas aritméticas.

Para evitar en la aplicación de la regla de RUFFINI el manejo de muchas cifras al ir obteniendo nuevas cifras exactas, se considera como nueva incógnita la diferencia $x' = x - a$, que se quiere determinar una vez hallado el valor aproximado $a < \alpha < a + 10^{-m}$.

Ordenado [41-57] en potencias de $(x - a)$:

[41-58]
$$f(x) \equiv c_0 (x - a)^n + c_1 (x - a)^{n-1} + \ldots + c_{n-1} (x - a) + c_n,$$
los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ de la ecuación transformada:

[41-59] $$c_0 x'^n + c_1 x'^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x' + c_n = 0,$$

se hallarán así: Dividamos $f(x)$ por $x - a$:

[41-60] $$f(x) \equiv [c_0 (x-a)^{n-1} + \ldots + c_{n-1}] (x-a) + c_n,$$

y el residuo es c_n; el cociente obtenido se vuelve a dividir por $x - a$, y el nuevo resto es c_{n-1}; dividiendo el cociente por $x-a$, el residuo es c_{n-2}; etc. Esto es lo que constituye la *regla de* HORNER (1819): *Para formar el polinomio transformado del* [41-57] *mediante la sustitución $x = a + x'$ se divide por $x - a$ el polinomio* [41-57] *y cada uno de los cocientes sucesivos; los residuos sucesivamente obtenidos son los coeficientes del polinomio transformado* [41-59], *ordenado según las potencias ascendentes de x* *.

Complemento indispensable de la regla de HORNER para

* Un método basado en los mismos principios fue descubierto en el siglo XIII por los matemáticos chinos. En 1247, CH'IN CHIU-SHAO resuelve $-x^4 + 763\,200\, x^2 - 40\,642\,560\,000 = 0$ por un proceso casi idéntico al método de HORNER.

hallar una nueva aproximación mediante la ecuación [41-59] es la aplicación de la *regla de* NEWTON (§ 40-4, *a*), que sustituía la curva que representa el primer miembro por su tangente; si se observa que en [41-59] la función de primer grado $y = c_{n-1} x' + c_n$ es la tangente a dicha curva en $x' = 0$, se tendrá que *para nueva aproximación a agregar al valor a, se intentará el valor*:

$$[41\text{-}61] \qquad x' = -\frac{c_n}{c_{n-1}}$$

y cuyo error será menor que δ / c_{n-1} *si la suma de los términos de* [41-59], *de grado superior al primero, es menor que* δ; esto permite casi siempre (cfr. nota al pie de § 40-4, *a*) duplicar de una vez el número de cifras exactas, pues en cada caso práctico es fácil hallar rápidamente una cota muy baja para δ.

La regla de HORNER da también el valor de las derivadas sucesivas:

$$f(a) = c_n; \quad f'(a) = c_{n-1}; \quad f''(a) = 2!\, c_{n-2}; \quad \ldots; \quad f^{(n)}(a) = n!\, c_0,$$

de $f(x)$ en el punto a.

EJEMPLO: Calculemos con error menor que 0,001 la raíz comprendida entre 0 y 1 de la ecuación:

$$[41\text{-}62] \qquad 7x^5 - 5{,}47x^3 + 3{,}33x^2 + 1{,}72x - 0{,}15 = 0$$

que es la [41-50], ya tratada en los §§ 41-7 y 41-9. Sustituyendo $x = 0{,}1$, resulta: $f(0{,}1) = 0{,}0499$, y como es $f(0) = -0{,}15$, la raíz está entre 0 y 0,1 (a prever, por ser $\frac{0{,}15}{1.72} < 0{,}1$) y probablemente más próxima a 0,1 que a 0.

Ensayando los valores 0,06, 0,07, 0,08, resulta:

$$f(0{,}06) < 0, \quad f(0{,}07) < 0, \quad f(0{,}08) > 0;$$

pondremos, pues, $x = 0{,}07 + x'$, y aplicaremos el algoritmo de HORNER, para no tener que manejar cifras demasiado altas en la aplicación de la regla de RUFFINI, con la cual se han obtenido cada una de las líneas subsiguientes:

7	0	—5,470	+3,330	+1,720	—0,150,
7	0,49	—5,436	+2,949	+1,926	(—0,015,
7	0,98	—5,367	+2,575	(+2,107,	
7	1,47	—5,264	(+2,205,		
7	1,96	(—5,127,			
7	(2,45,				
(7.					

La ecuación transformada:

$$[41\text{-}63] \quad 7x'^5 + 2{,}45x'^4 - 5{,}127x'^3 + 2{,}205x'^2 + 2{,}107x' - 0{,}015 = 0,$$

tiene pues una sola raíz comprendida entre 0 y 0,01, correspondiente a la de [41-62], comprendida entre 0,07 y 0,08. Para hallar las milésimas vemos inmediatamente que los términos de [41-63] de grado superior al primero no superan $\delta = 3 . 0{,}01^2 = 0{,}0003$, y que basta, por lo tanto, resolver la ecuación de primer grado:

$$[41\text{-}64] \qquad 2{,}107x' - 0{,}015 = 0.$$

cuya solución $x' = 0{,}00711\ldots$ tiene un error menor que $\frac{1}{2}\,\delta$, y dado que

es por exceso, podremos afirmar que $x = 0{,}0771$ es raíz de la ecuación [41-62] con todas sus cifras exactas.

Obsérvese que en virtud de la regla de NEWTON, sólo era necesario calcular por el algoritmo de HORNER los dos coeficientes, c_n y c_{n-1}, que entran en [41-64], ya que para los demás sólo interesan cotas aproximadas, con qué evaluar δ.

NOTA: *El método de* LAGRANGE nos da la aproximación de la raíz en fracción continua (Cap. V, nota III), y es análogo al de HORNER; si la ecuación sólo tiene una raíz entre a y $a+1$ se pone $x = a + \dfrac{1}{x'}$, y la ecuación transformada tiene seguramente una raíz, y una sola, *mayor que* 1; por sustituciones se encuentran dos enteros consecutivos, b y $b+1$, que comprenden esta raíz, y se pone $x' = b + \dfrac{1}{x''}$, obteniéndose otra ecuación en x'', etc.

Resultan así los pares siguientes, que con máxima aproximación racional respecto a la sencillez de los términos de la fracción aproximante (Cap. V, nota III, c_1) comprenden a la raíz buscada:

$$(a,\ a+1)\,;\ \left(a + \frac{1}{b+1},\ a + \frac{1}{b}\right)\ ;\ \left(a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}},\ a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c+1}}\right);\ \ldots$$

11. Cálculo de las raíces complejas de una ecuación algebraica. — *a*) Calculadas aproximadamente las raíces reales, si solamente hay un par de raíces imaginarias conjugadas, inmediatamente quedan determinadas su suma y su producto (§ 19-1, b_1). La mitad de la suma es la parte real, y la raíz cuadrada del producto es el módulo, según indica [18-8]; la parte imaginaria se calcula fácilmente por el teorema de PITÁGORAS o trigonométricamente (§ 19-1, *e*). Ya se dijo en el capítulo IX, nota I, *d*) cómo se efectuaba la aplicación de las tablas de los logaritmos de sumas.

EJEMPLO 1: Sea la ecuación $z^3 + 2z - 1 = 0$.

Por la regla de DESCARTES (§ 41-9) no puede tener más que una raíz real positiva; evidentemente, está comprendida entre 0 y 1 (§ 26-2). Como la ecuación carece de raíces negativas, las otras dos son imaginarias conjugadas, y su parte real está comprendida entre 0 y $-\frac{1}{2}$, pues al dividir por $z - a$, siendo $0 < a < 1$, resulta $-a$ como suma de las raíces.

El simple examen de una tabla de cubos (Cap. VII, nota II, *e*) da inmediatamente, para la raíz real, $z_1 = 0{,}453$; luego, la parte real de z_2 y z_3 vale $-0{,}226$, y el módulo es $r = +\sqrt{1 : 0{,}453} = 1{,}673$.

b) Los valores $z = x + iy$ que satisfacen a la ecuación

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y) = 0,$$

están formados por los pares de valores reales (x, y) que satisfacen al par de ecuaciones

$$u(x, y) = 0, \quad v(x, y) = 0.$$

Cuando se logre resolver este sistema (§ 42-4), la ecuación quedará resuelta; y en todo caso cabe dibujar por puntos, aproximadamente, ambas curvas, teniendo así una idea de la

situación de las raíces, que vienen dadas como intersección de ambas curvas.

EJEMPLO 2: Sea la ecuación $z^4 - 4z + 1 = 0$, que da origen al sistema de ecuaciones reales:

$$u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 4x + 1 = 0,$$
$$v = 4x^3y - 4xy^3 - 4y = 0.$$

La ecuación $v = 0$ da: $y = 0$, $x^3 - xy^2 - 1 = 0$, de las cuales la primera reduce la $u = 0$ a la ecuación $x^4 - 4x + 1 = 0$, cuyas raíces reales es preciso calcular, problema previo al cálculo de las otras raíces, o sea de las imaginarias, las cuales vienen dadas por el sistema:

$$y^2 = x^2 - x^{-1}, \qquad -4x^4 + 1 + x^{-2} = 0.$$

Como este trinomio es decreciente para $x > 0$, y pasa de $+$ a $-$, resulta que esta ecuación tiene solamente dos raíces reales opuestas. Con una tabla corriente de recíprocos y de cuadrados (Cap. VII, nota II, *e*), resulta inmediatamente que x^2 está comprendido entre 0,760 y 0,761; luego, $x = -0{,}872$, puesto que el valor positivo haría negativo $x^2 - x^{-1}$. Con la misma tabla de cuadrados, resulta así el único par de raíces imaginarias: $z = -0{,}872 \pm 1{,}381\,i$.

c) Existen métodos de separación de raíces imaginarias análogos al de STURM para las raíces reales (§ 41-7), que pueden estudiarse en la 4ª edición del *Álgebra* de J. REY PASTOR (citada en Cap. IV, nota III, 3).

12. Introducción al método de Gräffe. — Los métodos de resolución dados anteriormente son recomendables cuando sólo interesa cierta raíz; pero el cálculo de todas resultaría extraordinariamente laborioso.

El método de GRÄFFE difiere esencialmente de los anteriores y no exige ningún examen previo de la ecuación, ni tanteos para la acotación de las raíces, ni investigación del número de raíces reales, ni separación de éstas, ni aproximaciones sucesivas. Por lo contrario, dada una ecuación arbitraria de *coeficientes reales o imaginarios*, con sólo aplicarle repetidamente una sencillísima regla práctica, en que únicamente intervienen las operaciones aritméticas elementales, quedan determinadas *simultáneamente todas* las raíces de la ecuación, tanto *reales como imaginarias*, con aproximación más que suficiente; y ésta puede todavía mejorarse si se aplica la regla de NEWTON (§ 41-10) a los valores así calculados.

La idea fundamental del método reside en que en virtud de las relaciones [18-9] obtenidas en el § 18-2, y que ligan las raíces y los coeficientes de una ecuación, si una raíz predomina de tal modo sobre las demás que éstas son despreciables respecto de ella dentro de un cierto grado de aproximación, el valor de ésta viene dado aproximadamente por $-a_1/a_0$;

$$-\frac{a_1}{a_0} = x_1 + \underbrace{x_2 + \ldots\ldots + x_n}_{\text{Despreciables}}.$$

Análogamente, el producto de las dos raíces mayores es aproximadamente a_2/a_0:

$$\frac{a_2}{a_0} = x_1 x_2 + \underbrace{x_1 x_3 + \dots\dots\dots + x_{n-1} x_n}_{\text{Despreciables}},$$

y así sucesivamente.

Dada una ecuación cualquiera de raíces desiguales, por muy próximas que estén unas de otras, si formamos la ecuación cuyas raíces sean las potencias ν de aquéllas, el cociente, x_i^ν/x_j^ν, de dos cualesquiera de ellas, tales que $|x_i|<|x_j|$, llegará a ser tan pequeño como se quiera, por próximo que $\frac{|x_i|}{|x_j|}$ esté a 1; es decir, será x_i^ν despreciable respecto de x_j^ν, dentro del orden de aproximación prefijado.

Para obtener ecuaciones cuyas raíces sean potencias muy elevadas de las raíces de la ecuación:

[41-65] $$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

basta dar una regla para el exponente $\nu = 2$, pues aplicándola repetidamente obtendremos potencias de exponentes 4, 8, 16, 32, ...

Formemos la ecuación cuyas raíces sean las de [41-65] cambiadas de signo:

[41-66] $$a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - + \dots \pm a_{n-1} x \mp a_n = 0.$$

Multiplicando ambos polinomios, la ecuación:

[41-67] $$A_0 x^{2n} - A_1 x^{2(n-1)} + \dots \pm A_{n-1} x^2 \mp A_n = 0,$$

en que sólo figuran potencias pares de x, tiene como raíces las de [41-65] y [41-66]. Si ponemos $X = -x^2$, resulta:

[41-68] $$A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + A_2 X^{n-2} + \dots + A_{n-1} X + A_n = 0,$$

ecuación cuyas raíces son los *cuadrados de las raíces* de [41-65] cambiados de signo. Los coeficientes de la ecuación transformada [41-68], son:

[41-69] $$A_0=a_0^2;\quad A_1=a_1^2 - 2\,a_0a_2 \quad A_2=a_2^2-2\,a_1a_3+2\,a_0a_4$$
$$\dots\dots;\quad A_{n-1} = a_{n-1}^2 - 2\,a_{n-2}\,a_n;\quad A_n = a_n^2;$$

es decir: *Los coeficientes de la ecuación que tiene por raíces a los cuadrados de las raíces de otra ecuación, cambiados de signo, se obtienen elevando al cuadrado cada coeficiente de ésta, y restándole y sumándole, alternativamente, los duplos de los productos de cada dos coeficientes simétricos respecto del mismo.*

Como los coeficientes de las ecuaciones transformadas sucesivas crecen o decrecen muy rápidamente, sólo se calculan aproximadamente, tomando por ejemplo de cada uno sus h primeras cifras significativas; así, cualquiera sea la cuantía del error absoluto, el *error relativo* (cap. V, nota II, c), será menor que $1/10^{h-1}$.

Por ejemplo, tomando cinco cifras significativas en vez de 2073483487,45, consideraremos $2{,}0734 \,.\, 10^9$, y en vez de

0,00017284259, consideraremos 1,7284 . 10^{-4}, siempre con error relativo menor que 10^{-4}.

EJEMPLO 1: Veamos cómo se procede en el caso de una ecuación de 4º grado de coeficientes reales o imaginarios, con sus cuatro raíces reales o imaginarias, supuestas de módulos desiguales,

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > |x_4|.$$

Sea $k < 1$ tal que:

[41-70] $$\frac{|x_2|}{|x_1|} < k, \quad \frac{|x_3|}{|x_2|} < k, \quad \frac{|x_4|}{|x_3|} < k, \quad (k < 1).$$

Formando la ecuación transformada:

[41-71] $$A_0 X^4 + A_1 X^3 + A_2 X^2 + A_3 X + A_4 = 0,$$

de exponente ν, cuyas raíces son:

[41-72] $$X_1 = -x_1^\nu; \quad X_2 = -x_2^\nu; \quad X_3 = -x_3^\nu; \quad X_4 = -x_4^\nu,$$

se deduce:

[41-73] $$\frac{|X_2|}{|X_1|} < k^\nu, \frac{|X_3|}{|X_2|} < k^\nu, \frac{|X_4|}{|X_3|} < k^\nu,$$

y para ν suficientemente grande, será k^ν tan pequeño como se quiera, y por lo tanto se verifican las igualdades *asintóticas* siguientes:

[41-74] $$\begin{cases} -\dfrac{A_1}{A_0} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \sim X_1, \\ +\dfrac{A_2}{A_0} = X_1 X_2 + X_1 X_3 + \dots \sim X_1 X_2, \\ -\dfrac{A_3}{A_0} = X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2 X_4 + \dots \sim X_1 X_2 X_3, \\ +\dfrac{A_4}{A_0} = X_1 X_2 X_3 X_4, \end{cases}$$

donde $\sim$ indica *equivalencia* de *infinitos* (si $|x_1| > 1$), o de *infinitésimos* (si $|x_1| < 1$); es decir, en ambos casos su cociente tiende a 1 para $\nu \to \infty$ (§ 37-2, *c* y § 24-3, *c*).

De [41-72] y [41-74] obtenemos para raíces de [41-65]:

[41-75] $$x_1 = \sqrt[\nu]{\frac{A_1}{A_0}}, \quad x_2 = \sqrt[\nu]{\frac{A_2}{A_1}}, \quad x_3 = \sqrt[\nu]{\frac{A_3}{A_2}}, \quad x_4 = \sqrt[\nu]{\frac{A_4}{A_3}}.$$

Los errores cometidos en [41-74] son menores que:

$$|X_2 + X_3 + X_4| < 3\,|X_2|; \quad |X_1 X_3 + \dots + X_3 X_4| < 5\,|X_1 X_3|;$$
$$|X_1 X_2 X_4 + X_1 X_3 X_4 + X_2 X_3 X_4| < 3\,|X_1 X_2 X_4|,$$

a los que, por grandes que sean, corresponderán errores *relativos* menores que:

$$\frac{3\,|X_2|}{|X_1|} < 3\,k^\nu; \quad \frac{5\,|X_1 X_3|}{|X_1 X_2|} < 5\,k^\nu; \quad \frac{3\,|X_1 X_2 X_4|}{|X_1 X_2 X_3|} < 3\,k^\nu,$$

y tomando ν suficientemente grande, estos errores relativos serán inferiores a la cota de error prefijada.

Tablilla de cálculos correspondientes al ejemplo 2 del § 41-12

2^{ν}	a_0	a_1	a_2	a_3	Σa_m	$\Sigma(-1)^m a_m$	C_1	S_1 (*)	S_2 (**)	C_2
1)	+ 2 (1)	+ 3,5	— 1,5 (1)	— 5,0 (1)	— 6,13 (1)	+ 3,17 (1)	— 1,9432 (3)	+ 3,50 (2)	— 2,50 (2)	— 8,75 (4)
		+ 1,225 (1)	+ 2,25 (2)							
		+ 0,6 (1)	+ 3,50 (2)							
2)	+ 4 (2)	+ 1,825 (1)	+ 5,75 (2)	+ 2,5 (3)	+ 3,0933 (3)	— 1,9432 (3)	— 6,0109 (6)	+ 2,825 (5)	— 8,75 (4)	— 2,472 (10)
		+ 3,3306 (2)	+ 3,3062 (5)							
		— 4600	— 9125							
4)	+ 1,6 (3)	+ 2,8706 (2)	+ 2,3937 (5)	+ 6,25 (6)	+ 6,4896 (6)	— 6,0109 (6)	— 3,9008 (13)	+ 3,2706 (10)	— 2,472 (10)	— 8,0845 (20)
		+ 8,2403 (4)	+ 5,7297 (10)							
		— 765	— 3588							
8)	+ 2,56 (6)	+ 8,1638 (4)	+ 5,3709 (10)	+ 3,9062 (13)	+ 3,91157 (13)	— 3,9008 (13)	— 1,5258 (27)	+ 8,2431 (20)	— 8,0845 (20)	— 6,6642 (41)
		+ 6,6648 (9)	+ 2,8846 (21)							
		— 2	— 63							
16)	+ 6,5536 (12)	+ 6,6646 (9)	+ 2,8783 (21)	+ 1,5258 (27)		— 1,5258 (27)			— 6,6642 (4)	

(*) $S_1 = \Sigma a_{n-m} \cdot 10^{m.2^{\nu}}$; (**) $S_2 = \Sigma (-1)^{n-m} a_{n-m} \cdot 10^{m.2^{\nu}}$

NOTA 1. Tiene gran importancia práctica llevar un control de los cálculos efectuados. Según ha mostrado J. P. LOMBARDI (Rev. Fac. Ci. Fisicomat. La Plata, 1948, IV, nº 2, págs. 195-197), si en [41-65], [41-66] y [41-67] se pone $x = 1$, resulta

$$(C_1) \qquad (\Sigma a_m)(\Sigma(-1)^m a_m) = \Sigma(-1)^m A_m .$$

Como en las sucesivas transformadas, los coeficientes se alejan entre sí de valor muy rápidamente, este procedimiento sólo controla una mitad triangular de la tabla de coeficientes, por ejemplo la superior derecha.

Si en la transformada con potencia de exponente 2^ν sustituímos en [41-65] y [41-66] x por 10^{2^ν}, cada término $a_{n-m}\, x^m$ se convierte en $a_{n-m} . 10^{m.2^\nu}$ y resultará en [41-68] sustituído $A_{n-m} X^m$ por $(-1)^m A_{n-m} . 10^{m.2^{\nu+1}}$ de manera que:

$$(C_2) \quad (\Sigma a_{n-m} . 10^{m.2^\nu})(\Sigma(-1)^{n-m} a_{n-m} . 10^{m.2^\nu}) = \Sigma(-1)^{n-m} A_{n-m} . 10^{m.2^{\nu+1}} .$$

Cada término de las sumas anteriores se calcula rápidamente corriendo la coma múltiplos sucesivos de 2^ν al ir de derecha a izquierda. En el caso de raíces todas reales desiguales, este procedimiento permite controlar la otra mitad de la tabla de coeficientes, por ejemplo la inferior izquierda.

EJEMPLO 2:

$$0{,}2\, x^3 + 3.5\, x^2 - 15\, x - 50 = 0.$$

Véase en la pág. 570 el cálculo de las transformaciones sucesivas para $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ con las columnas de control correspondientes a las igualdades (C_1 y (C_2), encerrando entre paréntesis los exponentes de las potencias de 10 sacadas como factores.

Nos detenemos cuando en cada coeficiente *no influyen ya los contiguos*; los coeficientes de las nuevas transformadas serían los cuadrados de éstos, y por lo tanto obtenemos la misma exactitud si nos detenemos en esta transformada que prosiguiendo el cálculo:

$\lg A_0 = \overline{12},816480$	
$\lg A_1 = 9{,}823774$	$\lg x_1^{16} = 21{,}007294$; $\lg x_1 = 1{,}312956$; $x_1 = \pm\ 20{,}556$
$\lg A_2 = 21{,}459136$	$\lg x_2^{16} = 11{,}635362$; $\lg x_2 = 0{,}727210$; $x_2 = \pm\ 5{,}3359$
$\lg A_3 = 27{,}183498$	$\lg x_3^{16} = 5{,}724362$; $\lg x_3 = 0{,}357773$; $x_3 = \pm\ 2{,}2791$

y como su suma ha de ser precisamente $-17{,}5$, los signos son, con toda seguridad, éstos:

$$x_1 = -20{,}556, \qquad x_2 = +5{,}3359, \qquad x_3 = -2{,}2791.$$

NOTA 2. En la obra *Lecciones de Álgebra* (4ª ed.), de J. REY PASTOR (citada en Cap. IV, nota III-3), puede completarse el estudio de este método, en particular en el caso en que la ecuación tiene grupos de raíces iguales en valor absoluto, dentro del orden de aproximación prefijado y en el que entonces aparece una fragmentación de la ecuación transformada, tal que cada fragmento nos dé uno de aquellos grupos de raíces.

Sólo añadiremos que este método de GRÄFFE es objeto cada día de nuevos perfeccionamientos, y es, junto con los nomográficos, el preferido en los gabinetes de cálculo.

Los métodos gráficos, como el de LILL, y nomográficos (notas IV y V-7) son convenientes cuando sólo se requiere una aproximación grosera, y sirven también para controlar los numéricos susceptibles de deslices im-

portantes; pero modernamente, con el auxilio de máquinas de calcular y tablas aritméticas, se prefieren éstos, puesto que permiten obtener siempre la aproximación deseada. Sin embargo, en la aplicación de un algoritmo matemático, el ingeniero no debe olvidar nunca que no sólo es ocioso, sino también ridículo y contraproducente, entretenerse en conseguir aproximaciones superiores a las que consientan los errores inherentes a los datos de que se parta.

Ejercicios

1. *a*) Hallar el límite para $z \to i$ de $w_1 = z + \bar{z} + 1 + i\ (\operatorname{sen}(i\bar{z} - iz - 2))/(i\bar{z} - iz - 2)$ y de $w_2 = (z^2 + \bar{z}^2)/|z|^2$; *b*) Lo mismo para $z \to 0$.

2. ¿Tienen derivada las funciones del ejercicio anterior en los puntos indicados? ¿Son analíticas?

3. Si $f(x + iy) = xy(x + iy)^2/(x^4 + y^2)$, $f(0) = 0$, probar que $(f(h) - f(0))/h \to 0$, cuando $h \to 0$ sobre un camino rectilíneo, pero no cuando $h \to 0$ de manera arbitraria. ¿Cuál es el límite para $h = t + i\,t^2 \to 0$? (t real).

4. ¿Qué ángulo forman los transformados de los semiejes positivos $+x$, $+y$ por la función $w = z^2$? ¿Contradice este resultado el de § 41-1, *c*?

5. Orden de multiplicidad de las raíces -2 y $\sqrt{3}$ en la ecuación

$$x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 10x^2 - 36x - 24 = 0.$$

6. Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene *todas* sus raíces *reales* y *distintas*, el polinomio $(f'(x))^2 - f(x) . f''(x)$ se conserva *positivo* para todo valor real de x.

7. La condición necesaria y suficiente para que un polinomio de grado n sea potencia n-ésima exacta, es su divisibilidad por su derivada en el campo de racionalidad de sus coeficientes.

8. Hallar las raíces múltiples de $x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 16x^2 - 12x - 16 = 0$ y resolverla.

9. Calcular el número de vueltas alrededor del origen de la curva cerrada

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}; \qquad y = \frac{t^4 + 3t^3 - 5t^2 - t + 4}{t^3 + t}; \quad (-1 \leqq t \leqq 1).$$

10. Por el método de STURM, hallar las partes enteras de las raíces reales de la ecuación: $f(x) \equiv x^4 - 20x^3 - 62x^2 + 183x - 100 = 0$.

11. Aplicar los teoremas de HARRIOT-DESCARTES y BUDAN-FOURIER a la ecuación del ejercicio anterior.

12. Efectuar con detalles las demostraciones propuestas en § 41-3, *d*.

13. Probar, por el método de HORNER, que:

$$x^4 - 1 = (x + 1)^4 - 4(x + 1)^3 + 6(x + 1)^2 - 4(x + 1).$$

14. Resolver completamente la ecuación:

$$48x^8 - 340x^7 - 716x^6 + 7\,063x^5 - 5\,899x^4 - 20\,742x^3 + 33\,312x^2 - 7\,776x - 4\,320 = 0.$$

15. Hallar las raíces imaginarias de la ecuación $z^3 + z - 20 = 0$. ¿Cuál es su raíz real?

16. Calcular, por el método de GRÄFFE, las cuatro raíces reales de $x^4 - 56x^3 + 490x^2 + 11\,112x - 117\,495 = 0$. Perfeccionar los resultados mediante la regla de NEWTON-HORNER.

§ 42. Eliminación algebraica

1. Eliminación: método del máximo común divisor. — Hemos dicho (§ 41-2, *d*) que u es *función algebraica* de las variables $x, y, \ldots, t$, si la correspondencia está expresada por una *ecuación* $P(x, y, \ldots, t; u) = 0$, cuyo primer miembro es un polinomio de variables $x, y, \ldots, t, u$. Se supone, en general, que tanto los coeficientes del polinomio como las variables pueden tomar *valores complejos.*

Las *ecuaciones de un sistema* (§ 15-2, *a*) se llaman *algebraicas* si vienen expresadas por la anulación de polinomios en las incógnitas con coeficientes complejos cualesquiera, como hemos visto ya (§ 18-1) para el caso de una variable.

Se llama *operación algebraica general* a la resolución de *una* ecuación algebraica, con resultado en general multívoco (§ 41-2, *d*), y no dable en general (Cap. IV, nota II, *a*) mediante una *expresión algebraica* (§ 15-1, *a*), es decir, por una función *algebraica explícita* (§ 23-8) de los coeficientes de la ecuación. Sin embargo, vamos a ver aquí que mediante operaciones algebraicas en el sentido general dicho, la resolución de un sistema cualquiera de ecuaciones algebraicas o la construcción de una función algebraica de una o más variables puede siempre efectuarse.

Recordemos (§ 15-3) que una ecuación es *consecuencia* de otras que forman un sistema con cualquier número de incógnitas, si se satisface para todo conjunto de valores de las incógnitas que satisfagan al sistema.

Se dice que una función R de los coeficientes de un sistema de ecuaciones es su *resultante*, si

$$R = 0 \qquad [42\text{-}1]$$

es la *condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución*, es decir, para que el sistema sea *compatible.* A ella suele llegarse por eliminación de todas las incógnitas del sistema: *Eliminar una incógnita entre dos o más ecuaciones es hallar una ecuación que no contiene esta incógnita y se satisface para todas las soluciones del sistema.*

Ejemplo: En el sistema $a_0x + a_1 = 0$, $b_0x + b_1 = 0$, despejando x de una ecuación y reemplazando en la otra, resulta: $a_0b_1 - a_1b_0 = 0$. La resultante es $a_0b_1 - a_1b_0$ y su anulación es necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución, que es $x = a_1/a_0 = -b_1/b_0$.

El problema general de la eliminación (§ 42-4) se reduce al caso más sencillo: eliminar x entre dos ecuaciones:

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0, \qquad [42\text{-}2]$$

es decir, hallar su resultante [42-1].

Las raíces comunes a dos polinomios son las de su m.c.d. *y con igual orden de multiplicidad que en éste.* Por consiguiente, si los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ tienen comunes las raíces a (orden α), b (orden β), ..., l (orden λ), el m. c. d. (§ 17-3), salvo un factor constante arbitrario, es:

[42-3] $$D(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda.$$

El cálculo de las raíces comunes a las dos ecuaciones [42-2] se reduce a la resolución de una ecuación *única*:

[42-4] $$D(x) = 0,$$

obteniéndose $D(x)$ por *operaciones racionales,* al aplicar a $f(x)$ y $g(x)$ el algoritmo del m.c.d.

Vemos entonces que la condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones [42-2] tengan una solución común es que $D(x)$ sea por lo menos de primer grado. Por lo tanto, la resultante de [42-2] es el último resto constante que se obtiene al aplicar el algoritmo de EUCLIDES para hallar el m. c. d. por divisiones sucesivas (§ 17-3, *e*).

Vemos, también, que *la condición necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones* [42-2] *tengan r raíces comunes, es que el* m. c. d. *sea de grado r, es decir, que el resto de grado $r - 1$ sea idénticamente nulo y no lo sea el de grado r.*

Como una raíz múltiple de orden p de un polinomio es múltiple de orden $p - 1$ de la derivada (§ 41-2 *a*), tendremos que *la condición necesaria y suficiente para que* $f(x) = 0$ *tenga raíces múltiples, es que sea nula la resultante de*

[42-5] $$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0.$$

Otra condición puede verse en nota III, *e*.

2. **Método de eliminación de Euler.** — *a*) Para hallar en forma de determinante la resultante del sistema:

[42-6] $$\begin{cases} f_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0, \\ g_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0, \end{cases}$$

demos previamente el siguiente lema: *La condición necesaria y suficiente para que los polinomios* f_m *y* g_n *de grados m y n tengan por lo menos una raíz común, es que existan dos polinomios* F_{m-1} *y* G_{n-1} *de grados $m - 1$ y $n - 1$ que satisfagan a la identidad*

[42-7] $$f_m\, G_{n-1} \equiv g_n\, F_{m-1}.$$

En efecto, si f_m y g_n tienen común un divisor d de primer grado, será $f_m \equiv F_{m-1} \cdot d$ y $g_n \equiv G_{n-1} \cdot d$, siendo los cocientes F_{m-1} y G_{n-1} de grados $m - 1$ y $n - 1$; de estas identidades resulta [42-7]. Recíprocamente, si hay dos polinomios que satisfacen [42-7], todos los m factores lineales de f_m dividen al segundo miembro de [42-7], y suprimidos los que dividan a F_{m-1} (a lo sumo $m - 1$), queda por lo menos uno que debe dividir a g_n; luego, f_m y g_n tienen un divisor común, y por lo tanto, una raíz común.

Suponiendo $m = 3$, $n = 2$, la identidad [42-7], o sea

$$[42\text{-}8] \qquad (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) \cdot (\beta_0 x + \beta_1) \equiv \equiv (b_0x^2 + b_1x + b_2) \cdot (\alpha_0x^2 + \alpha_1x + \alpha_2),$$

equivale al sistema lineal homogéneo de $m + n$ $(3 + 2)$ ecuaciones con $m + n$ $(3 + 2)$ incógnitas, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1$ (§ 16-1, b):

$$[42\text{-}9] \quad \left\{ \begin{array}{lllll} \text{Coef. de } x^4) & a_0\beta_0 & = b_0\alpha_0 & , \\ \quad ,, \quad x^3) & a_1\beta_0 + a_0\beta_1 & = b_1\alpha_0 + b_0\alpha_1 & , \\ \quad ,, \quad x^2) & a_2\beta_0 + a_1\beta_1 & = b_2\alpha_0 + b_1\alpha_1 + b_0\alpha_2 & , \\ \quad ,, \quad x\ ) & a_3\beta_0 + a_2\beta_1 & = b_2\alpha_1 + b_1\alpha_2 & , \\ \quad ,, \quad x^0) & a_3\beta_1 & = b_2\alpha_2 & ; \end{array} \right.$$

de donde, la condición necesaria y suficiente para que exista un sistema de valores $\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, no todos nulos (§ 15-6), es la anulación del determinante (cambiando filas por columnas):

$$[42\text{-}10] \qquad R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

En el caso general, a los $m + 1$ coeficientes de la ecuación de grado m corresponden n filas de [42-10], y a los $n + 1$ de la de grado n corresponden m filas del determinante [42-10] de orden $m + n$.

Al mismo resultado se llega mediante el *método dialítico* de SYLVESTER, que consiste en eliminar $x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, \ldots, x^2, x, 1$ del sistema homogéneo en los coeficientes (§ 15-6) que se obtiene al multiplicar en [42-6] la primera por $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x, 1$, y la segunda por $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x, 1$.

Así obtenemos que la condición necesaria y suficiente para que el sistema [42-6] tenga una raíz común, es la anulación de la resultante [42-10]: $R = 0$.

El determinante [42-10] se llama *resultante* de EULER o de SYLVESTER o de CAYLEY, porque a ella llegaron los tres por distintos caminos. Algunos autores modernos (A. C. AITKEN, E. T. WHITTAKER, H. W. TURNBULL) la llaman también *bigradiente*.

b) *Forma factorial de la resultante* *. — Descompuestos factorialmente (§ 18-2) los polinomios [42-6] tenemos:

$$[42\text{-}11] \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \equiv a_0(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3). \\ g(x) \equiv b_0(x - \mu_1)(x - \mu_2). \end{array} \right.$$

* E. T. WHITTAKER: *Proc. Edin. Math. Soc.* (1) 40, p. 62-63 (1922).

Para que ambos polinomios se anulen simultáneamente, es necesario y suficiente que una de las λ_i coincida con una de las μ_j, es decir, que se anule la expresión:

[42-12] $\mathrm{R}_1 \equiv (\mu_1 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \lambda_3)(\mu_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_3)$.

Si designamos por $\Delta(a, b, c, \ldots, h, k)$ el determinante de VANDERMONDE (§ 13-7,b), será:

[42-13] $$\mathrm{R}_1 = \frac{\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2)}{\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \,.\, \Delta(\mu_1, \mu_2)}.$$

Designando por $f_i = \mathrm{f}(\mu_i)$, $g_j = \mathrm{g}(\lambda_j)$, de [42-12] deducimos:

[42-14] $$b_0^3 . a_0^2 . \mathrm{R}_1 = b_0^3 . f_1 . f_2 = a_0^2 g_1 . g_2 . g_3.$$

Efectuemos el siguiente producto de filas por columnas (§ 13-6):

[42-15]

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \mu_1^4 & \mu_2^4 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \mu_1^3 & \mu_2^3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \mu_1^2 & \mu_2^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \mu_1 & \mu_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 f_1 & \mu_2 f_2 \\ 0 & 0 & 0 & f_1 & f_2 \\ \lambda_1^2 g_1 & \lambda_2^2 g_2 & \lambda_3^2 g_3 & 0 & 0 \\ \lambda_1 g_1 & \lambda_2 g_2 & \lambda_3 g_3 & 0 & 0 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Si en [42-15] expresamos el primer miembro mediante [42-10] y [42-13], mientras desarrollamos el segundo miembro por la regla de LAPLACE (§ 13-5, b), obtenemos:

$$\mathrm{R} . \mathrm{R}_1 . \Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) . \Delta(\mu_1, \mu_2) = - f_1 . f_2 . \Delta(\mu_1, \mu_2) . g_1 . g_2 . g_3 . \Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

y teniendo en cuenta [42-14], deducimos que *en general* será:

[42-16] $$\mathrm{R} = (-1)^{mn+1} . a_0^n . b_0^m . \mathrm{R}_1,$$

por lo que resultan equivalentes las resultantes R y R_1.

c) El lema [42-7] puede generalizarse en la siguiente forma: *Es condición necesaria y suficiente, para que las ecuaciones* [42-6] $\mathrm{f}_m = 0$, $\mathrm{g}_n = 0$ *tengan por lo menos r raíces comunes, que existan dos polinomios de grado, $m - r$, $n - r$, tales que*:

[42-17] $$\mathrm{f}_m \mathrm{G}_{n-r} \equiv \mathrm{g}_n \mathrm{F}_{m-r}.$$

En efecto, si f_m y g_n tienen un divisor común, d_r, de grado r, será $\mathrm{f}_m \equiv \mathrm{F}_{m-r} . \mathrm{d}_r$, $\mathrm{g}_n \equiv \mathrm{G}_{n-r} . \mathrm{d}_r$, de donde se deduce [42-17], ya que los cocientes F_{m-r} y G_{n-r} serán de grados $m - r$ y $n - r$. Recíprocamente, si hay dos polinomios F_{m-r} y G_{n-r} que satisfacen [42-17], cada uno de los m factores lineales de f_m divide al segundo miembro de [42-17], y suprimidos los que dividen a F_{m-r} (a lo sumo $m - r$), quedan por lo menos r cuyo producto d_{r+h}, de grado $r + h \geqslant r$, $(h \geqslant 0)$ será divisor de g_n. Además, vemos que: *La condición necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones* [42-6] *tengan precisamente r raíces comunes, es que existan dos polinomios que satisfagan a la identidad* [42-17] *y no existan polinomios de menor grado que cumplan tal condición.*

d) Si las dos ecuaciones [42-6] admiten *precisamente* r raíces comunes, su m. c. d. $\mathrm{D}(x)$ es de grado r (§ 42-1), y podremos escribir:

[42-18] $$\mathrm{f}_m(x) \equiv \mathrm{F}_{m-r} . \mathrm{D}; \quad \mathrm{g}_n(x) \equiv \mathrm{G}_{n-r} . \mathrm{D};$$

donde:

[42-19] $$\begin{cases} \mathrm{F}_{m-r} \equiv \xi_0 x^{m-r} + \xi_1 x^{m-r-1} + \ldots + \xi_{m-r}, & \xi_0 \neq 0; \\ \mathrm{G}_{n-r} \equiv \eta_0 x^{n-r} + \eta_1 x^{n-r-1} + \ldots + \eta_{n-r}, & \eta_0 \neq 0. \end{cases}$$

Sustituyendo [42-18] en [42-7], y simplificando, queda

$$\mathrm{F}_{m-r} . \mathrm{G}_{n-1} \equiv \mathrm{G}_{n-r} . \mathrm{F}_{m-1},$$

por lo cual: F_{m-r} divide a F_{m-1} y G_{n-r} divide a G_{n-1}, al ser F_{m-r} y G_{n-r} primos entre sí (§ 17-3, d_1 y e_3). Por lo tanto, es:

$$\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1} \equiv (\xi_0 x^{m-r} + \ldots + \xi_{m-r}) \, . \, (c_0 x^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \ldots + c_{r-1}),$$
$$\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1} \equiv (\eta_0 x^{n-r} + \ldots + \eta_{n-r}) \, . \, (c_0 x^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \ldots + c_{r-1}),$$

e identificando:

$$[42\text{-}20] \quad \begin{cases} \alpha_0 = c_0 \xi_0, \\ \alpha_1 = c_0 \xi_1 + c_1 \xi_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m-1} = c_0 \xi_{m-1} + c_1 \xi_{m-2} + \ldots + c_{r-1} \xi_{m-r}, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0 = c_0 \eta_0, \\ \beta_1 = c_0 \eta_1 + c_1 \eta_0 \quad , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n-1} = c_0 \eta_{n-1} + \ldots + c_{r-1} \eta_{n-r}, \end{cases}$$

donde son nulos los coeficientes ξ_i y η_j de índice $i > m - r$ y $j > n - r$, respectivamente.

Las r primeras igualdades [42-20], tomadas como ecuaciones en c_0, c_1, ..., c_{r-1}, forman un sistema al cual es aplicable la regla de CRAMER (§ 15-4), pues su determinante es $\xi_0{}^r \neq 0$; entonces, en el sistema de $m + n$ ecuaciones homogéneas [42-9] con $m + n$ incógnitas α_0, α_1, ..., α_{m-1}, β_0, β_1, ..., β_{n-1}, que obtuvimos igualando coeficientes en [42-7], podemos tomar las α_0, α_1, ..., α_{r-1} como incógnitas no-principales, y dando a éstas valores arbitrarios, las r primeras igualdades [42-20] determinan unívocamente valores de c_0, c_1, ..., c_{r-1}, que sustituídos en las $m + n - r$ restantes igualdades [42-20], dan los valores ya completamente determinados de las otras incógnitas α_r, ..., α_{m-1}, β_0, β_1, ..., β_{n-1}, tomadas como principales.

Por lo tanto (§ 15-5, *b*), la característica de la matriz que forma la resultante de EULER [42-10] es *precisamente* $m + n - r$. Como en vez de α_0, ..., α_{r-1}, podemos suponer arbitrarios β_0, β_1, ..., β_{r-1} (ya que también es $\eta_0{}^r \neq 0$), y desdeñar las r primeras ecuaciones de las $m + n$ de [42-9], un menor principal de la resultante de EULER de característica $m + n - r$ es siempre el obtenido suprimiendo las r primeras filas y r primeras columnas de [42-10]. En resumen:

La condición necesaria y suficiente para que el m. c. d. *de dos polinomios de grados m y n sea de grado r (o para que tengan precisamente r raíces comunes), es que la resultante de* EULER [42-10] *tenga la característica $m + n - r$, obteniéndose un menor principal no nulo por supresión de las r primeras filas y r primeras columnas.*

NOTA: Obsérvese que si escribimos explícitamente [42-17], teniendo en cuenta las [42-6] y [42-19], es:

$$[42\text{-}21] \qquad (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m) \, . \, (\eta_0 x^{n-r} + \ldots + \eta_{n-r}) \equiv$$
$$\equiv (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n) \, . \, (\xi_0 x^{m-r} + \ldots + \xi_{m-r}),$$

análoga a la [42-8], y que equivale a un sistema de $m + n - r + 1$ ecuaciones homogéneas en $m + n - 2r + 2$ incógnitas ξ_0, ξ_1, ..., ξ_{m-r}, η_0, η_1, ..., η_{n-r} no todas nulas ($\xi_0 \neq 0$, $\eta_0 \neq 0$), cuya matriz, de característica no superior a $m + n - 2r + 1$ (§ 15-6, *a*), se obtiene suprimiendo en la resultante de EULER [42-10] las $r - 1$ primeras columnas y las filas 1ª, 2ª, ..., $(r-1)$ª, $(n+1)$ª, $(n+2)$ª, ... $(n + r - 1)$ª, pues basta suponer, para pasar de [42-8] a [42-21], que es:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{r-2} = 0; \quad \alpha_{r-1} = \xi_0 \neq 0, \quad \alpha_r = \xi_1, \ \ldots, \ \alpha_{m-1} = \xi_{m-r};$$
$$\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_{r-2} = 0; \quad \beta_{r-1} = \eta_0 \neq 0, \quad \beta_r = \eta_1, \ \ldots, \ \beta_{n-1} = \eta_{n-r}.$$

Aunque la matriz así obtenida tenga característica no superior a $m + n - 2r + 1$, la de R para $r > 1$ es mayor, pues vale $m + n - r >$ $> m + n - 2r + 1$ si $r > 1$.

EJEMPLO: Los polinomios $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - 5x + 2$ y $g(x) =$ $= 2x^5 - 4x^4 - 5x^2 + 1$ tienen el m. c. d. $D = 2x^3 + 2x - 1$. Si formamos la resultante de EULER [42-10], los determinantes formados por ésta, o suprimiendo en ella la primera fila y la primera columna, o las dos primeras filas y las dos primeras columnas, son nulos, mientras que es distinto de cero el formado por las siete últimas filas y las siete últi-

mas columnas. Sin embargo, la matriz formada por las filas 3ª, 4ª, 5ª, 8ª, 9ª, 10ª y las ocho últimas columnas tiene característica

$$5 = m + n - 2r + 1 < 7 = m + n - r.$$

3. Método de eliminación de Bézout. — Dadas dos ecuaciociones del mismo grado m (suponiendo $m = 3$ para fijar mejor las ideas):

$$[42\text{-}22] \qquad \begin{cases} f(x) \equiv a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \\ g(x) \equiv b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0, \end{cases}$$

E. BÉZOUT dió en 1779 un método que da la resultante de ambas en forma de determinante de orden m (en nuestro caso, 3).

Multipliquemos sucesivamente las dos ecuaciones [42-22] por

$g_0 \equiv b_0$ y $f_0 \equiv a_0$ respectivamente,
$g_1 \equiv b_0x + b_1$ y $f_1 \equiv a_0x + a_1$,
$g_2 \equiv b_0x^2 + b_1x + b_2$ y $f_2 \equiv a_0x^2 + a_1x + a_2$,

y restemos cada vez los productos así formados. Entonces resulta:

$$[42\text{-}23] \begin{cases} f_0g - g_0f \equiv |a_0\, b_1|\, x^2 + |a_0\, b_2|x + |a_0\, b_3| = 0, \\ f_1g - g_1f \equiv |a_0\, b_2|\, x^2 + (|a_0\, b_3| + |a_1\, b_2|)\, x + |a_1\, b_3| = 0, \\ f_2g - g_2f \equiv |a_0\, b_3|\, x^2 + |a_1\, b_3|x + |a_2\, b_3| = 0, \end{cases}$$

donde $|\, a_i\, b_j \,|$ representa el determinante $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$.

El sistema [42-23] se satisface para toda solución del sistema [42-22], y por lo tanto, si existe solución común, $x = \alpha$, de [42-22], estas tres ecuaciones [42-23], consideradas como lineales en x, x^2, tienen solución α, α^2, y por lo tanto (§ 15-5) es nulo el determinante, llamado *bezoutiano*:

$$[42\text{-}24] \qquad R_b = \begin{vmatrix} |\, a_0\, b_1 \,| & |\, a_0\, b_2 \,| & |\, a_0\, b_3 \,| \\ |\, a_0\, b_2 \,| & |\, a_0\, b_3 \,| + |\, a_1\, b_2 \,| & |\, a_1\, b_3 \,| \\ |\, a_0\, b_3 \,| & |\, a_1\, b_3 \,| & |\, a_2\, b_3 \,| \end{vmatrix}.$$

El caso general para m cualquiera se trata en forma análoga.

Si las ecuaciones son de grado distinto, $m > n$, para formar el sistema [42-23] se utiliza la de menor grado multiplicada por 1, x, ..., x^{m-n-1}, dando las otras n ecuaciones de dicho sistema el mismo método anterior, previamente igualados los grados de ambas ecuaciones, multiplicando la de menor grado por x^{m-n}.

EJEMPLO: El bezoutiano del sistema:

[42-25]
$$\begin{cases} a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0, \\ b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0 \end{cases}$$

toma la forma:

[42-26]
$$R_b = \begin{vmatrix} |a_0 b_1| & |a_0 b_2| & -a_3 b_0 & -a_4 b_0 \\ |a_0 b_2| & -a_3 b_0 + |a_1 b_2| & -a_4 b_0 - a_3 b_1 & -a_4 b_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Veamos ahora que la anulación del determinante bezoutiano [42-24] es también *suficiente* para la existencia de raíces comunes de las ecuaciones [42-22], y por lo tanto es la *resultante* de dicho sistema (§ 42-1).

Multiplicando las identidades [42-23] por números cualesquiera, t_0, t_1, t_2, no todos nulos, se obtiene por adición:

[42-27]
$$F_2 g - G_2 f \equiv Q_1 x^2 + Q_2 x + Q_3,$$

siendo:

$$\begin{cases} F_2 \equiv f_0 t_0 + f_1 t_1 + f_2 t_2, \\ G_2 \equiv g_0 t_0 + g_1 t_1 + g_2 t_2, \end{cases}$$

y además:

[42-28]
$$\begin{cases} Q_1 = |a_0 b_1| t_0 + |a_0 b_2| t_1 + |a_0 b_3| t_2 \\ Q_2 = |a_0 b_2| t_0 + (|a_0 b_3| + |a_1 b_2|) t_1 + |a_1 b_3| t_2 \\ Q_3 = |a_0 b_3| t_0 + |a_1 b_3| t_1 + |a_2 b_3| t_2 \end{cases}$$

Por hipótesis es nulo el determinante [42-24], por lo cual es posible (§ 15-6, b) hallar un sistema de valores, no todos nulos, de t_0, t_1, t_2 que anulen Q_1, Q_2, Q_3 en [42-28]. Aplicados a [42-27], deducimos

$$f\, G_2 \equiv g\, F_2,$$

suficiente por el lema [42-7] para que las ecuaciones [42-22] tengan una raíz común.

La resultante bezoutiana tiene la ventaja, sobre la de EULER, de venir expresada por un determinante de orden inferior.

NOTAS: 1. Indiquemos los menores principales de $R_b = R_m$ mediante R_1, R_2, ..., R_p, ..., R_m, expresados esquemáticamente así:

[42-29] $R_b =$

es decir, R_p es el menor formado por los p primeras filas y p primeras columnas de R_b. Entonces, por un método completamente análogo al visto anteriormente, se demuestra que:

La condición necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones [42-22] *tengan precisamente* r *raíces comunes, es que sean nulos los* r *primeros menores* $R_m, R_{m-1}, \ldots, R_{m-r+1}$, *y no sea nulo el* $(r+1)$ *-ésimo menor* R_{m-r} *de la resultante bezoutiana* R_b *del sistema* [42-22].

2. Si la resultante de EULER (§ 42-2, a) del sistema [42-22] se multiplica (columnas por filas) por el determinante

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_0 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & -b_0 & -b_1 & 0 & a_0 & a_1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} = -a_0^3$$

se obtiene el determinante

$$R.K = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & |a_0\, b_1| & |a_0\, b_2| & |a_0\, b_3| \\ 0 & 0 & 0 & |a_0\, b_2| & |a_0\, b_3| + |a_1\, b_2| & |a_1\, b_3| \\ 0 & 0 & 0 & |a_0\, b_3| & |a_1\, b_3| & |a_2\, b_3| \end{vmatrix} = a_0^3 \,.\, R_b,$$

lo que prueba que tienen valores opuestos las resultantes de EULER y de BÉZOUT $(m > 1)$.

4. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Teorema general de Bézout. — a) Resolver un sistema de dos ecuaciones de grados m y n con dos incógnitas.

[42-30]
$$\begin{cases} f(x, y) \equiv a_0 x^m + a_1(y) x^{m-1} + \ldots + a_m(y) = 0, \\ g(x, y) \equiv b_0 x^n + b_1(y) x^{n-1} + \ldots + b_n(y) = 0, \end{cases}$$

donde $a_s(y)$, $b_s(y)$ indican polinomios de grado no mayor que s en y:

[42-31]
$$\begin{cases} a_0 = \alpha_0,\ a_1(y) = \alpha_1 y + \alpha_1,\ a_2(y) = \alpha_2 y^2 + \alpha'_2 y + \alpha''_2, \ldots, \\ b_0 = \beta_0,\ b_1(y) = \beta_1 y + \beta'_1,\ b_2(y) = \beta_2 y^2 + \beta'_2 y + \beta''_2, \ldots, \end{cases}$$

es hallar todos los pares de valores (x, y) que satisfacen a ambas. Cada una de estas ecuaciones [42-30] representa una curva algebraica (§ 23-8), cuyo orden se define por el grado m y n, respectivamente, de dichas ecuaciones en ambas variables. Estos pares de valores que satisfacen a las dos ecuaciones son, por lo tanto, las coordenadas de los puntos comunes a ambas curvas. Por consiguiente, *el problema de hallar la intersección de dos curvas algebraicas y el de resolver un sistema de dos ecuaciones* [42-30] *son equivalentes.* Cuando una solu-

ción (x_1, y_1) del sistema es *imaginaria*, convendremos en decir que las dos curvas tienen un *punto imaginario común*.

Para resolver el sistema comenzaremos por *separar los factores comunes que puedan tener los polinomios en* y *que constituyen los coeficientes*; porque si $\varphi(y)$ y $\Psi(y)$ son tales factores, tendremos:

[42-32] $$\begin{cases} f(x, y) \equiv \varphi(y) \,.\, f_1(x, y) = 0 \\ g(x, y) \equiv \Psi(y) \,.\, g_1(x, y) = 0, \end{cases}$$

lo que geométricamente significa que la curva f se compone parcialmente de las rectas paralelas al eje x representadas por $\varphi(y) = 0$, y la curva g de las representadas por $\Psi(y) = 0$. Recordemos que todos los divisores de $f(x, y)$ que sólo contienen la variable y, se obtienen hallando los divisores comunes a los coeficientes $a_s(y)$ (§ 17-4, b_1).

Así, pues, las soluciones comunes de [42-32] son todas las de los sistemas:

[42-33] $\begin{cases} \varphi(y) = 0 \\ \Psi(y) = 0 \end{cases}$ Si tienen raíces comunes, cada una de éstas, con valores arbitrarios de x, satisface el sistema [42-30];

[42-34] $\begin{cases} \varphi(y) = 0 \\ g_1(x, y) = 0 \end{cases}$ Cada raíz de la primera sustituída en la segunda, da tantos valores de x como indique el grado en x de $g_1(x, y)$;

[42-35] $\begin{cases} \Psi(y) = 0 \\ f_1(x, y) = 0 \end{cases}$ Cada raíz de la primera sustituída en la segunda, da tantos valores como indique el grado en x de $f_1(x, y)$;

[42-36] $\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ g_1(x, y) = 0 \end{cases}$ Falta resolver este sistema, cuyos primeros miembros carecen de factores que sólo dependen de y.

Si se efectúa la simplificación análoga, en que se separan los *factores en* x *comunes a las potencias de* y, es decir, se separan las rectas paralelas al eje y que componen las curvas f y g, resultarán dos ecuaciones cuyos primeros miembros carecen de factores comunes que sólo dependen de x y de factores que sólo dependen de y. Así, suponiendo que cada línea [42-30] se componga de varias rectas paralelas a los ejes, más otra curva, hallamos separadamente: las rectas comunes que puede haber en las primeras y en las segundas; las intersecciones de las rectas primeras con las segundas; de las rectas primeras con la curva segunda; de las rectas segundas con la curva primera; de la curva primera con la segunda.

Como los cuatro primeros problemas se han resuelto anteriormente, basta abordar ahora la resolución del sistema [42-30] en la hipótesis de que $f(x, y)$, $g(x, y)$ carecen de factores que sólo dependen de x o de y.

Esto supuesto, deberíamos investigar *si* f(x, y), g(x, y) *tienen algún factor común* V(x, y); es decir, hallaríamos su m.c.d. (§ 17-4, *e*); en tal caso, las infinitas soluciones de la ecuación

[42-37] $$V(x, y) = 0,$$

satisfarían el sistema [42-30], y *las dos curvas* f *y* g *tendrían común la curva representada por la ecuación* [42-37]. Pero como la formación del m.c.d, en el caso de dos variables, es penosa, no la intentaremos sino en el caso en que los cálculos posteriores nos indiquen su existencia.

Formemos la resultante R de las dos ecuaciones [42-30], considerando como variable única la x, y como entonces los elementos que componen la resultante (§ 42-2 y 3) son los polinomios [42-31], también R será un polinomio en y, que designaremos por R(y); entonces la ecuación

[42-38] $$R(y) = 0$$

se llama la *eliminante* o *ecuación final* del sistema [42-30]. Para (x_1, y_1), solución de [42-30], si damos a y el valor y_1, las dos ecuaciones en x que resultan en [42-30] tienen la solución común x_1, lo que quiere decir que y_1 es raíz de la eliminante [42-38]; recíprocamente, para cada una de las raíces y_j de [42-38], el sistema [42-30] resulta compatible en x, y admite por lo menos una solución común, x_j, la cual, junto con y_j, constituye una solución (x_j, y_j) del sistema [42-30]. Por lo tanto, la resolución completa del sistema [42-30] se reduce a:

1º *Eliminar* una incógnita x, formando la eliminante [42-38] en y;

2º *Resolver* esta ecuación eliminante [42-38];

3º *Sustituir* cada raíz y_j de [42-38] en el sistema [42-30], y hallar las raíces x *comunes* a ambas.

b) Supuestos α_0 y β_0 no simultáneamente nulos, si al formar la eliminante R(y) por los métodos de los §§ 42-2 y 42-3 resulta *idénticamente nula* en y, aplicaremos el método del m. c. d. (§ 42-1), y al llegar a un divisor de primer grado en x, o antes, la división será exacta, y *los dos polinomios* [42-30] *tendrán un* m. c. d. que depende por lo menos de x, es decir, las dos curvas f y g tendrán una curva parcial común. Si $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, ambas curvas tienen común el punto impropio del eje x y la eliminante R(y) es idénticamente nula, aunque las dos curvas carezcan de una curva parcial común.

EJEMPLO 1. Las hipérbolas $xy = 1$, $xy + x = 2$, escritas en la forma

$$0 \cdot x^2 + (y + 0)x + (0 \cdot y^2 + 0 \cdot y - 1) = 0 \quad ,$$
$$0 \cdot x^2 + (y + 1)x + (0 \cdot y^2 + 0 \cdot y - 2) = 0 \quad ,$$

tienen R(y) idénticamente nula, aunque tengan sólo como puntos comunes el $(1; 1)$, el impropio del eje x y el impropio (doble) del eje y.

Excluído este caso, veamos cuál es el grado de R(y). Sustituyendo en la resultante de EULER (§ 42-2, *a*) cada polinomio [42-31] por su primer término, resulta:

$$[42\text{-}39] \qquad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 y & \alpha_2 y^2 & \ldots & \alpha_m y^m & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 y & \ldots & \alpha_{m-1} y^{m-1} & \alpha_m y^m & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_0 & \beta_1 y & \beta_2 y^2 & \ldots & \beta_n y^n & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 y & \ldots & \beta_{n-1} y^{n-1} & \beta_n y^n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \begin{matrix} n \text{ filas} \\ \\ m \text{ filas} \end{matrix}.$$

El grado del producto de los elementos que en las n primeras filas ocupan los lugares $i_1, i_2, \ldots, i_n$ es:

$$[42\text{-}40] \qquad (i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \ldots + (i_n - n) = \sum_{s=1}^{n} i_s - \frac{n(n+1)}{2}.$$

El grado del producto de los elementos que en las últimas filas ocupan los lugares $i_{n+1}, i_{n+2}, i_{n+m}$ es:

$$[42\text{-}41] \qquad (i_{n+1} - 1) + (i_{n+2} - 2) + \ldots + (i_{n+m} - m) = \sum_{s=n+1}^{n+m} i_s - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Como por haber elegido un elemento de cada columna es:

$$\sum_{s=1}^{n} i_s + \sum_{s=n+1}^{n+m} i_s = 1 + 2 + \ldots + (n+m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$$

sumando [42-40] y [42-41], resulta como grado de un término cualquiera del determinante [42-39]

$$[42\text{-}42] \qquad \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = mn,$$

mientras que son inferiores los grados de todos los demás términos de la resultante $R(y)$. Sacando factor común y^{mn} en todos los términos de [42-39], obtendremos sencillamente su coeficiente R_0 haciendo $y = 1$ en [42-39]:

$$[42\text{-}43] \qquad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{m-1} & \alpha_m & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-1} & \beta_n & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = R_0,$$

que es precisamente la resultante de las ecuaciones

$$[42\text{-}44] \qquad \begin{cases} \alpha(t) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_m t^m = 0, \\ \beta(t) \equiv \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_n t^n = 0, \end{cases}$$

formadas tomando en $f(x, y)$ y $g(x, y)$ los *términos de grado máximo* en x, y, y llamando $t = \dfrac{y}{x}$; las ecuaciones [42-44] nos dan, respectivamente, las *direcciones asintóticas* t de cada una de las curvas [42-30], es decir, sus *puntos impropios* (§ 37-6, *b*). Por lo tanto, *si los polinomios* [42-44] *no tienen raíz común, es decir, si las curvas* [42-30] *no tienen ningún punto impropio común, con lo cual* $R_0 \neq 0$, *la ecuación final* $R(y) = 0$ *es de grado* mn *y el coeficiente de* y^{mn} *es precisamente* R_0.

Recordemos (§ 32-5) que la derivada de un determinante cuyos elementos son funciones de y, se expresa como la suma de las derivadas de estos elementos multiplicadas por primeros menores del determinante; por lo tanto, la derivada segunda es una suma de segundos menores multiplicados por ciertos factores, etc. Toda raíz y_i de [42-38] sustituída en [42-30], hará que aquellas ecuaciones tengan por lo menos una raíz común en x; pero si tienen r raíces comunes en x, por lo dicho en § 42-2, *d*, hará que la resultante euleriana [42-38] tenga característica $m+n-r$, es decir, no sólo anulará $R(y)$, sino también todos sus primeros, segundos, ..., $(r-1)$ -ésimos menores. Así, dicha raíz y_i anulará, además de $R(y)$, sus derivadas $R'(y)$, $R''(y)$, ..., $R^{(r-1)}(y)$; esto es: será raíz múltiple de la ecuación final [42-38], *por lo menos* de orden r (§ 41-2, *a*).

De ahí obtenemos el llamado teorema restringido de BÉZOUT:

Dos curvas planas algebraicas de órdenes m, n, tienen infinitos puntos comunes solamente cuando tienen una curva parcial común de orden inferior. En caso contrario, el número de puntos comunes es finito y a lo sumo $m\,n$.

c) Vemos también que si $R_0 \neq 0$, y [42-38] no tiene raíces múltiples, el número de puntos comunes de las curvas [42-30] es precisamente $m\,n$. Para generalizar este resultado bastará apelar al fecundo *principio de continuidad de* PONCELET, cuyo uso se justifica en virtud de la continuidad de las raíces de una ecuación algebraica, como funciones de los coeficientes (§ 41-2, *d*). Si los q primeros coeficientes de $R(y)$ son nulos, quiere decir que el sistema [42-44] tiene q soluciones comunes; bastará modificar levemente uno de los coeficientes que allí figuran, v. gr., el α_m, para que eso no ocurra, y entonces la curva f_ε correspondiente a $\alpha_m+\varepsilon$ tendrá con la g una resultante [42-38] de grado $m\,n$; al tender ε a 0 y anularse los q primeros coeficientes de [42-38], querrá decir que q de los puntos comunes a las curvas f_ε y g *se van al infinito* (§ 18-2).

Si $R(y)$ tiene una raíz múltiple de orden r, y ésta da origen a menos de r puntos comunes a las curvas [42-30], ello querrá decir que algunos de los puntos comunes a ambas curvas es múltiple para alguna de ellas (o para las dos), ya que, como anteriormente, por una modificación de los coeficientes, la $R(y)$ no tendrá raíces múltiples y los puntos comunes coincidentes se habrán desdoblado (fig. 131).

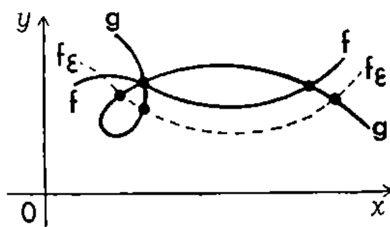


Fig. 131.

Así, por ejemplo, supongamos que a y_1, raíz múltiple de orden r de [42-38], sustituído en el sistema [42-30], produzca menor número de raíces comunes; entonces corresponderían al valor y_1 menos de r puntos M, N, P, ..., T, de intersección de las dos curvas.

Pero si modificamos convenientemente los coeficientes α_i y β_i de ambas ecuaciones, la nueva resultante tiene r raíces *distintas*. Tal sucede, desde luego, si se adoptan como coeficientes α'_i, β'_i los que resultan de sustituir la primera curva por m rectas distintas, y la segunda por otras n rectas tales que las de un grupo no pasen por los puntos de intersección de las otras; pero, ¿se conseguirá lo mismo tomando coeficientes α'_i y β'_i que difieran de sus correspondientes tan poco como se quiera? Bastará probar para ello que existen valores α'_i, β'_i que difieren de α_i, β_i menos de ε, y tales que ninguna raíz de la ecuación $R(y)=0$

satisfaga la $R'(y)=0$; o sea tales que la resultante de ambas, que es función entera de α'_i, β'_i no se anula. En efecto, si no existieran tales valores α'_i, β'_i en los entornos de radio δ, es decir, si la resultante citada no anulase para todos los valores α'_i, β'_i de tales entornos, como es función entera sería idénticamente nula *, y para ningún sistema de coeficientes serían distintas las r raíces, contra lo antes visto.

En virtud de la continuidad de las raíces como funciones de los coeficientes (§ 41-2, d), resulta, pues, que la resultante de las ecuaciones modificadas tienen r raíces próximas a y_1 que tienden a y_1 cuando $\varepsilon \to 0$, y a cada una corresponde un solo punto de intersección, real o imaginario, de las nuevas curvas f_ε y g_ε ; como sus abscisas deben tender hacia las abscisas de M, N, P, ..., T para $\varepsilon \to 0$, habrá cierto número $\mu > 1$ de puntos que convergen hacia M, otros ν hacia N, ..., y τ hacia T, siendo

$$\mu + \nu + \ldots + \tau = r.$$

Parece natural, pues, por continuidad y para dar mayor sencillez al enunciado, contar M como equivalente a μ puntos de intersección, N contarlo ν veces, etc. Con este convenio, el número de puntos de ordenada y_1 comunes a las curvas f y g es precisamente r.

Con estas aclaraciones, podemos enunciar el *importantísimo teorema general de* BÉZOUT:

Dos curvas planas algebraicas de órdenes m, n, que no tienen ninguna curva parcial común, se cortan en $m\,n$ puntos propios o impropios, reales o imaginarios, distintos o coincidentes.

Cada una de las locuciones empleadas no representa solamente un modo de hablar o convención arbitraria, sino que responde a un hecho matemático concreto: así, puntos impropios comunes significa direcciones asintóticas comunes; puntos comunes coincidentes significa que son múltiples para una o ambas curvas, o que hay contacto, etc.

EJEMPLO 2. Sean las curvas

$$x^3(2y^2+y)+x^2(2y^3-6y^2-y)+x(y^4-2y^3+4y^2-4y)+(-y^4+4y)=0$$
$$2x^4y+x^3(2y^2-5y)+x^2(y^3+4y)+x(2y^2-5y)+(y^3+2y)=0$$

Separemos el factor y; ordenando según las potencias de y, podemos separar el factor $x-1$ en todos los coeficientes de una, y el x^2+1 en la otra, y obtenemos el sistema:

$$y(x-1)\,f(x,y)=0, \qquad y(x^2+1)\,g(x,y)=0,$$

siendo:

$$f(x,y) = x^2(2y+1) + x(2y^2-4y) + (y^3-4)$$
$$g(x,y) = 2x^2 + x(2y-5) + (y^2+2)$$

---

* Esto es consecuencia del teorema siguiente, que generaliza el dado en § 16-2, a. *Si una función entera de cualquier número de variables se anula al variar éstas en intervalos respectivos, es idénticamente nula.*

He aquí la demostración: Si es

$$P(x,y) = \varphi_0(x)y^n + \varphi_1(x)y^{n-1} + \cdots + \varphi_n(x) = 0$$

para $a < x < a'$, $b < y < b'$, como para cada x del primer intervalo se anula el polinomio para infinitos valores de y, son nulos los coeficientes, y como son polinomios en x que se anulan para infinitos valores, sus coeficientes numéricos son nulos. Por lo tanto, $P(x,y) \equiv 0$.

Por inducción se pasa a cualquier número de variables.

luego, el sistema se descompone en los siguientes:

$$\begin{cases} y=0 \\ x=\text{cualquiera} \end{cases} \begin{cases} x-1=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \begin{cases} x^2+1=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases} \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

La solución de los primeros es inmediata, y basta fijarnos en el último. El bezoutiano es:

$$\begin{vmatrix} (2y+1)(2y-5)-2(2y^4-4y) & (2y+1)(y^2+2)-2(y^3-4) \\ (2y+1)(y^2+2)-2(y^3-4) & (2y^3-4y)(y^2+2)-(2y-5)(y^3-4) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & y^2+4y+10 \\ y^2+4y+10 & y^3+4y^2-20 \end{vmatrix} = -y^4-13y^3-56y^2-80y=0$$

cuyas raíces son:

∞,	0,	-4,	-5.
(doble)	(simple)	(doble)	(simple)

Para	$y=0$	resulta	$x=2$	(simple)
„	$y=-4$	„	$x=2$	(simple)
„	$y=-5$	„	$x=3$	(simple)

Intersecciones: Dos puntos del infinito, y además

(2,0),	(2, —4),	(3, —5).
simple	doble	simple

5. **Método de Kronecker.** — Un método sencillo y sistemático para eliminar gradualmente las incógnitas en un sistema de ecuaciones, sin introducir soluciones extrañas, es el siguiente, debido a L. KRONECKER (1882).

Sea el sistema de ecuaciones algebraicas,

[42-45] $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0, \ldots,$
$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$

y $D = \text{m. c. d.}\ (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Si los polinomios f_i no son primos entre sí, la ecuación $D = 0$ nos da (§ 17-4, e), por lo pronto, un conjunto de ∞^{r-1} soluciones comunes a las n ecuaciones del sistema. Suprimido este factor D en todas las f_i, se obtiene este sistema:

[42-46] $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0, \quad \varphi_2(x_1,x_2, \ldots, x_r) = 0, \ldots,$
$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0,$

en las que φ_i son primas entre sí (§ 17-4, a_2); si además son independientes de x_1, toda solución del sistema [42-46] es solución del [42-45], y éste será equivalente al [42-46] asociado con la ecuación $D = 0$.

Supongamos ahora que por lo menos una de las φ_i contenga efectivamente la x_1; y formemos las dos combinaciones lineales siguientes:

[42-47] $X=a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\ldots+a_n\varphi_n, \quad Y=b_1\varphi_1+b_2\varphi_2+\ldots+b_n\varphi_n,$

siendo las a_j, b_j coeficientes indeterminados. Los dos polinomios X, Y contienen efectivamente la x_1, y como polinomios en x_i, a_j; x_i, b_j son primos entre si.

En efecto, todo divisor común d no contendrá las a_j, pues Y carece de ellas, ni las b_j, por carecer de éstas X; luego, sería un divisor de X, Y, que dependería sólo de las x_i y cualesquiera que fuesen los valores que pudieran tomar las a_j, b_j. Pero esto es imposible, porque dando a las a_j valores nulos, excepto para una cualquiera de ellas, a_k, el divisor d dividirá a la φ_k, y como ésta es una cualquiera, dividiría a todas las φ_i, y éstas no serían primas entre sí.

Establecido esto, determinemos la resultante R de $X = Y = 0$ respecto a x_1; y entonces tenemos que toda solución $\{x'_i\}$ del sistema [42-46] es solución del sistema $X = Y = 0$, y $(x'_2, x'_3, \ldots, x'_r)$, que forma parte de esta solución, anula la R; y recíprocamente toda solución $(x'_2, x'_3, \ldots, x'_r)$ de $R = 0$, cualesquiera que sean las a_i y b_i formará parte de una solución de $X = Y = 0$.

En efecto, hará que X, Y, tengan un divisor común Δ, que será un polinomio en x_1 con coeficientes racionales en $x'_2, x'_3, \ldots, x'_r$. Pero razonando como anteriormente, Δ debe ser independiente de las a_i, b_i; luego, Δ depende solamente de las $x_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_r$ y la ecuación $\Delta = 0$ nos da uno o varios valores de x_1 que, asociados al sistema $x'_2, x'_3, \ldots, x'_r$ constituyen una solución del sistema $X = Y = 0$.

Se observa que R, como polinomio en las a_i, b_i, debe ser idénticamente nulo por lo expuesto; luego, los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_h$ $(h \geqq 1)$, que son polinomios en las $x_2, x_3, \ldots, x_r$, deben ser nulos; y esta solución $(x'_2, x'_3, \ldots, x'_r)$ es solución del sistema:

[42-48] $$c_1(x_2, x_3, \ldots, x_r) = 0, \quad c_2(x_2, x_3, \ldots, x_r) = 0, \quad \ldots, c_h(x_2, x_3, \ldots, x_r) = 0.$$

Luego, todos los sistemas de valores que anulan idénticamente al polinomio R, considerado como de las a_i, b_i, son las soluciones del sistema [42-48], y recíprocamente.

De aquí que la solución del sistema [42-45] venga reducida a la del sistema [42-48].

Si en las ecuaciones del sistema [42-46] no aparecen las incógnitas, sino que son constantes, no podrían ser nulas todas ellas, pues el polinomio R se anularía idénticamente, y los polinomios X e Y no serían primos entre sí para valores cualesquiera de $x_2, x_3, \ldots, x_r$; y en el caso que alguna de las c_i fuese una constante no nula, el sistema [42-48], y por lo tanto el [42-46], sería incompatible, y las ecuaciones [42-45] serían incompatibles entre sí, si se prescinde de las soluciones de $D = 0$.

En caso contrario se aplica al sistema [42-48] el mismo procedimiento por el cual se pasó del sistema [42-45] al [42-48], obteniéndose un sistema de ecuaciones de $r - 2$ incógnitas, que o será incompatible, siéndolo el [42-45], o podrá reducirse por el mismo método a otro de $r - 3$ incógnitas; con todo, siempre tendrá las soluciones que proceden de igualar a cero el m.c.d. de los primeros miembros del sistema [42-48], y de los sucesi-

vos sistemas que se vayan obteniendo, hasta llegar a una ecuación con una sola incógnita.

De aquí se desprende que *la determinación de las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas se reduce a la determinación de las raíces de una ecuación que sólo contiene una cualquiera de las incógnitas, operando siempre con un algoritmo racional, y siendo este mismo proceso operativo el que permite saber si el sistema es o no compatible.*

NOTA: Obsérvese que aplicado el método de KRONECKER al caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, queda como eliminante la obtenida anteriormente (§ 42-4). Aplicado al ejemplo 2 del § 42-4 la eliminante, ya de EULER, ya de BÉZOUT, queda multiplicada por $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$, siendo a_1, a_2, b_1, b_2 los coeficientes de las combinaciones lineales [42-47].

EJERCICIOS

1. Hallar la resultante del sistema

$$\begin{cases} 2x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0, \\ 2x^3 + x - 3 = 0, \end{cases}$$

por los métodos del m. c. d., EULER y BÉZOUT.

2. Hallar las raíces comunes de las ecuaciones:

$$\begin{cases} 8x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 3x + 9 = 0. \\ 4x^3 + 5x + 3 = 0. \end{cases}$$

3. Averiguar si tiene raíces múltiples

$$2x^6 - 9x^4 + 20x^3 - 24x + 28 = 0.$$

4. Resolver el sistema:

$$x^2 + 2(y-1)x - 8 = 0; \quad x^2 + xy - 8 = 0.$$

5. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$x + yz = 23; \quad y + xz = 19; \quad z + xy = 17.$$

6. Averiguar si el sistema anterior puede resolverse mediante ecuaciones de segundo grado con una incógnita de coeficientes racionales.

NOTAS AL CAPÍTULO X

I. Coeficientes diferenciales o derivadas generalizadas de Peano. — *a*) Si se repasan las demostraciones dadas en el § 39, se observa que todas se basan en la expresión de la función como suma de un polinomio y un término complementario que es infinitésimo respecto del último término considerado. Es decir (§ 39-3, *a*), poniendo $\Delta y = f(x) - f(a)$ $h = x - a$:

$$\text{[X-1]} \qquad \Delta y = y^{(1)} h + y^{(2)} \frac{h^2}{2!} + \dots + y^{(n)} \frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

Como las demostraciones se apoyan exclusivamente en esta expresión, son válidas para todas las funciones cuyo incremento en el punto a admite tal descomposición, con coeficientes cualesquiera, aunque éstos no sean derivadas.

DEF.: Se dice que la función $y = f(x)$ admite n *coeficientes diferenciales* (en abreviatura: c. d.) $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ en el punto a * si el incremento $\Delta y = f(x) - f(a)$ puede expresarse en la forma [X-1].

Esta descomposición es única, porque si admite otra de coeficientes $y_1, y_2, \ldots y_n$, será idénticamente:

$$(y_1 - y^{(1)})h + (y_2 - y^{(2)})\frac{h^2}{2!} + \ldots + (y_n - y^{(n)})\frac{h_n}{n!} + o(h^n) = 0,$$

de donde, dividiendo por h y haciendo después $h \to 0$, resulta $y_1 = y^{(1)}$; dividiendo nuevamente por h y haciendo $h \to 0$, resulta $y_2 = y^{(2)}$; etc.

Evidentemente, es para $h \to 0$

$$\frac{\Delta y}{h} \to y^{(1)}; \quad \text{luego,} \quad y^{(1)} = f'(a).$$

El primer coeficiente en a es, pues, la derivada primera en a; pero cabe que no exista derivada primera en ningún otro punto (ni por lo tanto de órdenes sucesivos), y sin embargo, admita $f(x)$ varios coeficientes diferenciales y aun infinitos, en el punto a.

EJEMPLOS: 1. Sea $\varphi(x)$ cualquier función continua no derivable para ningún x, y cuyo valor en el origen sea, por ej., $\varphi(0) = 1$.

La función $y = x^2\varphi(x)$ tiene derivada $y' = 0$ en el punto $x = 0$, pero no es derivable en ningún otro. Sin embargo, como es

$$y = x^2(1 + \delta) = 2\frac{x^2}{2!} + o(x^2),$$

admite los c. d. $y^{(1)} = 0$, $y^{(2)} = 2$.

Análogamente, $x^n\varphi(x)$ admite c. d. nulos, hasta llegar al $y^{(n)} = n!$.

2. La función $y = x^3 \operatorname{sen} 1/x$ tiene en el origen $y^{(1)} = 0$, $y^{(2)} = 0$, pero no admite y'' en el mismo, pues $y' = 3x^2 \operatorname{sen} 1/x - x \cos 1/x$, y su cociente por x es oscilante.

3. La función $e^{-1/x^2}\varphi(x) = o(x^n)$ para todo n, admite infinitos c. d. todos nulos. Sin embargo, no es derivable en ningún punto, excepto $x = 0$, donde es $y' = 0$.

b) *Convexidad, concavidad, inflexión.* — Puesto que las reglas demostradas para el estudio de la concavidad, convexidad, inflexión y osculación se basan en la expresión polinómica [1], son aplicables aunque no existan derivadas, si $f(x)$ tiene coeficientes diferenciales $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ en el punto a.

EJEMPLOS: 4. La función $x^2\varphi(x)$ ya citada tiene en el origen $y^{(1)} = 0$, $y^{(2)} = 2$; luego, hay *concavidad* en él, y el círculo osculador tiene radio

$$\rho = \frac{1}{y^{(2)}} = \frac{1}{2};$$

lo mismo que la parábola $y = x^2$ osculatriz en dicho punto.

5. La función $x^3\varphi(x)$ presenta inflexión en el origen, pues tiene $y^{(2)} = 0$, $y^{(3)} = 6 \neq 0$.

6. La función $x^3 \operatorname{sen} 1/x$ no presenta en 0 concavidad, convexidad ni inflexión.

c) Suele definirse a veces la circunferencia osculatriz de una curva en un punto (x_0, y_0), como límite de las circunferencias determinadas por este punto con otros dos de la curva que tienden a confundirse con él; entendiendo que *tender* una curva a otra significa que los coeficientes de la curva variable tienden hacia los respectivos coeficientes de la curva fija (§ 41-2, *d*).

---

* Indicaremos la derivada n-ésima con $f^{(n)}(x)$ cuando haya peligro de confundirla con un c.d.

Este concepto coincide con el definido mediante la condición de contacto de orden > 1, pues con él, mediante los c. d. $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$, se llega a las mismas fórmulas [40-16] y [40-17] obtenidas mediante las derivadas (ver J. REY PASTOR, *Elementos de la Teoría de funciones*, citado en Cap. VI, nota VI, 2).

d) Los c. d. pueden definirse progresivamente como límites de cocientes para $h \to 0$ de este modo:

$$y^{(1)} = \lim \Delta y : h$$

$$y^{(2)} = \lim \left[\Delta y - y^{(1)} h\right] : \frac{h^2}{2!}$$

. . . .

$$y^{(n)} = \lim \left[\Delta y - y^{(1)} h - \ldots - y^{(n-1)} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\right] : \frac{h^n}{n!}$$

EJEMPLO 7. La función $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$, en el punto $x = 0$ tiene $y^{(1)} = 0$, pero no tiene c. d. sucesivos. Cabe decir, en virtud de las fórmulas anteriores, que es $y^{(2)} = \infty$, pero no existen los siguientes.

II. **Derivadas sucesivas de una función de función.** — *a*) *Método general.* El cálculo de las derivadas sucesivas de $F(x)$ equivale a la obtención de los coeficientes de h, h^2, ... en el desarrollo de $F(x+h)$ según las potencias de h, pues tales coeficientes son $F^{(n)}(x)/n!$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Como la expresión general de estas derivadas de las funciones elementales es conocida, interesa un método que permita estudiarlas en las funciones de función $f(u)$, donde $u = u(x)$. Este método tiene alcance mucho más amplio, pues vale aunque estas funciones no admitan derivadas sucesivas, pero sí coeficientes diferenciales (nota I).

Sea, pues,

$$\text{[X-2]} \qquad f(u+k) = f(u) + \frac{f'(u)k}{1!} + \frac{f''(u)k^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(u)k^n}{n!} + o(k^n),$$

donde sustituímos

$$k = u(x+h) - u(x) = a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n + o(h^n)$$

para obtener el desarrollo de $f[u(x+h)] = f[u(x) + k]$ según las potencias de h.

Los coeficientes de las potencias h, h^2 ... en el desarrollo [X-2] son:

coef. de h : $\qquad f' . a_1$

coef. de h^2: $\qquad f' . a_2 + \frac{f''}{2!} a_1^2$

coef. de h^3: $\qquad f' . a_3 + \frac{f''}{2!} 2 a_1 a_2 + \frac{f'''}{3!} a_1^3.$

La expresión general se obtiene aplicando la fórmula de LEIBNIZ (§ 12-2), que da el término general de la potencia de un polinomio, como polinomio P_r de los coeficientes $a_1, a_2, \ldots$, y el coeficiente de h^n viene dado por la expresión lineal:

$$\text{[X-3]} \qquad \frac{F^{(n)}(x)}{n!} = f'(u) P_1 + \frac{f''(u)}{2!} P_2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(u)}{n!} P_n;$$

pero si bien es fácil dar la expresión general de tales polinomios mediante la fórmula de LEIBNIZ, la fórmula a que así se llega, dada por FAÁ DI BRUNO, carece de valor práctico si no se logra por otros medios el cálculo de los coeficientes P_r.

Sin embargo, O. SCHLÖMILCH (1858) y E. CESÀRO (1885) han obser-

vado que en general puede expresarse P_r (dependiente también de n) como la suma de todos los productos de r factores $a_i, a_j, \dots, a_l$, donde los r números naturales $i, j, \dots, l$ se obtienen mediante las $\binom{n-1}{r-1}$ descomposiciones posibles de $n = i + j + \dots + l$ en r sumandos naturales. Así, para $n = 4$ y $r = 2$, es $n = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2$, dando $P_2 = a_1 a_3 + a_3 a_1 + a_2 a_2 = 2 a_1 a_3 + a_2^2$, a lo que también se llega mediante la mencionada aplicación de la fórmula de LEIBNIZ.

b) Veamos cómo se obtiene esto en los casos más importantes.

b₁) *Funciones* $F(x) = f(e^x)$. — Siendo

$$u = e^x, \quad k = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1),$$

en vez de desarrollar y después elevar el polinomio a las potencias sucesivas conviene proceder a la inversa, y elevar primero a la potencia $r = 1, 2, 3 \dots$

$$k^r = e^{rx}\left[e^{rh} - \binom{r}{1} e^{(r-1)h} + \dots + (-1)^r\right],$$

y calculando el coeficiente de h^n en k^r, que es $P_r = \frac{1}{n!} e^{rx} A_r$, siendo A_r el número

$$A_r = r^n - \binom{r}{1}(r-1)^n + \binom{r}{2}(r-2)^n - \dots;$$

es decir:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 2^n - 2 \quad A_3 = 3^n - 3.2^n + 3, \dots$$

Por lo tanto,

$$D^n f(e^x) = \sum_{r=1}^{n} A_r e^{rx} \frac{f^{(r)}(u)}{r!}.$$

EJEMPLO: $F(x) = e^{e^x}$, es decir, $f(u) = e^u$.

$$D^n e^{e^x} = e^{e^x}\left[\frac{A_1}{1!} e^x + \frac{A_2}{2!} e^{2x} + \dots + \frac{A_n}{n!} e^{nx}\right].$$

b₂) *Función* $F(x) = e^{ax^2}$ *y polinomios de* HERMITE. — En este caso es

$$f(u) = e^u, \quad u = a x^2, \quad k = a(x+h)^2 - a x^2 = a h (2x + h);$$

el coeficiente de h^n en $k^r = a^r h^r (2x + h)^r$ es:

$$P_r = a^r \binom{r}{n-r} (2x)^{2r-n},$$

y como las derivadas sucesivas de e^u son e^u, resulta:

$$D^n e^{ax^2} = n!\, e^{ax^2} \sum_{r \geqslant n/2}^{n} \frac{a^r}{r!} \binom{r}{n-r} (2x)^{2r-n}.$$

En particular, si es $a = 1$, los polinomios que multiplican a e^{x^2} son:

$H_1 = -2x$
$H_2 = 4x^2 - 2$
$H_3 = -8x^3 + 12x$
. . . .
$H_n = (-1)^n[(2x)^n - n(n-1)(2x)^{n-2} + \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3)(2x)^{n-4} - \dots]$,

se llaman *polinomios de* HERMITE, y sus aplicaciones son muy importantes.

Más general, resulta:

$$D^n f(x^2) = (2x)^n f^{(n)}(u) + 2\binom{n}{2}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(u) +$$

$$+ 3.4\binom{n}{4}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(u) + \ldots$$

b_3) *Funciones* $F(x) = f(\ln x)$. — Un método para calcular los coeficientes $P_1, P_2, \ldots$ del desarrollo [X-3], que sólo dependen de la función $u(x)$ y no de la $f(u)$, consiste en elegir una función sencilla $f(u)$ para la cual se considera el desarrollo [X-3].

He aquí un ejemplo importante: sea

$$F(x) = f(\ln x)$$

y elijamos la función $f(u) = e^{au}$, siendo por lo tanto $f(\ln x) = e^{a \ln x} = x^a$ cuya derivada es

$$D^n x^a = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}.$$

Por otra parte, siendo las derivadas $f(u)$ iguales a la misma función $e^{au} = x^a$ por las potencias sucesivas de a, el desarrollo [X-3] es:

$$D^n f(\ln x) = x^a\left[\frac{a}{1!}P_1 + \frac{a^2}{2!}P_2 + \ldots + \frac{a^n}{n!}P_n\right];$$

luego, los coeficientes son los que resultan al multiplicar $a(a-1)\ldots(a-n+1)$ divididos por x^n, y basta poner en el polinomio entre paréntesis Du en vez de a, D^2u en vez de a^2, ..., o lo que es lo mismo, multiplicar simbólicamente

$$x^{-n}D(D-1)\ \ldots\ (D-n+1)f(u),$$

y resulta $D^n f(\ln x)$.

EJEMPLO:

$$D^3(\ln x)^2 = x^{-3}D(D-1)(D-2)u^2 = x^{-3}(D^3-3D^2+2D)u^2 = x^{-3}(-6+4u),$$

y en definitiva,

$$D^3(\ln x)^2 = x^{-3}(4\ln x - 6);$$

otros ejemplos pueden verse en la obra de VALLÉE POUSSIN (citada en Cap. VI, nota VI. 4).

III. **Funciones simétricas de las raíces: discriminante.** — a) Las funciones fundamentales dadas en [18-9] expresan los coeficientes de una ecuación como funciones de las raíces, funciones que tienen la propiedad de no cambiar de valor al permutar arbitrariamente las raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$, por lo cual se llaman *simétricas*.

DEF.: *Una función* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de* n *variables se llama simétrica cuando no varía al efectuar una sustitución cualquiera* (§ 11-5) *entre las* n *variables.*

Como cada sustitución es un producto de trasposiciones (§ 11-6, d), para asegurar que una función es simétrica es suficiente probar que no varía al permutar entre sí cada dos de sus variables.

Toda función racional de los coeficientes de una ecuación es función racional simétrica de las raíces de la ecuación, en virtud de las fórmulas [18-9], y recíprocamente, veremos (g_3) que *toda función racional simétrica de las raíces de una ecuación se puede expresar en función racional de los coeficientes.*

EJEMPLO 1: Dada una ecuación de 2º grado,

[X-4] $$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0,$$

la función $(x_1 - x_2)^2$ es simétrica, y por lo tanto, podrá expresarse racionalmente mediante los coeficientes, como es fácil ver en este caso:

[X-5] $(x_1-x_2)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-4\frac{a_2}{a_0}=$

$$=\frac{a_1^2-4a_0a_2}{a_0^2}.$$

El numerador del último miembro es lo que llamaremos (d) *discriminante* de la ecuación de segundo grado [X-4], y he aquí por qué la anulación del discriminante da la condición necesaria y suficiente para la igualdad de las raíces de [X-4].

b) Las funciones simétricas más sencillas de las raíces de una ecuación $f(x)=0$ son las *sumas simples*:

[X-6] $S_p = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p, \quad (p=0, 1, 2, 3, \dots).$

Recordando la fórmula [41-10]:

[X-7] $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \dots + \frac{1}{x-x_n},$$

y desarrollando cada una de estas funciones en serie geométrica (§ 22-1, *b*), resulta:

[X-8] $$\begin{cases} \dfrac{1}{x-x_1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x_1}{x^2} + \dfrac{x_1^2}{x^3} + \dfrac{x_1^3}{x^4} + \dots & \text{si} \left|\dfrac{x_1}{x}\right| < 1 \\ \dfrac{1}{x-x_2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x_2}{x^2} + \dfrac{x_2^2}{x^3} + \dfrac{x_2^3}{x^4} + \dots & \text{si} \left|\dfrac{x_2}{x}\right| < 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dfrac{1}{x-x_n} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x_n}{x^2} + \dfrac{x_n^2}{x^3} + \dfrac{x_n^3}{x^4} + \dots & \text{si} \left|\dfrac{x_n}{x}\right| < 1. \end{cases}$$

Al sumar por columnas obtendremos la igualdad fundamental:

[X-9] $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{S_0}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \dots,$$

válida para todo valor de x superior, en valor absoluto, a todas las raíces. La igualdad [X-9] y la unicidad del desarrollo en serie de potencias (§ 44-1, *b*) justifican la *regla de* GIRARD (1629):

Las sumas simples $S_0, S_1, S_2, \dots$ *de las raíces de una ecuación* $f(x)=0$, *son los coeficientes de las potencias sucesivas* $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots$, *que resultan al dividir* $f'(x)$ *por* $f(x)$, *ordenados según las potencias decrecientes de* x.

EJEMPLO 2: Sea la ecuación:

[X-10] $$x^3 + px + q = 0.$$

y efectuemos la división:

$(3x^2+p):(x^3+px+q) = 3x^{-1} - 2px^{-3} - 3qx^{-4} + 2p^2x^{-5} + 5pqx^{-6} + \dots$

Según la regla de GIRARD resultan los valores:

$S_0 = 3;\quad S_1 = 0;\quad S_2 = -2p;\quad S_3 = -3q;\quad S_4 = 2p^2;\quad S_5 = 5pq;\ \dots$

c) De [X-9] deducimos:

$$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \dots + a_{n-1} =$$

$$= (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n)\left(\frac{S_0}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \dots\right)$$

y por lo tanto, igualando coeficientes en $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x, x^0, x^{-1}, x^{-2}, \dots$

$$\begin{cases} (n-1)a_1 = a_0 S_1 + a_1 S_0 \\ (n-2)a_2 = a_0 S_2 + a_1 S_1 + a_2 S_0 \\ (n-3)a_3 = a_0 S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + a_3 S_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} = a_0 S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + \ldots + a_{n-1} S_0 \\ \quad 0 = a_0 S_n + a_1 S_{n-1} + \ldots + a_{n-1} S_1 + a_n S_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

y simplificando se obtienen las llamadas *relaciones de* NEWTON (es $n = S_0$):

$$\text{[X-11]} \qquad \begin{cases} -a_1 = a_0 S_1 \\ -2a_2 = a_0 S_2 + a_1 S_1 \\ -3a_3 = a_0 S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -p\,a_p = a_0 S_p + a_1 S_{p-1} + \ldots + a_{p-1} S_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

entendiendo que $a_p = 0$ para $p > n$. Estas relaciones permiten despejar sucesivamente $S_1, S_2, S_3, \ldots$

[X-12]

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad S_2 = \frac{a_1^2 - 2\,a_0\,a_2}{a_0^2}; \quad S_3 = \frac{-a_1^3 + 3\,a_0\,a_1\,a_2 - 3\,a_0^2\,a_3}{a_0^3}; \ldots;$$

que pueden ser comprobadas para el ejemplo 2.

d) Una función simétrica muy notable de las raíces es el cuadrado del determinante de VANDERMONDE, formado con ellas (§ 13-7, *b*):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \begin{matrix} (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \ldots (x_1 - x_n)^2 \\ (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_2 - x_n)^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_{n-1} - x_n)^2. \end{matrix}$$

La función simétrica de las raíces:

$$\text{[X-13]} \qquad \Delta = a_0^{n(n-1)} \prod (x_i - x_j)^2,$$

se llama *discriminante de la ecuación.*

Aplicando, para hallar el cuadrado del determinante, la regla de multiplicación de determinantes efectuada por filas (§ 13-6):

$$\text{[X-14]} \qquad \Delta = a_0^{n(n-1)} \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots & S_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \ldots & S_{2(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Como, según [X-12], en la expresión de S_h figura el denominador a_0^h, y cada término del determinante [X-14] es un producto de sumas S_h, donde la suma de índices es siempre $n(n-1)$, resulta que *el discriminante es una función entera homogénea de grado* $n(n-1)$ *de los coeficientes* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

EJEMPLO 3: Para la ecuación [X-10], el discriminante es:

$$\text{[X-15]} \quad \Delta = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix} = -4p^3 - 27q^2$$

La ecuación [X-10] es la llamada ecuación cúbica reducida. Para la ecuación cúbica general:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

el discriminante es la función entera homogénea de grado 6 en los coeficientes:

$$\Delta = a_0^2 a_1^2 a_2^2 + 18 a_0^3 a_1 a_2 a_3 - 27 a_0^4 a_3^2 - 4 a_0^3 a_2^3 - 4 a_0^2 a_1^3 a_3,$$

y del que se deduce [X-15] para $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = p$, $a_3 = q$.

e) De la definición [X-13] resulta que *la condición necesaria y suficiente para que la ecuación tenga raíces iguales es que su discriminante sea nulo.*

En una ecuación de coeficientes reales, a cada binomio $x_i - x_j$, diferencia entre dos raíces imaginarias no conjugadas, o una imaginaria y otra real, corresponderá otro binomio conjugado (§ 18-2), y el producto de ambos es real y positivo; pero habrá un binomio diferencia entre las dos raíces conjugadas:

$$[(a + b\,i) - (a - b\,i)]^2 = -4\,b^2 < 0,$$

es decir, a cada par de raíces imaginarias conjugadas corresponde un factor negativo. Por lo tanto: *El número de pares de raíces imaginarias conjugadas de una ecuación de coeficientes reales, sin raíces iguales, es par o impar, según sea* Δ *positivo o negativo.*

f) Entre las funciones simétricas de las raíces de una ecuación, además de las simples [X-6], tienen importancia las *sumas múltiples* (dobles, triples, etc.):

[X-16]

$$S_{p,q} = \Sigma x_i^p x_j^q = x_1^p x_2^q + x_1^p x_3^q + \ldots + x_2^p x_1^q + \ldots x_n^p x_{n-1}^q$$

$$S_{p,q,r} = \Sigma x_i^p x_j^q x_k^r = x_1^p x_2^q x_3^r + x_1^p x_2^q x_4^r + \ldots + x_n^p x_{n-1}^q x_{n-2}^r$$

. . . .

donde los sumandos se forman mediante todas las *variaciones* con los índices (§ 11-1), conservando los mismos exponentes: cuando hay dos exponentes iguales, cada término aparecerá dos veces; cuando hay tres exponentes iguales, aparecerá seis veces, etc.; pero en la suma múltiple se toman con coeficiente 1; la suma de los exponentes de cada término se llama *grado* de la función simétrica. Así, por ejemplo, para el caso de tres raíces, α, β, γ, será:

$$S_{1,1} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \quad \text{grado } 2,$$

$$S_{2,3} = \alpha^2\beta^3 + \alpha^2\gamma^3 + \beta^2\alpha^3 + \beta^2\gamma^3 + \gamma^2\alpha^3 + \gamma^2\beta^3 \quad \text{grado } 5.$$

f_1) La importancia de las sumas múltiples se funda en que *toda función simétrica entera es una suma de sumas múltiples multiplicadas por coeficientes constantes.* En efecto, si $c\,x_1^2 x_2^3 x_3^5$ figura en una función simétrica *entera*, ésta, por ser simétrica, deberá contener todos los términos deducidos de ésta por sustitución entre las n letras, es decir, todos los de la suma $c\,S_{2,3,5}$, y así se sigue, hasta agotar todos los términos de la función simétrica entera dada.

f_2) *Una suma múltiple se puede expresar como función entera con coeficientes enteros de las sumas simples* S_1, S_2, S_3, ... En efecto, si queremos hallar $S_{p,q}$, bastará efectuar el producto $S_p . S_q$, obteniendo:

$$(\Sigma x_i^p)(\Sigma x_j^q) = \Sigma x_i^{p+q} + \Sigma x_i^p x_j^q,$$

o sea:

$$S_p . S_q = S_{p+q} + S_{p,q},$$

de donde:

[X-17]
$$S_{p,q} = S_p . S_q - S_{p+q}, \quad (p \neq q).$$

Obsérvese que si $p = q$, resulta:

$$2\,S_{p,p} = S_p^2 - S_{2p}.$$

Análogamente puede expresarse $S_{p,q,r}$, formando:

$$S_p S_q S_r = (\Sigma x_i^p)(\Sigma x_j^q)(\Sigma x_k^r) = S_{p+q+r} + S_{p+q,r} + \\ + S_{p+r,q} + S_{q+r,p} + S_{p,q,r}, \ (p \neq q \neq r \neq p),$$

y teniendo en cuenta [X-17]. Lo mismo para $S_{p,q,r,s}$, etc.

g_1) Como, según [X-12], las sumas simples se expresan como funciones enteras de los coeficientes, si $a_0 = 1$, resulta: *Toda función simétrica entera de las raíces de una ecuación algebraica es expresable como función entera de los coeficientes, si es $a_0 = 1$, ó como función entera de los cocientes a_i/a_0 en el caso general.*

g_2) *Si una función racional irreducible es simétrica, lo son el numerador y el denominador.*

Observemos, ante todo, que si dos polinomios P y Q de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tienen un factor común, al aplicarles una sustitución S, los nuevos polinomios $P' = P.S$, $Q' = Q.S$ tienen común el transformado de aquél. Recíprocamente, si P y Q carecen de factor común, tampoco lo tienen P′ y Q′, puesto que P y Q son a su vez transformados de éstos por la sustitución inversa.

La simetría de la fracción P/Q viene expresada por la identidad:

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P.S}{Q.S},$$

y como ambas son irreducibles, deben ser P y Q idénticas a P′ y Q′ salvo un factor constante k.

Sea S una trasposición; siendo

$$P(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n) \equiv k\,P(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

y por consiguiente:

$$P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \equiv k\,P(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n),$$

debe ser $k^2 = 1$; luego, $k = \pm 1$. Pero si es $k = -1$, haciendo $x_2 = x_1$, resulta $2\,P(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n) = 0$, es decir, el polinomio P se anula para $x_2 = x_1$; luego, es divisible por $x_2 - x_1$; y análogamente el Q, contra la hipótesis de la irreducibilidad de la fracción. Debe ser, por consiguiente, $k = 1$; y no alterándose P ni Q por ninguna trasposición, son funciones simétricas.

g_3) Con ello llegamos al llamado *teorema fundamental de las funciones simétricas*, base de la teoría de la resolución algebraica de ecuaciones:

Toda función racional simétrica de las raíces de una ecuación es función racional de los coeficientes de ésta, y recíprocamente.

h) La solución clásica y discusión de la *ecuación cuadrática*, así como de las que se reducen a ella, se han visto en § 19-1 y 2.

Aquí, para significar la importancia de lo dicho sobre funciones simétricas, diremos que como de la ecuación

[X-18] $$a x^2 + b x + c = 0,$$

ya se conoce la suma de sus raíces (§ 18-2);

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

bastará hacer uso del *discriminante*, función entera de los coeficientes (d).

[X-19] $$\Delta = a^2(x_1 - x_2)^2 = b^2 - 4\,a\,c.$$

para que dé la diferencia $x_1 - x_2 = \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$, y de la suma obtengamos las soluciones de [X-18]:

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}.$$

La resolución consiste en apelar a la *resolvente* [X-19], que puesta en la forma de ecuación binómica:

$$a^2 z^2 = \Delta$$

tiene por soluciones la función de dos valores:

$$z_1 = x_1 - x_2$$

$$z_2 = x_2 - x_1,$$

y es inmediatamente resoluble por radicales.

Estas observaciones cobran toda su importancia en la teoría de resolución algebraica superior (Cap. IV, nota II, *f*). Análogo procedimiento puede aplicarse a la resolución de las ecuaciones *cúbica* y *cuártica*, el que hace ver la razón profunda de la eficacia de los cálculos en apariencia artificiosos efectuados en §§ 19-3 y 19-4 (ver *Álgebra*, de J. REY PASTOR, citada en Cap. IV, nota II, 3).

IV. Resolución gráfica de ecuaciones: método de Lill. — *a*) El dibujo de diagramas para la resolución de ecuaciones es apropiado para tener una idea previa de la solución y así controlar los métodos numéricos, siempre más exactos y precisos, pero susceptibles de deslices que falseen completamente el resultado.

A fin de evitar tener que efectuar una nueva construcción gráfica para cada ecuación particular, es posible construir diagramas tales que uno mismo permita hallar la solución para todo un conjunto de ecuaciones del mismo tipo (por ejemplo, cuadráticas), que sólo difieran entre sí por el valor numérico de sus coeficientes. Tales diagramas son los llamados *nomogramas*, cuya construcción y manejo se estudian en la *nomografía*, y de la cual sólo daremos aquí (cfr. Vol. III, Ap. V) noticia bibliográfica (cfr. nota V).

Para resolver gráficamente una ecuación $f(x) = 0$, debe buscarse ponerla ingeniosamente en forma adecuada, $f_1(x) = f_2(x)$, a fin de que sea fácil la construcción de las gráficas de $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, cuya intersección dará las raíces de la ecuación propuesta.

EJEMPLO 1: Para resolver gráficamente la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$, basta hallar la intersección de las curvas $y_1 = x^3$, $y_2 = 3x - 1$; la primera es una parábola cúbica, ya construída en muchos diagramas; la segunda es una recta.

b) *Método de* LILL. — Un método de resolución de las ecuaciones algebraicas consiste en realizar gráficamente el algoritmo de RUFFINI, que permite calcular el valor $f(x)$ del polinomio por multiplicaciones y adiciones sucesivas (§ 4-11):

$$f(x) = ((a_0 x + a_1)x + a_2)x + \ldots + a_n,$$

eligiendo por tanteos al valor x, de tal modo que resulte $f(x) = 0$.

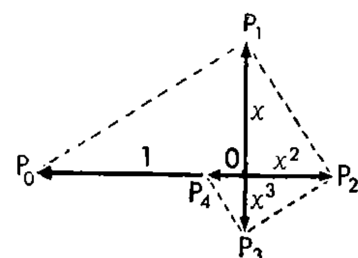


Fig. 132.

*b*₁) Entre los varios métodos de multiplicación y adición gráficas, conviene elegir uno en que los segmentos que representan los coeficientes formen un esquema fijo, del cual, con el trazado más simple posible, se deduzca $f(x)$ para cada valor de x.

*b*₂) Recordemos cómo se efectúan gráficamente las multiplicaciones sucesivas por un número x.

Llevando la ordenada x sobre el punto de abscisa 1 en el sentido que corresponda a su signo, es decir, llamando x a la pendiente de P_0P_1, resulta un punto P_1; la perpendicular en P_1 a P_0P_1 determina sobre el eje x un segmento $OP_2 = x^2$; la perpendicular a P_1P_2 en P_2 determina $OP_3 = x^3$; etc. (fig. 132).

Todos los triángulos rectángulos son semejantes directamente, y cada nuevo cateto ocupa respecto del anterior una posición semejante directamente a la que el x ocupa respecto de la unidad; pero esta regla, legítima en cálculo vectorial, se presta a confusiones para apreciar el sentido de los segmentos, y por la costumbre de Geometría Analítica es más sencillo adoptar como sentidos positivos los usuales en cada eje de origen O; así, resulta que los segmentos obtenidos tienen los signos siguientes:

$$-1, \ +x, \ +x^2, \ -x^3, \ -x^4, \ +x^5, \ +x^6, \ \ldots$$

b_3) Si en vez de partir del segmento 1 llevamos $OA_0 = a_0$, y levantamos la perpendicular en A_0 hasta encontrar a la recta de pendiente x,

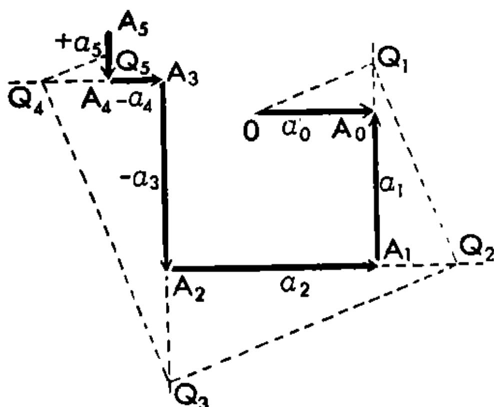


Fig. 133.

resultará la ordenada $A_0Q_1 = a_0x$; en vez de sumarle el segmento a_1 a continuación (o sea por el extremo Q_1), sumémoslo por el origen, es decir, llevemos $A_1A_0 = a_1$, y resulta en magnitud y signo (fig. 133):

$$A_1Q_1 = a_0x + a_1.$$

La perpendicular en Q_1 a OQ_1 determina sobre el nuevo eje x de origen A_1, el segmento

$$A_1Q_2 = (a_0x + a_1)x,$$

y sumando $A_2A_1 = a_2$ resulta:

$$A_2Q_2 = (a_0x + a_1)x + a_2.$$

Como en las dos transformadas siguientes los sentidos son opuestos a los usuales, llevaremos:

$$A_3A_2 = -a_3, \qquad A_4A_3 = -a_4;$$

después: $A_5A_4 = +a_5$, $A_6A_5 = +a_6$, y así sucesivamente.

Regla práctica: *Para calcular gráficamente el valor* $f(x)$ *de un polinomio ordenado, se construye la poligonal* $OA_0A_1A_2 \ldots$ *de segmentos* * *iguales a los coeficientes* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *con los sentidos*:

[X-20] $$+x, \ -y, \ -x, \ +y, \ +x, \ -y, \ -x, \ \ldots$$

La recta de pendiente x *trazada por* O *corta al segundo lado* A_0A_1 *en un punto* Q_1; *la perpendicular a ella en este punto corta al tercer lado en* Q_2, *y así siguiendo resulta sobre el último lado un punto* Q_n.

---

* *Segmentos* de una quebrada son los determinados por cada dos vértices consecutivos. *Lados* son las rectas de que estos segmentos forman parte.

El valor del polinomio está representado por el segmento $A_n Q_n$, *con el signo que le corresponda según la escala* [X-20].

Construído el esquema $O A_0 A_1, \ldots, A_n$, la resolución de la ecuación $f(x) = 0$ se reduce a encontrar un rayo inicial $O Q_1$, tal que el punto final Q_n de la quebrada coincida con A_n.

La figura indica en cada caso en qué sentido conviene hacer girar dicho rayo inicial para que Q_n se acerque a A_n; si $Q_n A_n$ cambia de sentido, se ensayará una posición intermedia del rayo inicial, etc.

Para este tanteo puede utilizarse el papel cuadriculado transparente, en sustitución de la quebrada O, Q_1, Q_2, ...; y cuando no se dispone de éste, no es necesario en la práctica dibujar esta poligonal, bastando señalar los puntos Q_1, Q_2, ..., sin otro instrumento de dibujo que una escuadra o una simple hoja de papel doblado.

EJEMPLO 2: La figura 133 representa la construcción para la ecuación

$$5x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 2x - 2 = 0,$$

partiendo del valor $x = 2/5 = 0{,}4$.

A partir del origen hemos llevado sucesivamente los coeficientes, anteponiéndoles los signos +, —, —, +, +, —, —, ..., es decir: 5, -6, -8, $+7$, -2, $+2$, y así resulta la quebrada $O A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$.

Para $x = 0{,}4$ resulta $A_5 Q_5 \sim -1$; el cálculo numérico da $f(0{,}4) = -0{,}96$.

Se mejorará la aproximación si se da a x un valor mayor; por ejemplo $x = 0{,}5$, con lo cual resultará una quebrada que envuelve a la anterior, y que no hemos dibujado para no complicar la figura, resultando el punto Q'_5 más próximo al A_5. El cálculo numérico da $f(0{,}5) = 0{,}28$.

V. **Bibliografía.** — 1. Ya hemos dicho que la resolución numérica y clásica de ecuaciones está estudiada en las obras de J. REY PASTOR, F. CAJORI (citadas en Cap. IV, nota III-3), F. SEVERI (Cap. IV, nota III-1) y B. LEVI (Cap. VI, nota VI-2).

De tipo clásico y elemental, desarrollada a partir de los conceptos de función, límite y derivada, está la extensa y correcta obra de:

P. MIQUEL: *Elementos de álgebra superior.* (4ª ed., Cultural, La Habana, 1943).

Bien escrito, con muchos ejercicios y citas bibliográficas, está:

J. VICENTE GONÇALVES: *Curso de álgebra superior.* (2 vols., Lisboa. 1950).

2. Entre las innumerables obras didácticas italianas de Análisis algebraico que contienen la teoría clásica de ecuaciones, citaremos, por lo completa y por la irradiación que ha tenido, la de:

A. CAPELLI: *Istituzioni di Analisi algebrica.* (5ª ed., Pellerano, Nápoles, 1909).

3. Breve manual de introducción a la teoría clásica de ecuaciones, conciso y claro, es el de:

H. W. TURNBULL: *Theory of equations.* (4ª ed., Oliver and Boyd, Edimburgo, 1947).

Para designar determinantes clásicos del álgebra, el manual anterior sigue la nomenclatura incluída en el inicial de la misma colección (University Mathematical Texts de Interscience Publishers, Nueva York), traducido al castellano de la 4ª edición:

A. C. AITKEN: *Determinantes y matrices.* (Dossat, Madrid y Buenos Aires).

4. Dedica un capítulo a la solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes, la excelente y muy reputada obra sobre problemas matemáticos que surgen al tratar cuestiones con datos numéricos:

E. T. WHITTAKER y G. ROBINSON: *The Calculus of Observations.* (4ª ed., Blackie and Son, Glasgow, 1948).

También dedica un capítulo a métodos gráficos y técnicas operativas

de resolución de ecuaciones y cuestiones conexas, con adecuada evaluación de su utilidad, la obra repleta de ejemplos numéricos y figuras ilustrativas:

R. ZURMÜHL: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker.* (Springer, Berlín, 1953).

Trata asimismo estas cuestiones, la obra orientada hacia procedimientos numéricos adecuados a calculadoras digitales de secuencia automática:

A. S. HOUSEHOLDER: *Principles of numerical analysis.* (McGraw-Hill, Nueva York, 1953).

5. El álgebra clásica con el formalismo moderno. se desarrolla en los excelentes tratados didácticos de:

O. PERRON: *Algebra.* (2 vols., 3ª ed., W. de Gruyter, Berlín, 1951);

O. HAUPT: *Einführung in die Algebra.* (Vol. I, 2ª ed., 1952; vol. II, 1929; Akad. Vlg., Leipzig).

6. El teorema general de BÉZOUT, la resolución de los sistemas generales de ecuaciones algebraicas y su interpretación en la Geometría algebraica están expuestos didácticamente en los complementos de la obra de F. SEVERI (citada en Cap. IV, nota III-1); y con los recursos de la teoría de ideales de la moderna álgebra abstracta, en la obra de B. L. VAN DER WAERDEN (citada en Cap. I, nota IV-7).

7. Clásico tratado completo de nomografía es el de:

M. D'OCAGNE: *Traité de nomographie.* (2ª ed., Gauthier Villars, París, 1921).

Introducciones elementales, con extensa bibliografía en la última, se encuentran en:

S. BRODETSKY: *A first course in nomography.* (G. Bell, Londres, 1920).

M. G. VAN VOORHIS: *How to make alignment charts.* (Mc Graw, Nueva York, 1937).

L. H. JOHNSON: *Nomography and empirical equations.* (Wiley, Nueva York, 1952).

F. KIESSLER: *Nomographisches Rechnen* (Girardet, Essen, 1956).

D. S. DAVIS: *Empirical equations and nomography.* (Mc Graw, Nueva York, 1943).

Un excelente manual, profusamente ilustrado con ejemplos y ejercicios, es:

W. MEYER ZUR CAPELLEN: *Leitfaden der Nomographie.* (Springer, Berlín, 1953).

A la nomografía se dedica el último capítulo de la obra elemental de:

A. DELECOURT y J. TURCAN: *Les lois physiques et leur représentation graphique.* (Dunod, París, 1948).

Entre otras muchas cuestiones complementarias, también explica la teoría y construcción de nomogramas la completa obra de:

SIXTO CÁMARA TECEDOR: *Geometría analítica.* (3ª ed., Madrid, 1945).

Bien y concisamente escrito por J. BABINI, dedica a nomografía su último capítulo la Geometría analítica de J. REY PASTOR, L. A. SANTALÓ y M. BALANZAT (citada en Cap. IV, nota III-3).

En clara exposición, dedica también un capítulo a nomografía la obra de M. SADOSKY (citada en Cap. V, nota IV-3).

Localización de unos 1700 nomogramas, representando ecuaciones de las más variadas aplicaciones, aparecidos en un centenar de revistas técnicas, en su mayoría norteamericanas, aparece en:

D. P. ADAMS: *An index of nomograms.* (Massachusetts Institute of Technology, EE. UU., 1950).

Nuevos aspectos sobre la nomografía se obtienen por la superposición de varios nomogramas planos trascendentes, tema tratado en forma abstracta en la reciente tesis de:

G. R. BOULANGER: *Contribution à la théorie générale des abaques à plans superposés.* (Gauthier-Villars, París, 1949).

CAPÍTULO XI

SERIES DE POTENCIAS

§ 43. PROPIEDADES GENERALES

1. **Campo y radio de convergencia.** — *a*) Si a las operaciones enteras (suma, resta y multiplicación) mediante las cuales se construyen las funciones racionales enteras (§ 23-7) agregamos el paso al límite, obtenemos el algoritmo de las *series de potencias*, cuya expresión más general es la siguiente:

[43-1] $$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

donde a_0, a_1, ... a_n, ... son números reales o complejos cualesquiera.

Sólo para cada valor de x que haga convergente la serie, tiene [43-1] significado numérico, y la suma de la serie depende del valor dado a x. Esta suma es entonces una función de x, definida en el conjunto X de valores que hacen convergente la serie, que llamaremos *campo de convergencia* de ésta. Las funciones representadas por series de potencias son las que hemos llamado (§ 23-8) funciones analíticas, y dan una generalización natural de los polinomios.

b) Demostraremos ahora los siguientes teoremas:

b_1) *El campo de convergencia de una serie de potencias es un círculo de centro* 0, *o todo el plano complejo, o bien sólo el origen* 0. En el primer caso, el radio R del círculo se llama *radio de convergencia,* poniéndose en los otros dos casos $R = \infty$, $R = 0$.

b_2) TEOR. DE CAUCHY-HADAMARD: *El radio de convergencia de la serie* Σa_nx^n *es el número*

[43-2] $$R = \frac{1}{L}, \textit{ siendo } L = \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|} \textit{ para } n \to \infty.$$

Cuando $L = 0$, *la serie converge para todo* x ($R = \infty$), *y cuando* $L = \infty$, *la serie sólo converge para* $x = 0$ ($R = 0$).

DEM.: Por el criterio de CAUCHY (§ 22-2, *c*) aplicado a la serie $\Sigma\ |a_nx^n|$, la serie dada será *absolutamente convergente* para todo x que haga < 1 la expresión

[43-3] $$\lim\sup \sqrt[n]{|a_nx^n|} = |x| \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|} = |x| . L,$$

es decir:

1º) para $|x| < \frac{1}{L}$ si L es finito y no nulo;

2º) para todo x si $L = 0$;

3º) sólo para $x = 0$ (como se vé por reemplazo directo en la serie) si $L = \infty$.

Si en cambio el límite [43-3] es mayor que 1, se tiene para infinitos valores de n, $|a_n x^n| > 1$, y la serie dada no es convergente (§ 22-1, *d*).

c) La demostración anterior prueba, también, que *en todo punto interior al campo de convergencia, ésta es absoluta.*

Cuando el radio R es finito y no nulo, los puntos del plano de la variable compleja x quedan clasificados así:

1º) En el interior del *círculo de convergencia*: $|x| < R$, hay convergencia absoluta;

2º) En el exterior, $|x| > R$, no hay convergencia y la serie es divergente, o bien oscilante (ej. 9).

3º) En los puntos del contorno $|x| = R$, caben todas las posibilidades, como veremos en el ejemplo 8.

Cuando sólo se consideran valores reales de x, el campo de convergencia es un intervalo simétrico respecto del origen 0, cuya semiamplitud, dada por [43-2], se llama siempre *radio de convergencia*, intervalo que puede convertirse en todo el eje, o reducirse sólo al origen.

Este algoritmo de las series de potencias, no sólo nos conduce de modo natural al campo complejo, sino que hace indispensable considerar éste para explicar ciertas particularidades que se presentan en el campo real, y que dentro de él serían incomprensibles.

d) *Casos particulares.* — Como corolario resulta:

d_1) Si existe $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, el radio de convergencia de la serie de potencias es $R = \frac{1}{L}$, ($R = \infty$ si $L = 0$; $R = 0$ si $L = \infty$).

d_2) Si existe $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, el radio de convergencia de la serie de potencias es $R = \frac{1}{L}$, ($R = \infty$ si $L = 0$; $R = 0$ si $L = \infty$).

Porque, siendo

$$\lim \frac{|a_{n+1}\, x^{n+1}|}{|a_n\, x^n|} = \lim\, |x| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\, L,$$

la serie de módulos converge o diverge, según sea (§ 22-2, *c*):

$$|x| < \frac{1}{L}, \quad ó \quad |x| > \frac{1}{L}.$$

e) *Los tres tipos de series de potencias.*—Llamaremos series de primero, segundo y tercer tipo a las que tienen radio finito positivo, infinito, o nulo, respectivamente. El campo de convergencia, en el primer tipo es un círculo de radio $R > 0$; en el segundo tipo es todo el plano; en el tercero se reduce al origen.

Las series de radio de convergencia infinito son las más parecidas a los polinomios, pues toman valor numérico para cualquier valor de x; las que no se reducen a polinomio representan las funciones llamadas *trascendentes enteras*.

EJEMPLOS: *Primer tipo*: Tienen radio 1 las series siguientes:

1. $[\ln(1+x)] \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

2. $(\operatorname{arc\,tg} x) \quad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

Segundo tipo: Compruébese, aplicando d_2), que tienen radio infinito las series:

3. $(e^x) \quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

4. $(\cos x) \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mp \ldots$

5. $(\operatorname{sen} x) \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \ldots$

Las series de los ejemplos 1 a 5 serán estudiadas en § 45, donde demostraremos que sus sumas respectivas son las anotadas a la izquierda. En estas series, excepto la primera y la tercera, no es aplicable d_2) directamente, pues hay infinitos coeficientes 0; pero tomando x^2 como variable (y separando eventualmente un factor x), resulta 1 como límite en la segunda; luego, $R = 1$; y en las 4 y 5, $R = \infty$.

Tercer tipo: Aplicando el criterio del cociente d_2) resulta inmediatamente que es nulo el radio de convergencia de las series siguientes:

6. $1 + 1!\,x + 2!\,x^2 + \ldots + n!\,x^n + \ldots$

7. $2 + 2^2 x + 2^4 x^2 + \ldots + 2^{2n} x^n + \ldots;$

por consiguiente, no definen ninguna función. (En Análisis superior se logra sin embargo, en casos muy generales, engendrar una función, a pesar de la no convergencia; ver Cap. V, nota I, *g*)

8. Las tres series:

$$\sum_1^\infty x^n, \qquad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$$

tienen radio de convergencia $R = 1$. La primera no converge en ningún punto de la circunferencia $|x| = 1$ (pues el término general no tiende a cero), la segunda converge absolutamente en todos ellos (como se ve si se compara con $\sum 1/n^2$), y la tercera converge condicionalmente en todos los puntos, menos para el $x = 1$, en que diverge (§ 22-4, ej. 4).

9. He aquí un ejemplo en que no existe el límite del cociente de coeficientes:

$$2x + 2x^2 + 2^3 x^3 + 2^3 x^4 + 2^5 x^5 + 2^5 x^6 + \ldots;$$

tiene el término general $2^n x^n$ si n es impar, y $2^{n-1} x^n$ si n es par; luego,

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{2^n} = 2; \quad \text{o bien} \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{2^{n-1}} = 2^{\frac{n-1}{n}} \to 2;$$

por lo tanto, es $R = \frac{1}{2}$.

La serie es, pues, absolutamente convergente para los valores tales que $|x| < \frac{1}{2}$. La suma se calcula fácilmente si se observa que se compone de dos progresiones geométricas convergentes.

Para estudiar la serie fuera de su campo de convergencia, formemos:

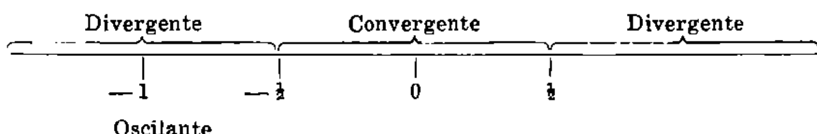
$$S_{2n} = 2x(1+x)\frac{(2x)^{2n}-1}{4x^2-1} \qquad S_{2n+1} = 2x\frac{(2x)^{2n}(4x^2+x)-x-1}{4x^2-1}$$

Para $x = \frac{1}{2}$, la serie $1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \ldots$ es divergente.

Para $x = -\frac{1}{2}$, la serie $-1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - \ldots$ es divergente.

Para $|x| > \frac{1}{2}$ $(x \neq -1)$ crecen infinitamente S_{2n} y S_{2n+1}; luego, es divergente.

Para $x = -1$ es siempre $S_{2n} = 0$ y $S_{2n+1} \to \infty$; luego, es oscilante.



Como ejercicio, clasifíquense análogamente en el plano complejo los puntos $|x| = \frac{1}{2}$ (§ 22-1, *b*).

2. **Operaciones con series de potencias.** — La utilidad de las series de potencias reside sobre todo en sus propiedades sencillas, análogas a las de los polinomios. Como consecuencia de los teoremas sobre operaciones con series (§ 22-6), dentro del conjunto común a los campos de convergencia, las series de potencias se suman y restan como polinomios ordenados. También se multiplican, formando el producto de cada término de una por cada término de la otra, y ordenando los productos según las potencias crecientes de x, lo que conduce al producto de CAUCHY (§ 22-6, b_3).

El círculo de convergencia de la serie que resulta comprende al menor de los círculos de convergencia, pues para x interior a él, ambas series convergen absolutamente, pero puede ser mayor como prueba el ejemplo trivial:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)\,(1 - x) = 1.$$

EJEMPLO: Elevando al cuadrado la serie

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 1:(1-x) \qquad |x| < 1,$$

y ordenando según las potencias ascendentes de x, obtenemos este resultado:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = 1:(1-x)^2 \qquad |x| < 1.$$

Análogamente pueden dividirse las series de potencias como los polinomios, ordenando el cociente según las potencias ascendentes de x, pero la validez del resultado ya no es de tan fácil expresión como en la suma, resta y multiplicación, pues el radio de convergencia del cociente puede ser menor que los de ambas series, ya que no puede superar al menor de los módulos de las raíces reales o complejas del denominador, si dicha raíz no lo es del numerador (§ 44-3).

3. Series de funciones. Convergencia uniforme. — *a*) Muchas propiedades de las series de potencias interesan en general para series cuyos términos son funciones de x:

[43-3] $u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$

por lo cual nos referiremos a ellas, aplicando luego las conclusiones al caso especial de las series enteras: $u_n(x) = a_n x^n$.

Ante todo observemos que el campo de convergencia de [43-3], es decir, el conjunto de los puntos x en que converge la serie, no necesita ser un círculo o un segmento. Por ejemplo, la serie $\sum_0^\infty$ sen nx sólo converge en los puntos: $0, \pm\pi; \pm 2\pi; \ldots$

Supongamos ahora, para fijar las ideas, que la serie [43-3] converja en un intervalo (a, b). Para cada x del intervalo, dado $\varepsilon > 0$, tendremos, llamando $S_n(x)$ a la suma parcial

$u_0(x) + \ldots + u_{n-1}(x)$, y $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$

a la suma de la serie:

[43-4] $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *para todo* $n > N(\varepsilon, x)$.

El número N depende, en general, no sólo de ε, sino también de x, como indicamos al escribir $N(\varepsilon, x)$, pues para cada valor de x se tiene una serie numérica distinta, y la aproxima-

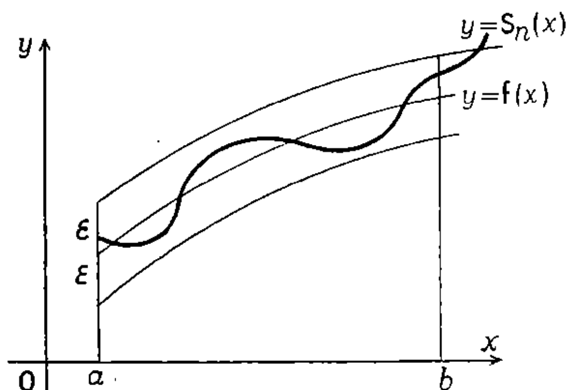


Fig. 134.

ción [43-4] se logrará con distinto número de términos, si no está acotada para cada $\varepsilon > 0$ la función de x, $N(\varepsilon, x)$.

Diremos que la convergencia es *uniforme en* (a, b), cuando para cada $\varepsilon > 0$ se logra la aproximación [43-4] desde una suma parcial en adelante *y para todos los puntos del intervalo* (a, b) *a la vez*, es decir, en el campo real (fig. 134), por delgada que sea la "faja plana" comprendida entre $y = f(x) - \varepsilon$ e $y = f(x) + \varepsilon$, las gráficas $y = S_n(x)$ quedan dentro de ella para n suficientemente grande.

Más generalmente:

DEF.: *La convergencia de la serie* [43-3] *se dice uniforme en un conjunto* X, *si a cada* $\varepsilon > 0$ *corresponde un número natural* $N(\varepsilon)$ (*dependiente de* ε **pero no de x**), *tal que para todo* x *del conjunto* X *es*:

[43-5] $$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ si } n > N(\varepsilon).$$

Es evidente que la convergencia uniforme implica convergencia para cada x del conjunto X, pero una serie puede ser convergente en cada punto sin serlo uniformemente.

EJEMPLO 1: La serie

$$f(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) + \ldots$$

es convergente para todo x que cumpla la condición $|x| < 1$, pues prescindiendo del primer término, es geométrica de razón x. Como las sumas parciales son $S_n(x) = x^n$, resulta en $|x| < 1$ (§ 8-5, *b*):

$$f(x) = 0; \quad R_n(x) = f(x) - S_n(x) = -x^n.$$

Si bien para cada x fijo este resto tiende a cero, no ocurre siempre lo mismo si al crecer n varía x; por ejemplo: $R_n(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}) = -\tfrac{1}{2}$, y entonces la convergencia no es uniforme en $|x| < 1$.

Para $x = 1$ se anulan todos los términos, salvo el primero, y resulta $f(1) = 1$. Por consiguiente, en el intervalo $[0, 1]$ la serie dada de funciones continuas representa una función discontinua, o lo que es lo mismo, la sucesión $\{x^n\}$ de funciones continuas (fig. 26 en § 8-5) converge hacia una función discontinua.

b) La importancia del concepto de convergencia uniforme radica no sólo en la acotación más sencilla del resto, sino también en que una serie uniformemente convergente se comporta en muchos aspectos como la suma de un número finito de funciones. Por ahora, contentémonos con observar que así como la suma de un número finito de funciones continuas es una función continua (§ 25-7), se tiene el siguiente teorema (de STOKES-SEIDEL, 1847-8):

La suma $f(x)$ *de una serie* [43-3] *uniformemente convergente de funciones continuas en un conjunto* X *del plano complejo, es una función continua en dicho conjunto.*

DEM.: Llamando $S_n(x)$ a la suma parcial de n términos, y $R_n(x)$ al correspondiente resto, dado $\varepsilon > 0$ existe, por la convergencia uniforme, un número N tal que $|R_n(x)| < \varepsilon/3$ *para todo* x de X si $n > N$.

Fijado así n, como $S_n(x)$ es continua en X (§ 25-7), para cada punto x de X podemos elegir δ tal, que $|S_n(x') - S_n(x)| < \varepsilon/3$ si $|x' - x| < \delta$ y x' está también en X. Por consiguiente:

$$|f(x') - f(x)| = |S_n(x') + R_n(x') - S_n(x) - R_n(x)| \leqq$$
$$|S_n(x') - S_n(x)| + |R_n(x')| + |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

lo que prueba la continuidad de $f(x)$ en X.

ESCOLIO: En una serie de funciones continuas, la convergencia uniforme es suficiente, pero no necesaria, para la continuidad de la suma, como prueba el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2: La serie de funciones continuas

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} + \left(\frac{2x}{1+2^2x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right) + \ldots$$

tiene suma continua para todo x, sin que la convergencia sea uniforme.
Basta calcular, sucesivamente:

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \text{ (fig. 135)};$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0 \text{ cualquiera sea } x;$$

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) = \frac{-nx}{1+n^2x^2} \therefore R_n\left(\frac{1}{n}\right) = -\tfrac{1}{2}.$$

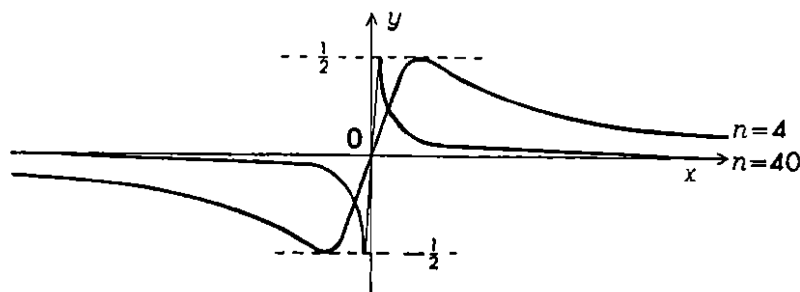


Fig. 135.

c) El criterio más sencillo para asignar la convergencia uniforme en el conjunto X, es el de la serie mayorante (§ 22-2, *b*):

Si para todo x del conjunto X *los términos de la serie $\Sigma u_n(x)$ se conservan inferiores en valor absoluto a los de una serie numérica convergente Σa_n de términos positivos, la convergencia de la serie dada es uniforme en* X.

En efecto, tomando un número ν suficiente de términos, el resto de la serie numérica es menor que ε, y por lo tanto,

[43-6] $\quad |u_\nu(x) + u_{\nu+1}(x) + \ldots| < a_\nu + a_{\nu+1} + \ldots < \varepsilon,$

para todo x de X.

Notas: 1. Aunque el criterio de Weierstrass (*c*) da *a la vez* convergencia *absoluta y uniforme*, ambas propiedades son independientes, como lo prueban los dos ejemplos que siguen:

1º) Σx^n es absolutamente convergente en $|x| < 1$, pero la convergencia no es uniforme allí, pues cualquiera sea n, el resto $R_n = \dfrac{x^n}{1-x}$ tiende a ∞ para $x \to 1$.

2º) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$ no es absolutamente convergente para ningún x real

(§ 22-2, ej. 6). Es en cambio uniformemente convergente en todo el eje real, pues por la acotación del resto en series alternadas (§ 22-3, a):

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n + x^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Diremos que una serie es *incondicional uniformemente convergente* en un conjunto X si una reordenación de sus términos no afecta la convergencia uniforme. W. SIERPINSKI ha demostrado recientemente (1950) que esto ocurre en el campo complejo cuando y sólo cuando $\sum |u_n(x)|$ es uniformemente convergente en X. Obsérvese que $\sum(1 - x)(-x)^n$ es en $X = [0;1]$ absoluta y uniformemente convergente sin ser incondicional uniformemente convergente.

2. Si se multiplica una serie o sucesión uniformemente convergente por una función no acotada, aunque definida, se puede perder la uniformidad de la convergencia. Por ejemplo, la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{1 + n x} \to 0$ uniformemente en $0 < x < 1$, pues $f_n(x) < \frac{1}{1 + n} \to 0$, y en cambio, $g_n(x) = \frac{1}{x} f_n(x) = \frac{1}{1 + n x} \to 0$ no uniformemente en (0,1), pues $g_n(1/n) = \frac{1}{2}$.

4. Convergencia uniforme de series de potencias. — a) El criterio de la mayorante (§ 43-3, c) permite demostrar:

Toda serie de potencias $\Sigma a_n x^n$, *de radio no nulo, converge uniformemente en cada círculo,* $|x| \leqq \rho < R$, *interior al círculo de convergencia (en todo círculo, si* $R = \infty$).

Basta comparar con la serie de términos positivos $\Sigma |a_n| \rho^n$ convergente (§ 43-1, c).

b) TEOR. DE ABEL: *Si la serie de potencias* $\Sigma a_n x^n$ *converge en un punto* x_0 *del plano complejo, converge uniformemente en todo segmento rectilíneo* $[0, x_0]$.

La demostración resulta del criterio de ABEL (§§ 22-4, c, y 22-5), en que la convergencia simple de una serie se deduce de la de otra, con este complemento esencial: De la convergencia de Σa_n, dado ε existe N tal que $\left|\sum_{n=N}^{N+p} a_n\right| < \varepsilon$ para todo $p > 0$, con lo que si los términos de la sucesión monótona [22-53] son funciones de una variable x, resulta de [22-63]:

$$|a_N b_N + \ldots + a_{N+p} b_{N+p}| < \varepsilon b_N \leqslant \varepsilon C,$$

es decir: $\sum a_n b_n$ converge *uniformemente* en X, pues su resto R_N puede hacerse menor que un número arbitrariamente prefijado, con N independiente de x.

En efecto, los términos de $a_n x^n$ se deducen de los términos de la serie convergente $\sum a_n x_0^n$ multiplicándolos por la sucesión de números *reales positivos*:

$$1 > \left(\frac{x}{x_0}\right) > \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 > \left(\frac{x}{x_0}\right)^3 > \ldots,$$

todos inferiores a 1, cualquiera sea el punto x del segmento $[0, x_0]$; luego, es aplicable la observación anterior, y la serie $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en dicho segmento.

NOTAS: 1. Se puede ampliar el alcance del teorema de ABEL, demostrando que la convergencia es uniforme en todo recinto interior al círculo cuyo contorno tenga común con la circunferencia el punto x_0, a condición de que se conserve acotado $\frac{|x_0 - x|}{|x_0| - |x|}$, es decir, que esté contenido en un ángulo de dos cuerdas trazadas por dicho punto (fig. 136). Éste es

el llamado teorema de STOLZ, que amplía el alcance del teorema de ABEL.

2. En la nota I de este capítulo veremos que el recíproco del teorema de ABEL sólo es cierto con alguna condición complementaria sobre los coeficientes a_n.

3. Como corolario inmediato del teorema de ABEL resulta el teorema de ABEL sobre producto de series, Σu_n y Σv_n, condicionalmente convergentes (§ 22-6, b_4), ya demostrado en el Capítulo V, nota I, f). En efecto, se tiene para $0 < x < 1$, por el teorema del producto de CAUCHY (§ 22-6, b_2),

$$\Sigma u_n x^n \, . \, \Sigma v_n x^n = \Sigma w_n x^n,$$

y si suponemos convergente Σw_n, resulta la convergencia uniforme de las tres series en [0, 1], lo que implica (§ 43-3, b) la continuidad de sus sumas, de modo que tomando límites para $x \to 1^-$ resulta $\Sigma u_n \, . \, \Sigma v_n = \Sigma w_n$.

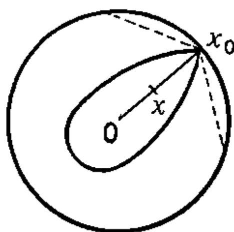


Fig. 136.

EJEMPLOS: 1. La serie de § 43-1, ej. 1:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

converge en el punto $x_0 = 1$, y por lo tanto, la convergencia es uniforme en todo el intervalo [0, 1], según el teorema de ABEL, o bien en todo recinto del tipo de STOLZ. Pronto veremos la importancia de este resultado para el cálculo de logaritmos.

2. La serie $\Sigma \dfrac{x^n}{n^2}$ (§ 43-1, ej. 8) converge uniformemente sobre cada radio, incluídos los extremos, pero en este caso la convergencia uniforme en todo el círculo y su contorno resulta trivialmente del criterio de comparación.

c) Como una serie uniformemente convergente de funciones continuas representa una función continua (§ 43-3, b), se tiene, por (a) y (b):

La función $f(x) = \Sigma a_n x^n$, *definida por una serie de potencias, es continua en todo punto interior al campo de convergencia; también es continua radialmente en todo punto del contorno donde converge la serie.* La continuidad radial en un punto x_0 del contorno: $|x_0| = R$, significa que

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x), \text{ siendo } x/x_0 \text{ real y menor que 1.}$$

EJEMPLO 3: La serie del ejemplo 1 define una función continua en todo punto interior del intervalo $(-1, +1)$; veremos (§ 45-4, a) que esta función es $\Sigma a_n x^n = \ln(1 + x)$. Para $x \to 1$, el primer miembro tiende, por el teorema de la continuidad, hacia la serie convergente $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$, y el segundo hacia $\ln 2$; luego, resulta el desarrollo $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$

5. **Derivadas y primitivas.** — a) *Campo de convergencia de la serie derivada.* — La serie [43-1] y la serie formada por las derivadas de sus términos:

[43-7] $$f_1(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

tienen el mismo radio de convergencia.

Basta, en efecto, observar que por ser (Cap. V, nota I, ej. 2):

[43-8] $$\lim \sqrt[n]{n} = 1,$$

no se altera el límite que determina el radio del desarrollo de $x \, . \, f_1(x)$, obtenido al multiplicar por n el término general.

NOTA: Este teorema prueba que la serie obtenida derivando los términos de la serie dada, define una función $f_1(x)$ en el mismo campo (salvo el contorno) en que está definida la función $f(x)$; pero esto no autoriza a asegurar que $f_1(x)$ sea precisamente la derivada de $f(x)$, pues la regla de derivación de una suma (§ 32-1, *b*) se refiere exclusivamente a un número finito de sumandos, y es preciso un estudio especial para las series, que ahora vamos a hacer.

b) En general, una serie no puede derivarse término a término. Por ejemplo, la serie $\Sigma\, n^{-2}$. sen n^2x es convergente para todo x real (absoluta y uniformemente), por tener la mayorante $\Sigma\, n^{-2}$, pero la serie de las derivadas, Σ cos n^2x, no converge para todo x real; por ejemplo, diverge para $x = 0$. También la serie de potencias, $\Sigma\, x^n/n^2$, converge en todo el contorno $|x| = 1$ (§ 43-1, ej. 8), pero no así la serie de las derivadas $\Sigma\, x^{n-1}/n$, que diverge en $x = 1$.

Sin embargo, *en el interior* de su campo de convergencia, toda serie de potencias puede derivarse término a término, y en la misma forma puede hallarse la primitiva. Aunque esto es consecuencia de propiedades generales de las series uniformemente convergentes (vol. II, § 85), daremos una demostración directa.

Sea x un punto interior al campo de convergencia; tomando h en un cierto entorno $|h| < \delta$, de modo que $x + h$ quede también dentro del campo de convergencia, son absolutamente convergentes las series:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$
$$f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \ldots + a_n(x+h)^n + \ldots,$$

de donde, restando término a término, y dividiendo por h, se deduce la serie convergente:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a_1 + a_2(2x+h) + a_3(3x^2 + 3xh + h^2) + \ldots =$$
$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots +$$
$$+ a_2 h + a_3(3xh + h^2) + a_4(6x^2 h + 4xh^2 + h^3) + \ldots,$$

y como la primera de estas dos series es convergente (*a*) y lo es la suma de ambas, también lo es la segunda; separando el factor h, y llamando:

[43-9] $$\Phi(x, h) = a_2 + a_3(3x + h) + a_4(6x^2 + 4xh + h^2) + \ldots,$$

tenemos:

[43-10] $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f_1(x) + h\,\Phi(x,h),$$

donde Φ depende de x y de h, pero se conserva inferior a un número fijo, según vamos a probar.

Si se sustituyen las a_n, x y h por sus valores absolutos, como la serie dada converge absolutamente y también la $f(|x| + |h|)$ por ser $|x| + |h|$ interior al campo, resultan convergentes todas las series del cálculo anterior, y en particular la serie transformada de [43-9], es decir, $\Phi(|x|, |h|)$, función que decrece con $|h|$ y está, por lo tanto, acotada. Siendo, pues,

$$|\Phi(x,h)| \leqslant \Phi(|x|, |h|) < k,$$

resulta de [43-10] para $h \to 0$:

$$f'(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f_1(x).$$

La función

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

definida por una serie de potencias, es continua y derivable en todo punto interior a su campo de convergencia. La función derivada se obtiene derivando término a término la serie dada: es decir,

[43-11] $$f'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots,$$

y las derivadas sucesivas son:

[43-12]

$$\begin{cases} f''(x) = 2 a_2 + 3.2.a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots, \\ f'''(x) = 3.2.1\, a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)\, a_n x^{n-3} + \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = \qquad n!\, a_n + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Recíprocamente:

Una función primitiva de una serie de potencias se obtiene aumentando en 1 el exponente de cada término y dividiendo por el nuevo exponente. La función primitiva más general se obtiene sumando una constante arbitraria a esta serie.

Veremos ejemplos en el § 45.

EJERCICIOS

1. Radios de convergencia de las series de potencias:
$\Sigma x^n/n^n$, $\Sigma n^{\ln n} x^n$, $\Sigma n!\, x^n/n^n$, $\Sigma (2n)!\, x^n/(n!)^2$, $\Sigma n!\, x^n$, $\Sigma n!\, x^{n^2}$.

2. Probar que si existen dos constantes positivas h y k tales que se verifique para todo n una de las acotaciones:

a) $|a_n x_0^n| < h n^k$, b) $|a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n| < h n^k$,

entonces la serie $\Sigma a_n x^n$ converge absolutamente para todo x tal que $|x| < |x_0|$.

3. Demostrar que si L y l son los límites superior e inferior de oscilación (§ 20-5) de $|a_{n+1}/a_n|$, el radio de convergencia de [43-1] está comprendido entre 1/L y $1/l$ (PINCHERLE).

4. Probar que $\sum_1^\infty x^n/(n^2+n)$ es absolutamente convergente para $|x| \leqslant 1$.

5. Probar que si las series $\Sigma a_n x^n$ y $\Sigma b_n x^n$ tienen radios de convergencia R y R', el de $\Sigma a_n b_n x^n$ es $\geqslant$ R R', y el de $\Sigma (a_n/b_n) x^n$ es $\leqslant$ R/R'.

6. Demostrar que el radio de convergencia de la suma de dos series de potencias de radios desiguales es el menor de ambos, pero puede ser mayor si éstos son iguales. Dar una serie que sumada a $\Sigma a_n x^n$ dé otra de radio infinito.

7. De los desarrollos de § 43-2, ejemplo, obtener por producto o cambio de variable los de $1/(1+x)$, $1/(1 \pm x)^2$, $1/(1 \pm x^2)$.

8. Una serie de potencias $A(x) = \Sigma A_n x^n$, de coeficientes no-negativos

$A_n \geqslant 0$, se llama (cfr. § 22-2, *b*) *mayorante* de $a(x) = \Sigma a_n x^n$ si $|a_n| \leqslant A_n$. Probar que si además es $B(x) = \Sigma B_n x^n$, mayorante de $b(x) = \Sigma b_n x^n$, entonces es $A(x) + B(x)$ mayorante de $a(x) + b(x)$, y $A(x) \cdot B(x)$, mayorante de $a(x) \cdot b(x)$.

9. Probar que: *a*) el desarrollo (finito) de $(1+x)^n$ tiene por mayorante el de $1/(1-x)^n$; y *b*) éste el de $1/(1-nx)$.

10. Probar que la serie $f(x) = \Sigma x/[(1+nx)(1+(n+1)x)]$ no converge uniformemente en ningún intervalo que contenga a cero, y hallar su suma (n desde 0 a ∞).

11. Utilizando la derivación de series de potencias, sumar las series: $1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \ldots$; $1 + 2^3 x + 3^3 x^2 + 4^3 x^3 + \ldots$

12. Probar, a partir de la serie exponencial [45-1], que

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots = 1.$$

§ 44. Desarrollos en series de potencias

1. **Definición y unicidad.** — *a*) Demostradas las propiedades de las series de potencias, muy análogas a las de los polinomios, se comprende el interés que encierra la expresión de funciones por medio de series de potencias, algoritmo que da unidad a funciones definidas por medios muy diversos.

Desarrollar una función $f(x)$ *en serie de potencias de* x, *es obtener una serie de potencias cuyos valores en todos los puntos de su campo de convergencia coincidan con los valores que en ellos toma la función.*

El ejemplo más sencillo de desarrollo en serie, en el cual aparece claramente la restricción que este algoritmo lleva consigo, es el siguiente:

$$[44\text{-}1] \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad |x| < 1.$$

El segundo miembro tiene significado numérico solamente para valores de x inferiores a 1 en valor absoluto, pues sólo para ellos converge la serie, y el valor de la serie coincide con el de la función. Para valores de x superiores a 1 en valor absoluto. el segundo miembro carece de valor numérico, puesto que la serie diverge, y en cambio, el primer miembro toma valores perfectamente determinados. Finalmente, para $x = 1$, uno y otro miembro carecen de valor numérico; para $x = -1$, el primero vale $\frac{1}{2}$, mientras que la serie es oscilante. En el campo real, la serie sólo sirve, por lo tanto, para representar un arco de la hipérbola (fig. 137) que el primer miembro define.

Nota: Se comprende bien, en el ejemplo anterior, que el campo de convergencia no puede sobrepasar al punto $x = 1$, pues la función es discontinua en él. Consideremos ahora el desarrollo en progresión geométrica:

$$[44\text{-}2] \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots,$$

que también tiene en el campo real el intervalo de convergencia $(-1, +1)$, careciendo el segundo miembro de valor numérico fuera de este intervalo, mientras que el primer miembro es una función continua para todo x real (fig. 66 en § 25-7).

Sería inútil buscar explicación a este hecho sorprendente sin salir del campo real. En cambio, si consideramos también valores imaginarios, se comprende bien que siendo $x = \pm i$ ceros del denominador, el campo de convergencia será un círculo de radio 1, el cual determina sobre el eje real el segmento $(-1, +1)$. La singularidad del campo complejo repercute en el campo real.

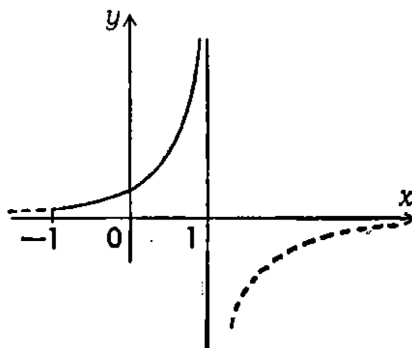


Fig. 137.

b) Si la función $f(x)$ admite un desarrollo en serie de potencias:

$$[44\text{-}3] \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

válido en un cierto campo de convergencia, hemos visto (§ 43-5, *b*) que es derivable en él, y sus derivadas son las series [43-11] y [43-12]. Haciendo en ellas $x = 0$, resulta:

$$f(0) = a_0,\ f'(0) = 1!.a_1,\ f''(0) = 2!.a_2, \ldots, f^{(n)}(0) = n!.a_n, \ldots;$$

luego, los coeficientes del desarrollo pueden expresarse así:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \ldots$$

Si en el campo real o complejo una función $f(x)$ es desarrollable en serie de potencias, este desarrollo es único y viene expresado por la fórmula:

$$[44\text{-}4] \qquad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Llamaremos a esta fórmula *desarrollo indefinido de* MAC-LAURIN.

Si dos funciones desarrollables en serie toman iguales valores en un entorno cualquiera del origen, las dos series son idénticas, es decir, tienen iguales los coeficientes de las mismas potencias de x.

Porque en dicho entorno constituyen una sola función, y siendo iguales sus derivadas en el punto $x = 0$, el desarrollo es el mismo.

A igual conclusión se llega con sólo suponer la coincidencia de ambas funciones en infinitos puntos con un punto de acumulación (Cap. VI, nota II) en $x = 0$.

De este teorema, también llamado *principio de identidad* de las series, se deduce inmediatamente:

El desarrollo en serie de una función par sólo contiene po-

tencias de x con exponentes pares, y el desarrollo de una función impar sólo contiene exponentes impares.

Porque debiendo ser, en el primer caso, en el intervalo de convergencia,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = a_0 - a_1x + a_2x^2 - \ldots,$$

por el principio de identidad resulta:

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{2k+1} = 0,$$

y análogamente en el segundo caso.

2. **Desarrollo por la fórmula de Mac-Laurin.** — El teorema de unicidad simplifica el problema del desarrollo en serie, pues lo reduce a investigar si el desarrollo de MAC-LAURIN es legítimo o no.

Desde luego, dada una función cualquiera $f(x)$ que admita en el origen infinitas derivadas finitas, la fórmula de MAC-LAURIN que hemos introducido en el campo real, expresa:

$$[44\text{-}5] \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + T_n(x),$$

donde el término complementario, $T_n(x)$, tiene cualquiera de las formas obtenidas en § 39-3.

Es decir, llamando $S_n(x)$ a la suma de los $n+1$ primeros términos de la *serie* de MAC-LAURIN [44-4], en el campo real siempre es cierta la igualdad:

$$[44\text{-}6] \qquad f(x) = S_n(x) + T_n(x),$$

y se trata de averiguar cuándo coincidirá $f(x)$ con la serie indefinida, es decir, cuando será:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

La contestación es inmediata, pues esta condición equivale a esta otra:

$$[44\text{-}7] \qquad \lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0.$$

En el campo real (ver para el campo complejo, nota 2), *el desarrollo de una función* $f(x)$ *en serie de* MAC-LAURIN *es legítimo para todo valor de x que, sustituído en el término complementario* $T_n(x)$, *cumpla la condición* $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0$.

Obsérvese que esta condición lleva consigo la convergencia de la serie de MAC-LAURIN, puesto que $S_n(x)$ tiene como límite $f(x)$, que es finita, pero la convergencia por sí sola no implica que $T_n(x)$ tienda a 0. (Ver nota 1).

En la prática, conviene sin embargo comenzar examinando cuáles son los valores de x que hacen convergente la serie,

y después sustituirlos en el término complementario, para desechar aquellos que no cumplan la condición $\lim_{n \to \infty} T_n(x) = 0$.

Obtenemos así esta regla práctica para desarrollar en serie una función f (x): 1º Se calcula la expresión general de sus derivadas, o por lo menos sus valores para $x = 0$; 2º Se determina el campo de convergencia de la serie de MAC-LAURIN formada con estos coeficientes; 3º Se desechan los valores de x que no cumplen la condición $\lim_{n \to \infty} T_n(x) = 0$.

NOTAS: 1. Hemos visto que en el campo real, la condición $\lim T_n(x) = 0$ lleva consigo la convergencia de la serie de MAC-LAURIN, pero la recíproca no es cierta; puede suceder que la serie sea convergente, es decir, que $S_n(x)$ tenga un límite $S(x)$, pero que este límite no coincida con $f(x)$; entonces puede asegurarse que la función no es desarrollable en serie.

Ejemplo notable es la función de CAUCHY (§ 38-5):

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \qquad f(0) = 0,$$

cuyas derivadas en el campo real son nulas en el origen. El desarrollo de MAC-LAURIN sería:

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots$$

convergente para todo valor de x, pero que no coincide con la función en ningún intervalo, por pequeño que sea, puesto que la función sólo se anula para $x = 0$.

La razón de esta discrepancia es evidente: el valor del término complementario $T_n(x)$ coincide con el valor $f(x)$, por mucho que se avance en el desarrollo.

2. En la teoría de las funciones de variable compleja se demuestra (vol. III, § 115-10) que la condición necesaria y suficiente para que una función sea desarrollable en serie de potencias, es que admita derivada finita en un entorno de 0, cualquiera sea el incremento complejo Δz de la variable (§ 41-1, b). Por eso no es analítica e^{-1/x^2}; pues si bien admite derivada para Δx real, positivo o negativo, si se pone $x = iy$, la derivada en la dirección del eje y es infinita.

3. **Función racional. Desarrollo por división.** — a) No siempre es la fórmula de MAC-LAURIN [44-5] el medio más expedito para desarrollar en serie. Tal sucede, por ejemplo, con la función racional. Investiguemos si ésta es desarrollable en serie, esto es, si existe una serie convergente en un cierto círculo, tal que sea:

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

Desde luego, es condición *necesaria* que sea $b_0 \neq 0$, y también vamos a probar que es *suficiente*. En efecto, suponiendo $b_0 = 1$ (para lo cual basta dividir por él), como el producto de los m ceros del denominador es (§ 18-2) $x_1 x_2 \ldots x_m = (-1)^m / b_m$ el valor del denominador será (§ 18-2):

$$b_m (x - x_1)\ (x - x_2)\ \ldots\ (x - x_m) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right).$$

La fracción es, pues, el producto del polinomio numerador por las fracciones

$$\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} = 1 + \frac{x}{x_1} + \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \ldots, \quad |x| < |x_1|$$

. . . .

$$\frac{1}{1-\frac{x}{x_m}} = 1 + \frac{x}{x_m} + \left(\frac{x}{x_m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{x_m}\right)^n + \ldots, \quad |x| < |x_m| \ ;$$

o sea, es el producto de dicho polinomio numerador por estas m series absolutamente convergentes, y esta igualdad es válida para todos los valores de x que cumplan las condiciones

$$|x| < |x_1| \ , \ |x| < |x_2| \ , \ \ldots, \ |x| < |x_m| \ ;$$

además, por la continuidad de la función representada por una serie de potencias en el interior de su círculo de convergencia (§ 43-4, *c*), no podrá pertenecer a dicho círculo ninguna raíz del denominador (supuesto que no lo sea del numerador); luego:

El desarrollo en serie de una función racional es válido precisamente para todos los valores de x inferiores en valor absoluto al menor de los módulos de las raíces del polinomio denominador.

El radio del círculo de convergencia es, pues, el menor de los módulos de las raíces reales o imaginarias del polinomio denominador (cfr. § 44-1, nota).

b) Demostrada la existencia del desarrollo en serie de la función racional, sus coeficientes se calculan por su condición:

$$(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m) =$$
$$= a_0 + a_1x + \ldots + a_px^p,$$

y como es absoluta la convergencia de la serie en todo el interior del intervalo de convergencia, podemos ordenar los términos del primer miembro según las potencias de x, y en virtud del principio de identidad, sus coeficientes han de ser iguales a los del segundo miembro. Tenemos así el sistema de igualdades de condición:

$$[44\text{-}8] \quad \begin{cases} c_0 b_0 = a_0 \\ c_1 b_0 + c_0 b_1 = a_1 \\ c_2 b_0 + c_1 b_1 + c_0 b_2 = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_m b_0 + c_{m-1} b_1 + \ldots + c_0 b_m = a_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_p b_0 + c_{p-1} b_1 + \ldots + c_{p-m} b_m = a_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n b_0 + c_{n-1} b_1 + \ldots + c_{n-m} b_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

de donde se despeja sucesivamente:

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0},\ c_1 = \frac{a_1 - c_0 b_1}{b_0},\ \ldots,\ c_n = \frac{- c_{n-1}b_1 - \ldots - c_{n-m}b_m}{b_0},\ \ldots;$$

es decir, resultan los mismos coeficientes que si dividimos ambos polinomios por la regla ordinaria, prosiguiendo el proceso indefinidamente. Luego:

El desarrollo de una función racional se obtiene dividiendo el numerador por el denominador, ordenados según las potencias crecientes de x.

Esto mismo vale para el cociente de dos series, porque una vez demostrado, como se hace en la Teoría de funciones de variable compleja (vol. III), que existe tal desarrollo, sus coeficientes se calculan igualmente por división.

EJEMPLOS: 1. He aquí un desarrollo de función racional:

$$\frac{1 - x}{1 + x + x^2} = 1 - 2x + x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5 + \ldots$$

El radio de convergencia es 1, módulo de los ceros del denominador.

2. La función $\operatorname{tg} x$ se desarrolla como cociente de las series del seno y coseno (§ 45-2), y se obtiene:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \ldots;$$

su radio de convergencia es $\frac{\pi}{2}$, por ser el menor de los ceros del denominador.

3. Análogamente resulta:

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \ldots \quad ; \quad R = \pi.$$

4. También, por división, se obtiene:

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \frac{1\,385 x^8}{8!} + \ldots$$

Los números 1, -1, 5, -61, 1 385, ..., que, salvo los signos, aparecen en los numeradores, se llaman *números de* EULER, y se presentan también en otros muchos desarrollos.

c) *Series recurrentes.* — Las ecuaciones de condición [44-8] que determinan los coeficientes de la serie demuestran que cada $m + 1$ consecutivos:

$$c_{n-m},\ c_{n-m+1},\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n$$

están ligados por una ecuación lineal de coeficientes fijos:

$$b_m,\ b_{m-1},\ \ldots,\ b_1,\ b_0.$$

DEF.: Se llama *recurrente* toda serie cuyos grupos de coeficientes consecutivos, *desde uno de ellos en adelante*, satisfacen a una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes. Éstos constituyen la *escala de recurrencia* de la serie.

Dada una serie recurrente cualquiera, cuya escala se componga de $m + 1$ términos, si formamos las igualdades [44-8], obtenemos $p + 1$ números $a_0, a_1, \ldots, a_p$, y al dividir el polinomio que tiene estos coeficientes por el formado con los $b_0, b_1, \ldots, b_m$ de la escala, van resultando precisamente $c_0, c_1, c_2, \ldots$; luego:

Toda serie recurrente define una función racional, cuyo denominador tiene por coeficientes los de la escala de recurrencia.

EJEMPLO: La serie

$$1 + 3x + 7x^2 + \ldots + (2^n - 1)x^{n-1} + (2^{n+1} - 1)x^n + \ldots$$

es recurrente, pues cada tres coeficientes consecutivos están ligados por la relación

$$(2^{n+2} - 1) - 3(2^{n+1} - 1) + 2(2^n - 1) = 0,$$

que se verifica para todo valor de n; luego, pondremos:

$$1 . 1 = a_0$$
$$3 . 1 - 1 . 3 = a_1$$
$$7 . 1 - 3 . 3 + 1 . 2 = a_2,$$

y como valor de la serie resulta:

$$f(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2}.$$

NOTA: En ocasiones se puede hallar más fácilmente una ecuación lineal no homogénea que conduzca al mismo resultado. En el ejemplo anterior, *dos* coeficientes consecutivos, c_{n-1} y c_n, están en la relación $2c_{n-1} + 1 = c_n$, que conduce rápidamente al mismo resultado.

4. **Método de los coeficientes indeterminados.** — El método seguido para desarrollar en serie las funciones racionales puede aplicarse a muchos tipos de funciones. Consiste en designar con letras los coeficientes del desarrollo buscado, y someter la serie desconocida así formada a las condiciones que caracterizan la función dada, hasta llegar a una identidad a la cual debe satisfacer en todo su intervalo de convergencia; identificando los coeficientes en ambos miembros, resultan ecuaciones de condición que permiten calcular sucesivamente los coeficientes buscados.

La condición que determina la función dada, $y = f(x)$, puede ser una ecuación, algebraica o trascendente, a la que satisface y. También puede ser una ecuación que liga a y con sus derivadas y', y'', ...; estas ecuaciones se llaman *ecuaciones diferenciales*.

Complemento ineludible del método, en todos los casos, es el examen de la convergencia de la serie obtenida una vez calculados los coeficientes; porque sólo en esta hipótesis son legítimas las operaciones a que se ha sometido dicha serie para determinar sus coeficientes.

Además, es indispensable asegurarse si dicha ecuación algebraica, trascendente o diferencial, caracteriza completamente a la función dada, o si existen otras funciones que también la satisfacen, y entonces habrá que examinar a cuál de estas funciones corresponde el desarrollo obtenido.

Cuando *a priori* pueda asegurarse que la función es desarrollable en serie, entonces se simplifica el método, pues basta obtener una relación cualquiera a la cual deba satisfacer la serie, que sirva para determinar los coeficientes.

EJEMPLO: Apliquemos el método a la función exponencial e^x. Ésta satisface, en efecto, a la ecuación diferencial $y = y'$. Recíprocamente, si una función cumple la condición

$$\frac{y'}{y} = 1, \quad \text{o sea:} \quad D \ln y = 1,$$

debe ser $\ln y = x + c$, de donde $y = e^{x+c} = C e^x$, poniendo por brevedad $C = e^c$.

Determinemos todas las series que satisfacen a dicha ecuación diferencial:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots = a_1 + 2 a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

de donde, identificando:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n};$$

la serie obtenida es, pues, absolutamente convergente en todo el campo real, por ser $\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = 0$, y la función así construída, por satisfacer a la ecuación diferencial, debe ser del tipo $C . e^x$. En particular, para que sea $C = 1$, debe ser $a_0 = 1$, y resulta el desarrollo conocido.

EJERCICIOS

1. Demostrar que si las derivadas $f^{(n)}(x)$ se conservan acotadas en su conjunto en un entorno de 0, es $f(x)$ desarrollable en serie de MAC-LAURIN de radio infinito.

2. ¿Es desarrollable en serie de MAC-LAURIN $e^x + e^{-1/x^2}$?

3. Desarrollar en serie, por división,

$a)$ $1/(x^2 - 2x + 2)$; $b)$ $(1 + 5x)/(1 + 2x - 3x^2)$,

hallando las escalas de recurrencia de los coeficientes y los radios de convergencia.

4. Sumar las series recurrentes:

$a)$ $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots + (2n + 1) x^n + \ldots$

$b)$ $1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \ldots + (n + 1)^2 x^n + \ldots$

$c)$ $1 + (2^3 - 3) x + (2^4 - 4) x^2 + \ldots + (2^{n+2} - n - 2) x^n + \ldots$

5. Sumar $1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + \ldots$, donde la sucesión de coeficientes es la de FIBONACCI (§ 22-2, ej. 9): $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

6. Hallar el desarrollo de $f(x) = \operatorname{sen} x$ a partir de $f''(x) = - f(x)$ con las condiciones $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

7. Hallar los desarrollos de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ a partir de $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = - f(x)$; $f(0) = 0$, $g(0) = 1$.

8. Desarrollar, por coeficientes indeterminados,

$$x/(e^x - 1) = 1 + B_1 x + B_2 x^2/2! + B_3 x^3/3! + \ldots$$

calculando los números B_n llamados de BERNOULLI, hasta B_{14}, y establecer la fórmula simbólica $(B + 1)_n - B_n = 0$, donde se desarrolla el binomio, respecto al índice, como si fuera exponente. (Cfr. con Cap. XVI, nota II, a), donde se da otra función generatriz).

9. Estableciendo fórmulas de recurrencia para las derivadas en el origen, hallar los desarrollos de MAC-LAURIN de: $a)$ $y = \cos(m \operatorname{arc\,sen} x)$; $b)$ $y = \operatorname{tg} x$; $c)$ De este último, deducir el de $\ln \cos x$ y el radio de convergencia de ambas series.

§ 45. Aplicación a las trascendentes elementales

1. **Función exponencial** $y = e^x$. — *a*) Anteriormente (§ 39-5, *a*) hemos obtenido en el campo real el desarrollo finito

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

La serie indefinida es absolutamente convergente para todo valor real de x, pues la razón de un término al anterior es $\frac{x}{n}$; luego, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ tiende a cero, cualquiera sea x, y también tiende a cero el término complementario. Por lo tanto:

Para todo valor real de x es válido el desarrollo:

[45-1] $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

b) *El número e.* — En particular, para $x = 1$ obtenemos la serie:

[45-2] $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots,$$

que permite calcular e con tantas cifras decimales como se quiera. Para obtener el error cometido al tomar los n primeros términos, observemos que es exactamente:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!}, \quad \begin{pmatrix} 1 < e^\theta < e \\ 0 < \theta < 1 \end{pmatrix};$$

luego, el error cometido es por defecto y menor que $\frac{3}{n!}$.

Como cada término se deduce del anterior por una sencilla división por un entero, y decrecen muy rápidamente, con poco trabajo se llega a una excelente aproximación.

He aquí las primeras cifras del número e:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353\ldots$$

Nota: La misma fórmula demuestra que e es *irracional*; porque si fuese $e = \frac{p}{q}$ (p y q enteros), tomando $n = q + 1$ sería:

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \frac{e^\theta}{(q+1)!},$$

y multiplicando por $q!$,

$$p \cdot (q-1)! = \text{número entero} + \frac{e^\theta}{q+1},$$

igualdad imposible, pues siendo $e^\theta < 3$, $q + 1 \geqslant 3$, resulta $\frac{e^\theta}{q+1} < 1$.

No es tan fácil la demostración, dada por Ch. Hermite en 1873, de que e es trascendente (Cap. IV, nota I); puede verse en *Elementos de la Teoría de Funciones*, de J. Rey Pastor (citado en Cap. VI, nota VI, 2).

2. **Funciones circulares e hiperbólicas.** — *a*) *Funciones* sen x y cos x. — De [39-17] y [39-18] se obtienen los desarrollos siguientes, válidos para todo valor real de x:

[45-3] $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

[45-4] $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

En efecto, ambas series son convergentes para todo valor de x, pues la razón de cada término al anterior tiende a cero; luego, $\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ y $\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ tienden a cero, cualquiera sea x, y también tienden a cero los términos complementarios.

b) *Funciones* sh x y ch x. — De modo análogo se obtienen (a partir de § 39-5, ejercicio) los desarrollos siguientes, también válidos para todo valor real de x:

[45-5] $$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

[45-6] $$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

3. **Las trascendentes elementales en el campo complejo.** — *a*) La definición de las funciones circulares es una excepción dentro del plan de nuestra obra. El único modo riguroso de definición admisible en Análisis es el aritmético puro, y las consideraciones geométricas deben ser relegadas al secundario papel de imágenes que facilitan la recordación de las demostraciones aritméticas.

No obstante, hemos introducido las funciones sen x, cos x, por medio de una definición geométrica, y también con demostración geométrica hemos admitido el teorema $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, en el que nos hemos apoyado para calcular la derivada.

Mediante tales consideraciones geométricas llegamos al fin a encontrar una expresión aritmética pura, en forma de serie convergente, para estas funciones circulares.

Si bien queda justificado este proceso desde el punto de vista didáctico, por razones de brevedad y sencillez, parece sin embargo forzoso, al llegar aquí, dar el medio de salvar esta excepción, que, desde el punto de vista exclusivamente lógico, constituye una deficiencia.

He aquí, pues, el método aritmético puro que puede seguirse en Análisis para introducir las funciones circulares, sin hacer llamamiento alguno a la intuición geométrica, método también aplicable a las hiperbólicas:

Como *definición* de tales funciones adoptamos las series convergentes *de variable real o compleja* [45-3] a [45-6].

b) **Dentro del campo real, las funciones circulares son in-**

dependientes de la exponencial. Por lo contrario, las funciones hiperbólicas se reducen a combinaciones sencillas de exponenciales, como expresan las fórmulas [29-1] y [29-2] dadas como definiciones, y fácilmente obtenibles de las definiciones por series.

Expresiones análogas se obtienen en el campo complejo para las funciones circulares, si se *define* e^x para x complejo por el desarrollo [45-1] *. Aplicándolo a e^{ix}, e^{-ix} (x real), y separando partes reales e imaginarias, resultan las *fórmulas de* EULER:

[45-7] $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x; \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$

equivalentes a éstas:

[45-8] $$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

que pueden servir para definir las funciones circulares mediante la exponencial, como hicimos con las funciones hiperbólicas.

Obsérvese también que las funciones hiperbólicas quedan comprendidas en las circulares en el campo complejo, por ser $\operatorname{ch} x = \cos ix$ y $\operatorname{sh} x = -i \operatorname{sen} ix$.

La primera relación [45-7] muestra que un complejo α de módulo r y argumento φ puede escribirse en la forma exponencial [9-13]: $\alpha = re^{i\varphi}$ y justifica la nota de § 9-4. Las demostraciones de § 9-5 y § 10-1 y 2 (véanse las correspondientes notas) probarían que las leyes formales de las potencias se conservan para estos números, lo que se demuestra aritméticamente recurriendo a los desarrollos en serie.

NOTAS: 1. Las fórmulas de EULER prueban que e^z es *periódica*, lo que no advertimos al estudiarla en el campo real, por ser imaginarios los períodos: $2k\pi i$. De ellas se deduce la igualdad $e^{i\pi} + 1 = 0$, que relaciona los cinco números más importantes de la Matemática, cuya introducción histórica en campos tan diversos no podría hacer sospechar su conexión. Esta igualdad presidía la entrada del salón dedicado a la Matemática en la Exposición Internacional de París de 1937.

2. Las demostraciones hechas para funciones hiperbólicas (§ 29-1), de la relación entre ellas, fórmulas de adición, etc., pueden repetirse para funciones circulares mediante las fórmulas de EULER [45-8], o para unas y otras mediante los desarrollos en serie. También pueden obtenerse de estos desarrollos las fórmulas de derivación.

3. En § 21-5, *c*), se ha visto que para x real es:

[45-9] $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

* La definición de las trascendentes elementales en el campo complejo mediante las mismas series de potencias que las representan en el campo real, se justifica también plenamente con el principio de identidad en la teoría de la prolongación analítica (cfr. vol. III).

fórmula subsistente para x complejo cualquiera, si el segundo miembro se define por [45-1]. En efecto, si se desarrolla $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ por la fórmula del binomio (§ 12-1):

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n}.$$

y se toma:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = S^*_m + R^*_m \begin{cases} S^*_m = 1 + n\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \dots + \binom{n}{m-1}\frac{x^{m-1}}{n^{m-1}} \\ R^*_m = \binom{n}{m}\frac{x^m}{n^m} + \dots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n} \end{cases}$$

$$e^x = S_m + R_m \begin{cases} S_m = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}, \\ R_m = \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \dots, \end{cases}$$

dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, sea m tal que $\sum_{p=m}^{\infty}\left|\frac{x^p}{p!}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, posible por ser [45-1] absolutamente convergente.

Entonces, al tener en cuenta

$$\left|\binom{n}{p}\frac{x^p}{n^p}\right| = \left|\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{n^p}\cdot\frac{x^p}{p!}\right| \leqslant \left|\frac{x^p}{p!}\right|$$

$$(p = m,\ m+1,\ \dots,\ n),$$

se cumplirá también:

[45-10] $$|R_m| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad |R^*_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para $n > m$ es:

$$|S_m - S^*_m| = \left|\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{n(n-1)}{n^2}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right) + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\left(1-\frac{n(n-1)\dots(n-m+2)}{n^{m-1}}\right)\right|,$$

que para *m fijo* y $n \to \infty$ tiende a cero; es decir, existe un valor de ν tal que para $n > \nu$ es $|S_m - S^*_m| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Entonces, teniendo en cuenta [45-10], hemos probado que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\nu(\varepsilon)$ tal que para todo $n > \nu(\varepsilon)$ se conserva

$$\left|e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leqslant |S_m - S^*_m| + |R_m| + |R^*_m| < \varepsilon,$$

quedando así demostrado [45-9] para x complejo cualquiera.

Ésta es la línea de pensamiento que en forma no rigurosa siguió L. Euler en su *Introductio in analysis infinitorum* (Lausanne, 1748, cap. VII. p. 85), para obtener la serie exponencial.

c) De la extensión de la función exponencial al campo complejo resulta una extensión análoga para su inversa, la función logarítmica. Como $w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = r\, e^{iy}$ $(r = e^x)$ toma todo valor complejo con la sola excepción de $w = 0$, la función logarítmica quedará definida para todo el plano propio, salvo el origen. Poniendo el número en la forma exponencial:

[45-11] $$\alpha = r\, e^{i\varphi},$$

resulta para su logaritmo:

[45-12] $$\ln \alpha = \ln r + i\varphi$$

pues por la conservación de las leyes de cálculo para exponentes imaginarios es:

[45-13] $$e^{\ln r + i\varphi} = e^{\ln r} \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i\varphi} = \alpha.$$

Por la periodicidad de la función exponencial (nota 1), resultan infinitas determinaciones para el logaritmo, pues [45-12] lo determina a menos de $2\,k\,\pi\,i$, por la multiformidad del argumento $\varphi = \arg \alpha$.

Llamaremos *determinación principal* $\operatorname{Ln} \alpha$ del logaritmo a la que resulta en [45-12] cuando $-\pi < \varphi \leqq \pi$, es decir, cuando φ es el valor principal $\bar{\varphi}$ del argumento (§ 9-4) $\bar{\varphi} = \operatorname{Arg} \alpha$. Los logaritmos de números positivos que hemos considerado hasta ahora corresponden a esta determinación principal; entonces:

[45-14] $$\operatorname{Ln} \alpha = \operatorname{Ln} |\alpha| + i \operatorname{Arg} \alpha$$

[45-15] $$\ln \alpha = \operatorname{Ln} \alpha + 2\,k\,\pi\,i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

d) *Potencias de base y exponentes complejos.* — En § 8-6 hemos definido la potencia de exponente real sólo para base *positiva*, advirtiendo sobre las dificultades que pueden presentarse si consideramos base negativa, aun adoptando aproximaciones para el exponente real que hagan posible la potenciación de exponente racional en el campo real. También aquí el estudio en el campo complejo aclara la cuestión.

Todo número complejo α puede escribirse en forma exponencial [45-13], y convendremos en definir la potencia de base cualquiera α y exponente $\sigma = s + t\,i$ del siguiente modo:

[45-16] $$((\alpha))^{\sigma} = e^{\sigma \cdot \ln \alpha} = e^{(s+t\,i)(\operatorname{Ln} |\alpha| + i \arg \alpha)} =$$
$$= |\alpha|^{s} \cdot e^{-t(\operatorname{Arg}\alpha + 2k\pi)}\, e^{i[t \operatorname{Ln} |\alpha| + s(\operatorname{Arg}\alpha + 2k\pi)]},$$

donde están puestos de manifiesto el módulo y argumento de la potencia obtenida.

Para $k = 0$ resulta el valor o determinación llamado principal, para el que se reserva la notación α^{σ}. El valor o determinación general [45-16] se designa por $((\alpha))^{\sigma}$ (CAUCHY).

Cuando, y sólo cuando, σ es real ($t = 0$), el módulo de [45-16] es el mismo para todas las determinaciones de la potencia. Si además es $\sigma = s$ entero, los distintos argumentos de $((\alpha))^{\sigma}$ difieren en $2\,k\,\pi$, y entonces, y sólo entonces, la potencia [45-16] tendrá un sólo valor $\alpha^{s} = |\alpha|^{s} \cdot e^{i\,s \operatorname{Arg} \alpha}$ que es la ya conocida fórmula de MOIVRE (§ 10-1). Si el exponente es un número real y racional: $\sigma = p/q$, el argumento de $((\alpha))^{\sigma}$ da, sólo para la potencia considerada, q valores distintos (§ 10-2).

En cambio, si σ es real e irracional, se obtienen para $((\alpha))^{\sigma}$ infinitos valores de igual módulo y distinto argumento, mientras que si σ es imaginario, los infinitos valores de $((\alpha))^{\sigma}$ son de módulos distintos.

Si la base α es real negativa ($\operatorname{Arg} \alpha = \pi$) y el exponente $\sigma = s$ es real, sólo para $s(2k+1)$ entero tendrá $((\alpha))^{s}$ determinación real, lo que nunca podrá suceder si s es irracional o es racional de denominador par en su expresión fraccionaria irreducible.

Ahora se explica la paradoja de § 8-6, donde considerábamos el encaje de intervalos del exponente $+1 = \left\{ \frac{2n}{2n+1} ; 1 \right\}$ y resultaba que las aproximaciones $(-1)^{2n/(2n+1)} = +1$ no eran contiguas a $(-1)^{1} = -1$. En realidad, es:

$$((-1))^{2n/(2n+1)} = e^{i \frac{2n}{2n+1}(2k+1)\pi},$$

y al variar n, para mantenerse en la determinación real $+1$ *se ha de variar la determinación* $k = n$ *de la potencia*, mientras que para k *fijo*, cada determinación tiene por límite $e^{i(2k+1)\pi} = (-1)^{1} = -1$ para $n \to \infty$.

EJEMPLOS: 1. $((i))^{i} = e^{i \ln i} = e^{i[\operatorname{Ln} 1 + i(\pi/2 + 2k\pi)]} =$

$$= e^{-\frac{4k+1}{2}\pi}$$

infinitos valores reales de módulos distintos.

2. $((1))^{1/\pi} = e^{(\ln 1)/\pi} = e^{i 2k\pi/\pi} = \cos 2k + i \operatorname{sen} 2k$, conjunto denso de infinitos valores distintos sobre la circunferencia unidad.

4. **Serie logarítmica.** — *a*) La función $\ln x$ no es desarrollable en serie de potencias, pues no está definida en $x = 0$ (§ 45-3, *c*). En cambio, para la función $\ln(1+x)$ podemos partir del desarrollo finito (§ 39-5, *d*), pero es más cómodo formar la primitiva de:

$$[45\text{-}17] \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots,$$

que nos da, una vez determinada la constante (§ 43-5), según la determinación que adoptemos para el logaritmo (§ 45-3, *c*), por ejemplo, la principal:

[45-18]

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots;$$

este desarrollo es válido en el campo real o complejo como [45-17], para $|x| < 1$.

Como la serie converge para $x = 1$, por el criterio de series alternadas (§ 22-3, *a*), resulta del teorema de ABEL (§ 43-4, *b*):

$$[45\text{-}19] \qquad \ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

Poniendo $-x$ en vez de x resulta:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

y restando de [45-18]:

$$[45\text{-}20] \qquad \ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right).$$

b) Cálculo de logaritmos neperianos. — El cálculo de los logaritmos neperianos se hace por medio de una fórmula recurrente, que permite hallar cómodamente $\ln(n+h)$, conocido $\ln n$; para ello basta calcular el incremento $\ln(n+h) - \ln n = \ln \dfrac{n+h}{n}$, y esto se logra con la fórmula [45-20], dando a x un valor conveniente para que sea:

$$\frac{n+h}{n} = \frac{1+x}{1-x}; \quad \text{es decir,} \quad x = \frac{h}{2n+h} < 1.$$

La fórmula buscada es, pues, la siguiente:

[45-21]

$$\ln(n+h) = \ln n + 2\left(\frac{h}{2n+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2n+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2n+h}\right)^5 + \dots\right),$$

y en particular,

$$\ln(n+1) = \ln n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots\right),$$

que da el logaritmo de un número entero, conocido el del número precedente.

Se comienza, pues, por calcular $\ln 2$, haciendo $n = 1$, y se obtiene:

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \frac{1}{7.9^3} + \dots\right),$$

serie que converge mucho más rápidamente que [45-19]. Con sólo ocho términos se obtienen las cifras exactas $\ln 2 = 0{,}69314718\dots$, mientras que con [45-19] serían precisos más de 100 *millones de términos*.

Sin nuevo cálculo, tenemos $\ln 4 = 2.\ln 2 = 1{,}3862943\dots$, y por lo tanto,

$$\ln 5 = \ln 4 + \frac{2}{9}.\left(1 + \frac{1}{3.9^2} + \frac{1}{5.9^4} + \dots\right) = 1{,}6094379\dots$$

$$\ln 10 = \ln 5 + \ln 2 = 2{,}3025851\dots$$

Por consiguiente, el módulo de los logaritmos decimales es:

$$M = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}4342945\dots$$

c) Tablas de logaritmos decimales. — Para formar una tabla de logaritmos decimales con 7 cifras hasta 100 000, basta calcularlos desde 10^4 a 10^5, y para esto se toma solamente un término en las series [45-20] ó [45-21]. Ya hicimos en § 35-6:

$$\lg(n+h) - \lg n \sim \frac{2Mh}{2n+h},$$

indicando con el signo $\sim$ una igualdad aproximada. Sustituyendo [45-20] ó [45-21] por una serie geométrica, el error es menor que

$$\frac{2M}{3}\,\frac{x^3}{1-x^2} < \frac{2M}{3}\,\frac{x^3}{1-x} < \frac{2M}{3}\,\frac{h^3}{(2n+h)^3\,\dfrac{2n}{2n+h}} < \frac{2M}{3}\cdot\frac{h^3}{(2n)^3},$$

y siendo $2M < 1$, $h \leqslant 1$, $n > 10^4$, el error es:

$$\varepsilon < \frac{1}{24n^3} < \frac{1}{2.10^{13}}$$

Comenzaremos, pues, por el valor $n = 10^4$, y con la fórmula práctica:

$$\lg(n+1) \sim \lg n + \frac{2\,M}{2\,n+1},$$

obtenemos, por simple división, lg 10 001 con 13 *cifras exactas*.

Aplicando de nuevo la relación anterior, resulta lg 10 002, lg 10 003, ..., lg 99 999.

Como los errores se van acumulando, convendrá calcular directamente algunos logaritmos intermedios, lo cual servirá además de comprobación.

5. Serie binómica. — *a*) Ya sabemos (§ 39-5, *c*) que en el campo real, el desarrollo finito es:

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{n} x^n + T_n.$$

Para obtener el radio de convergencia de la serie indefinida, prescindiremos, desde luego, del caso en que m sea un número natural, porque entonces resulta un polinomio, siendo $\binom{m}{m} x^m = x^m$ su último término (§ 12-1).

Si m es cualquier número real o complejo, pero no natural, resulta una serie cuyo término general tiene por coeficiente el coeficiente binomial generalizado para m cualquiera:

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)}{n!}.$$

Como llega a ser $n > |\,m\,|$, la razón de dos consecutivos es, en valor absoluto:

$$\frac{|\,a_{n+1}\,|}{|\,a_n\,|} = \left|\frac{m-n}{n+1}\right| \to 1;$$

luego, el radio de convergencia es $R = 1$.

Para ver si la serie obtenida:

$$y = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{n} x^n + \ldots$$

representa en todo su intervalo de convergencia la función $(1 + x)^m$, podría en el campo real estudiarse el término complementario T_n, pero es mejor usar el método de § 44-4. Formando su derivada, se comprueba fácilmente la identidad:

$$\frac{y'}{y} = \frac{m}{1+x}, \quad \text{o sea: } D \ln y = D \ln\ (1+x)^m,$$

con lo cual (§ 35-3) $\ln y$ y $\ln\ (1+x)^m$ difieren en una constante, que es 0, pues ambas funciones se anulan para $x = 0$, y entonces, $y = (1+x)^m$.

Prolongada al campo complejo, la serie representa el valor principal (§ 45-3, *d*) de la potencia (¿por qué?).

Poniendo $(a + x)^m = a^m \left(1 + \dfrac{x}{a}\right)^m$, resulta la serie binómica o de NEWTON, en la forma:

[45-22] $$(a+x)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} x + \binom{m}{2} a^{m-2} x^2 + \ldots$$
convergente para $|x| < |a|$.

EJEMPLOS: Para $|x| < 1$ son válidos los desarrollos:

1. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2.4} x^2 + \frac{1.3}{2.4.6} x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} x^4 + \ldots$

2. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1.3}{2.4} x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^4 - \ldots$

3. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^8 + \ldots$

b) Generalizando la serie de NEWTON para m natural. se obtiene la potencia m-ésima de una serie:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^m = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

Puesto que sabemos que tal serie existe, ya que a ella se puede llegar por multiplicaciones sucesivas por la serie dada, lo más cómodo para determinar sus coeficientes es derivar logarítmicamente, con lo que obtenemos la identidad:

$$m(a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots)(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots) =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)(c_1 + 2c_2 x + \ldots + n c_n x^{n-1} + \ldots),$$

de donde, identificando, obtenemos las ecuaciones de condición:

$$m a_1 c_0 = a_0 c_1$$
$$m(a_1 c_1 + 2 a_2 c_0) = 2 a_0 c_2 + a_1 c_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que, juntas con la relación $c_0 = a_0^m$, obtenida directamente haciendo $x = 0$, determinan sucesivamente los coeficientes del desarrollo. También se puede llegar por multiplicaciones sucesivas o por la fórmula de LEIBNIZ (§ 12-2).

c) *Cálculo de raíces numéricas.* — La serie binómica permite calcular con gran aproximación las raíces de los números.

Sea el número entero N, y a una raíz cuadrada por defecto (por ejemplo, la raíz entera). Poniendo $N = a^2 + x$, será:

$$\sqrt{N} = (a^2 + x)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 + \frac{x}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 + \frac{x}{2a^2} - \frac{x^2}{8a^4} + \frac{x^3}{16.a^6} - \ldots\right),$$

serie que converge muy rápidamente si $\frac{x}{2a^2}$ es pequeño; y siendo alternada, sabemos (§ 22-3, a), que el error cometido tomando varios términos, es menor que el siguiente. Por ejemplo, para

$$\sqrt{N} = a + \frac{x}{2a}, \quad \text{es} \quad \varepsilon < \frac{x^2}{8a^3} \text{ (por exceso).}$$

EJEMPLO 4: Indicando con el signo $\sim$ las igualdades aproximadas, tenemos:

$$\sqrt{627} = \sqrt{25^2 + 2} \sim 25 + \frac{2}{50} = 25{,}04 \quad , \quad \varepsilon < \frac{4}{8.25^3} < \frac{1}{3.10^4};$$

por lo tanto, $\quad 25{,}0399 < \sqrt{627} < 25{,}0400.$

Con un término más resulta:

$$25{,}039\,968\,00 < \sqrt{627} < 25{,}039\,968\,06.$$

A veces convendrá efectuar antes transformaciones adecuadas; por ejemplo: $\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{25+2} \sim \frac{1}{3}\left(5 + \frac{2}{10}\right) \sim 1{,}732$ con todas sus cifras exactas, por ser $\varepsilon < \frac{1}{3}\,\frac{4}{8.125} < 0{,}0014$.

Usando el desarrollo de $\sqrt{2} = a(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$, siendo a un valor adecuadamente aproximado de $\sqrt{2}$ y $a^2 = 2 - 4x$, en 1950 R. COUSTAL ha calculado 1032 decimales de $\sqrt{2}$, para estudiar la distribución de los dígitos en $\sqrt{2}$ y en $1/\sqrt{2}$ (cfr. nota II, *b*).

d) He aquí algunas fórmulas aproximadas de uso frecuente:

$$(1+x)^m \sim 1 + mx,$$

siendo m cualquiera y $|x| < 1$. De ella resultan inmediatamente (despreciando términos en x^2, xy, y^2, ...):

$$\frac{1+x}{1+y} \sim 1 + x - y, \quad \frac{(1+x)^m}{(1+y)^n} \sim 1 + mx - ny.$$

EJEMPLO 5: Cálculo rápido:

$$\frac{(100{,}2)^2 . 9{,}89^3}{(100{,}3)^5 . 20} = \frac{10^4(1+0{,}002)^2 . (1-0{,}011)^3 . 10^3}{10^{11} . (1+0{,}003)^5 . 2}$$
$$\sim \tfrac{1}{2}\, 10^{-4}(1 + 0{,}004 - 0{,}033 - 0{,}015) = 0{,}0000478.$$

6. Desarrollos de las funciones circulares inversas. — Todos ellos se obtienen rápidamente mediante las series derivadas.

a) $y = \text{arc tg } x$. La derivada admite el desarrollo inmediato en serie geométrica:

$$y' = 1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \pm x^{2n} \mp \ldots$$

convergente para $|x| < 1$. Pasando a las funciones primitivas, resulta (§ 43-5, *b*):

[45-23] $$\text{arc tg } x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Haciendo $x = 0$, el segundo miembro se reduce a C, y como entre todos los arcos que tienen la tangente 0 se elige el menor, que es 0, resulta $C = 0$. (Para las otras determinaciones de arc tg x, resulta análogamente $C = n\pi$).

NOTA: Para $x = 1$, la serie converge, pues resulta alternada con un término general que tiende a 0, y por el teorema de ABEL (§ 43-4, *b*), coincide con arc tg 1, resultando el desarrollo:

[45-24] $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

serie llamada de GREGORY o de LEIBNIZ, cuya lenta convergencia la hace inservible para el cálculo de π (ver nota II).

b) *Desarrollo de* arc sen x *y* arc cos x. — La derivada de $y = \text{arc sen } x$ es:

$$y' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Esta potencia se desarrolla como hemos visto en § 45-5, ejemplo 3, y pasando a la función primitiva resulta:

$$\text{arc sen}\, x = C + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

Como la función arc sen x se anula en la determinación principal cuando el seno es $x = 0$, el valor de la constante es $C = 0$.

La serie de arc cos $x = (\pi/2)$ — arc sen x, se deduce fácilmente de la anterior, restándola de $\pi/2$.

Ejercicios

1. Demostrar en el desarrollo [45-1] la siguiente acotación del resto, válida para $|x| < n + 1$: $|R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n!} \frac{n+1}{n+1-|x|}$.

2. Probar que son irracionales sen 1, cos 1, sen a/b, cos a/b, $e^{a/b}$, para a y b enteros $a \leqslant b$. (Para $a > b$, los desarrollos son lentamente convergentes y no se puede aplicar el método dado para e en § 45-1, nota).

3. Mediante división de series (§ 44-3) obtener:

$$\text{cotg}\, x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \dots$$

$$\text{cosec}\, x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360} x^3 + \frac{31}{15\,120} x^5 + \dots$$

4. Demostrar que:

$$\text{sen}\,(\theta + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}\left(\theta + n\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos\,(\theta + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\theta + n\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^n}{n!}.$$

5. Demostrar que la exponencial compleja tiene también la propiedad $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$.

6. Partiendo de $2^n \cos^n x = (e^{ix} + e^{-ix})^n$, $2^n \text{sen}^n x = (e^{ix} - e^{-ix})^n / i^n$, demostrar las identidades (cfr. ejercicio 8 de § 12):

$$2^n \cos^n x = \cos n x + \binom{n}{1} \cos\,(n-2)\,x + \dots + \binom{n}{n} \cos\,(n - 2n)\,x,$$

$$2^n \text{sen}^n x = (-1)^{n/2} \left[\cos n x - \binom{n}{1} \cos\,(n-2) x + \right.$$

$$\left. + \dots + (-1)^n \cos\,(-n x) \right],\ n \text{ par};$$

$$= (-1)^{(n-1)/2} \left[\text{sen}\, n x - \binom{n}{1} \text{sen}\,(n-2) x + \right.$$

$$\left. + \dots + (-1)^n \text{sen}\,(-n x) \right],\ n \text{ impar}.$$

7. Separando partes reales e imaginarias en $e^{ix} + e^{i(x+h)} + \dots + e^{i(x+nh)}$, probar las identidades:

$$\cos x + \cos\,(x+h) + \dots + \cos\,(x + n h) =$$
$$= \text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,(n+1)\,h.\ \cos\,(x + \tfrac{1}{2} n h)/\text{sen}\,\tfrac{1}{2} h,$$
$$\text{sen}\, x + \text{sen}\,(x+h) + \dots + \text{sen}\,(x + n h) =$$
$$= \text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,(n+1)\,h.\ \text{sen}\,(x + \tfrac{1}{2} n h)/\text{sen}\,\tfrac{1}{2} h.$$

8. *a*) Del desarrollo de $(1-z)^{-1}$, $z = r.e^{i\varphi}$; o bien: *b*) hallando escalas de recurrencia para las series, obtener:

$$\frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi; \quad \frac{r \operatorname{sen}\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\varphi.$$

9. Probar que:

$$e^{ax}\cos bx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rx)^n}{n!} . \cos n\theta; \quad e^{ax}\operatorname{sen} bx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(rx)^n}{n!} \operatorname{sen} n\theta;$$

siendo $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} b/a$. (Cfr. ejercicio 5 de § 38).

10. Demostrar, para variable compleja $z = x + iy$, que

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y,$$
$$\cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sh} y,$$
$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y,$$
$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

Deducir que los únicos ceros de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son los reales ya conocidos.

11. Obtener los logaritmos de $-\sqrt{3}+i$, $-i$, $-1-i$. Gráficas.

12. Calcular 2^i, $(-1)^i$, $(-1)^{1/\pi}$, $(1-i)^{1+i}$, $(1+i)^{\sqrt{2}}$, $(3+2i)^{2+3i}$. Gráficas correspondientes.

13. Se dice que la igualdad entre dos miembros multiformes se verifica completamente, si cada valor de uno es igual a algún valor del otro, y recíprocamente. Estudiar, en el campo complejo, cuáles son las igualdades:

1º) $1/z^\mu = z^{-\mu}$; 2º) $z^\mu . w^\mu = (z . w)^\mu$; 3º) $z^\mu z^\nu = z^{\mu+\nu}$,
que se verifican completamente, los casos de excepción y la correspondencia de valores principales.

14. Estudiar para x real (positivo o negativo), en qué casos es x^x real, y hallar los valores reales de $(1/3)^{1/3}$, $(1/2)^{1/2}$, e^e, $(-2/3)^{-2/3}$, $(-1/3)^{-1/3}$, $(-1/4)^{-1/4}$, $(-\pi)^{-\pi}$.

15. Demostrar que son irracionales los logaritmos decimales de los números naturales que no sean potencias de exponente entero de 10.

16. Hallar los x para los cuales: 1º) vale 0, 2º) vale 1, 3º) no es real, el $\log\log x$ y el $\log\log\log x$ en los sistemas de bases e y 10.

17. Si $m \neq n$ enteros, es $e^{2m\pi i} = e^{2n\pi i} = 1$; por lo tanto,

$$\left(e^{2m\pi i}\right)^i = \left(e^{2n\pi i}\right)^i,$$

es decir: $e^{-2m\pi} = e^{-2n\pi}$, evidentemente falso. ¿Dónde está el error?

18. Desarrollando de dos maneras la función

$$\ln(1-2x\cos\theta+x^2) = \ln(1-xe^{i\theta}) + \ln(1-xe^{-i\theta}),$$

probar que:

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta - \frac{n}{1!}2^{n-3}\cos^{n-2}\theta + \frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-4}\theta - \ldots$$

19. Verificar que (con sumas desde $n = 1$ a ∞):

$$\ln x = \Sigma(-1)^{n-1}(x-1)^n/n, \quad \text{en} \quad 0 < x \leqslant 2;$$
$$= \Sigma(x-1)^n/n\,x^n, \quad \text{en} \quad x \geqslant \tfrac{1}{2};$$
$$= 2\Sigma \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}, \quad \text{en} \quad x > 0.$$

20. Acotar el resto de la serie de $\sqrt{1+x}$ (§ 45-5, ej. 1).

21. Obtener los desarrollos, válidos para $-1 < x \leqslant 1$, y estudiar el comportamiento para $x = -1$:

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \tfrac{1}{3}x - \frac{1.2}{3.6}x^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}x^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \tfrac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4 - \dots$$

$$\sqrt[4]{1+x} = 1 + \tfrac{1}{4}x - \frac{1.3}{4.8}x^2 + \frac{1.3.7}{4.8.12}x^3 - \frac{1.3.7.11}{4.8.12.16}x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} = 1 - \tfrac{1}{4}x + \frac{1.5}{4.8}x^2 - \frac{1.5.9}{4.8.12}x^3 + \frac{1.5.9.13}{4.8.12.16}x^4 - \dots$$

22. *a*) Probar que $y = 1/\sqrt{1-2xz+z^2}$ es desarrollable en serie de potencias de z con coeficientes polinomios en x:

$$y = P_0 + P_1(x)z + P_2(x)z^2 + \dots + P_n(x)z^n + \dots$$

b) Probar que los coeficientes se determinan a partir de $P_0 = 1$, $P_1 = x$, por la fórmula de recurrencia $(n+1)P_{n+1} = x(2n+1)P_n - nP_{n-1}$, y entonces son los *polinomios de* LEGENDRE, que estudiaremos en el capítulo XVI, nota III.

23. Estudiar la serie binómica [45-22], con $a = 1$ y m real, en los extremos del intervalo de convergencia en el campo real. Deducir que la suma de los números combinatorios de numerador m es 2^m para todo $m > -1$, y que la suma alternada de dichos coeficientes es nula para todo $m > 0$.

24. Calcular con cinco decimales $\sqrt{66}$, $\sqrt[3]{1031}$, $\sqrt[5]{2}$, mediante la serie binómica.

25. La serie $x = \sqrt{1-(1-x^2)} = \Sigma a_n(1-x^2)^n$ es uniformemente convergente para $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

26. Obtener el desarrollo de $\operatorname{arc\,tg} x$ mediante las expresiones de las derivadas sucesivas dadas en ejercicios 2 y 3 de § 38.

27. Hallar en medida sexagesimal el ángulo cuyo seno es 1/5 mediante la serie del $\operatorname{arc\,sen} x$, acotando el error que se comete al detener el desarrollo en x^5.

28. De [45-23] (con $C = 0$), obtener los desarrollos para la determinación principal:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots \text{ para } x \geqslant 1,$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots \text{ para } x \leqslant -1.$$

29. Deducir los desarrollos, análogos a los de § 45-6:

$$\operatorname{arg\,tgh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots, -1 < x < 1;$$

$$\operatorname{arg\,sh} x = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots, -1 \leqslant x \leqslant 1$$

30. Desarrollar en serie de potencias de h/l la longitud s del arco de circunferencia de cuerda $2l$ y flecha h.

NOTAS AL CAPÍTULO XI

I. Teoremas tauberianos. — El recíproco del teorema de ABEL (§ 43-4, *b*) no es cierto. Si $f(x) = \Sigma a_n x^n \to s$ para $x \to 1^-$, puede no ser convergente Σa_n. Por ejemplo: $\Sigma(-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x} \to \dfrac{1}{2}$, pero $\Sigma(-1)^n$ no es convergente (cfr. Cap. V, nota I, *g*).

En 1897 demostró A. TAUBER el siguiente célebre teorema:

Si en el campo real la serie $f(x) = \Sigma a_n x^n$, *de radio* 1, *converge hacia* s *para* $x \to 1^-$ *y* $n a_n \to 0$ *para* $n \to \infty$, *la serie converge en el punto* $x = 1$ *y es* $\Sigma a_n = s$.

Para probar que converge hacia s la suma de los n primeros términos a_r, formamos la diferencia:

$$[XI\text{-}1] \qquad \sum_0^n a_r - \sum_0^n a_r x^r = \sum_0^n a_r (1 - x^r) = (1 - x) \sum_1^n a_r (1 + x + \ldots + x^{r-1}),$$

cuyo valor absoluto es menor que $(1 - x) \Sigma r a_r = \frac{1}{n} \sum_1^n r a_r$ si se elige $x = 1 - (1/n)$. Como $n a_n \to 0$, este promedio tiende también a 0 (Cap. V, nota I, *b*); luego, el minuendo tendrá igual límite que el sustraendo para $x = 1 - (1/n)$; éste difiere de $f(x)$ en el resto de la serie, el cual, tomando n suficientemente grande para que sea $r \mid a_r \mid < \varepsilon$ desde $r > n$, se acota así:

$$| a_{n+1} x^{n+1} + \ldots | < \frac{\varepsilon}{n} (x^{n+1} + \ldots) = \frac{\varepsilon}{n} \frac{x^{n+1}}{1 - x} < \varepsilon,$$

puesto que para los valores elegidos de x el denominador vale $1/n$ y el numerador $x^{n+1} < 1$.

Resulta, pues, que el sustraendo de [XI-1] converge como $f(1 - 1/n)$ para $n \to \infty$, y por lo tanto, $\Sigma a_n = s$.

Cuando de la convergencia de un cierto algoritmo (Cap. V, nota I, *g*), más una condición complementaria (en este caso, $n a_n \to 0$), se deduce otro tipo de convergencia, esta propiedad se llama *teorema tauberiano*, en honor de TAUBER.

II. El número π. — *a*) Ya hemos dicho que la serie [45-24] es inservible para calcular π, debido a su lenta convergencia. Si por ejemplo deseamos π con un error menor que 0,001 habría que calcular hasta el término $\frac{1}{3\,999}$, esto es, *dos mil términos*.

En vez de hallar directamente $\pi/4$, es mejor descomponerlo en suma o diferencia de múltiplos de dos arcos cuyas tangentes se conozcan y que sean suficientemente pequeños para la rápida convergencia de la serie de $\operatorname{arc\,tg} x$ [45-23].

Partiendo del arco α, cuya tangente es 1/5, tenemos:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119};$$

y como es $4\alpha > \frac{\pi}{4}$, pondremos $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$, siendo:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha . \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{119}}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Tenemos, pues,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239},$$

de donde resulta el desarrollo:

$$\pi = \frac{16}{5}\left(1 - \frac{4}{3.100} + \frac{4^2}{5.100^2} - \frac{4^3}{7.100^3} + \dots\right) -$$
$$- \frac{4}{239}\left(1 - \frac{1}{3.57\,121} + \frac{1}{5.57\,121^2} - \frac{1}{7.57\,121^3} + \dots\right).$$

Con esta fórmula de J. MACHIN (1680-1752), la mas sencilla conocida, sin más que tomar:

$$\frac{16}{5}\left(1 - \frac{4}{3.100} + \frac{4^2}{5.100^2} - \frac{4^3}{7.100^3}\right) - \frac{4}{239},$$

resultan las cifras exactas, 3,141 59; con el desarrollo de LEIBNIZ [45-24] serían precisos 200 000 términos. Aplicando la fórmula de MACHIN, ha calculado SHANKS (Proc. Royal Soc., London, 1873), 707 cifras de π. He aquí las primeras cifras decimales:

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,\dots$$

b) A. SHARP, en 1699, calculó π con 71 cifras decimales; en 1824, J. M. Z. DASE obtuvo 200 cifras, y en 1850, RICHTER calculó 500 decimales.

Varios trabajos realizados sobre la distribución de los dígitos en π, en particular la sorprendente escasez de la cifra 7, deberán revisarse, por haber hallado D. F. FERGUSON, en 1946, que las cifras de SHANKS son erróneas más allá de la 527, al calcular 730 decimales con la fórmula que atribuye a R. W. MORRIS:

$$\frac{\pi}{4} = 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{20} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1985}.$$

Posteriormente, L. B. SMITH y J. W. WRENCH, con la fórmula de MACHIN, y el mismo FERGUSON, prolongaron el cálculo de π hasta 808 decimales (1948). G. W. REITWIESNER ha calculado con la máquina electrónica llamada ENIAC el número π con 2035 cifras decimales y el número e con 2010 cifras decimales (1950), confirmando los resultados mencionados. Últimamente (1958) se han llegado a calcular más de diez mil cifras de π (independiente y concordantemente por F. GENUYS y G. E. FELTON).

III. **Productos infinitos.** — *a*) Dada una sucesión de números $v_n = 1 + u_n \neq 0$ (es decir, $u_n \neq -1$), definiremos el *producto infinito*:

[XI-2] $$p = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = (1 + u_1)\,\dots\,(1 + u_n)\,\dots$$

como el límite de la sucesión de *productos parciales*

[XI-3] $$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k) = (1 + u_1)\,\dots\,(1 + u_n)$$

cuando tiende a infinito el número de factores, es decir:

[XI-4] $$p = \lim_{n \to \infty} p_n.$$

El producto [XI-2] se llama *convergente* cuando, y sólo cuando, existe el límite [XI-4], llamado entonces *valor* del producto, y es finito y *distinto de cero*. Si $p = 0$, se dice que el producto *diverge a cero* (convención cuya utilidad se verá en seguida). Si p tiende a $+\infty$, a $-\infty$, ó a ∞ sin signo determinado, se dice que el producto *diverge a infinito*. Un producto ni convergente ni divergente a cero o a infinito, se llama *oscilante*.

EJEMPLOS: 1. El producto $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\dots$ es convergente con valor $\frac{1}{2}$. Basta observar que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1, \text{ y que para } n \to \infty \text{ es } \lim \left(1 \pm \frac{1}{n}\right) = 1.$$

2. $$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\dots$$

diverge a infinito, pues $p_n = \dfrac{n+2}{2}$.

3. $$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\quad\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots$$

diverge a cero, pues $p_n = \dfrac{1}{n+1}$.

4. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\cos n\pi} = \frac{1}{2}.2.\frac{1}{2}.2.\ \dots$ es oscilante.

5. Teniendo en cuenta $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2} =$

$$2^2 \operatorname{sen} \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} = \dots = 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^{n-1}} \dots$$
$$\dots \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2};$$

será (§ 28-2):

$$p_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \frac{x/2^n}{\operatorname{sen}(x/2^n)} \to \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

para $n \to \infty$, pues con x fijo, $x/2^n \to 0$.

Por lo tanto, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \dfrac{x}{2^n} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Si se toma $x = \dfrac{\pi}{2}$, se obtiene como caso particular el primer ejemplo conocido de producto infinito:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}} \,.\ \dots,$$

dado por F. VIETA (Leyden, 1646).

En el Cálculo integral (§ 53-3) veremos otro producto infinito más sencillo, referente a π, debido a J. WALLIS.

Para la convergencia de [XI-2] es condición *necesaria* (aunque no suficiente) que:

[XI-5] $$\lim_{n\to\infty} v_n = 1, \qquad \text{o sea:} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

b) *Productos infinitos de factores positivos.* — Se consideran tres casos, según que todos los factores (salvo un número finito) estén en $[1, +\infty)$, en $(0, 1]$, o haya infinitos factores en uno y otro intervalo.

b_1) $v_n = 1 + a_n$, con $a_n > 0$.

Como para $a \geqslant 0$ * es $e^a = 1 + a + \dots \geqslant 1 + a$, podemos escribir:

[XI-6] $$a_1 + \dots + a_n < (1 + a_1) \dots (1 + a_n) \leqslant e^{a_1 + \dots + a_n}.$$

* La desigualdad $e^a \geqslant 1 + a$ vale también si $a < 0$ (hacer una gráfica), como puede verse si se consideran por separado los casos $-1 < a < 0$ (serie alternada), y $a \leqslant -1 \therefore 1 + a \leqslant 0$.

Esta doble acotación nos dice que *el producto infinito* (*de sucesión* p_n *monótona creciente*):

$$\text{[XI-7]} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), \qquad con \quad a_n \geqslant 0,$$

es convergente o divergente a infinito, simultáneamente con la serie $\Sigma\, a_n$.

b_2) Sea: $v_n = 1 - b_n,$ con $0 \leqslant b_n < 1.$

Si ponemos:

$$\text{[XI-8]} \qquad \frac{1}{1 - b_n} = 1 + a_n; \qquad a_n \geqslant 0,$$

resultará:

$$\text{[XI-9]} \qquad b_n = \frac{a_n}{1 + a_n} \leqslant a_n.$$

Por lo tanto, si $\Sigma\, b_n$ diverge, también diverge $\Sigma\, a_n$, y en virtud de [XI-8] y b_1), el producto infinito

$$\text{[XI-10]} \qquad \Pi\ (1 - b_n) \qquad \text{con} \qquad 0 \leqslant b_n < 1,$$

diverge a cero.

Si $\Sigma\, b_n$ converge, será $b_n \to 0$ (§ 22-1, d), y también $a_n \to 0$, con lo cual, por [XI-9], llegará a ser $b_n > \frac{1}{2} a_n$. Entonces será también $\Sigma\, a_n$ convergente, y por [XI-8] y b_1) será [XI-10] convergente a un producto $p \neq 0$. En resumen: *El producto infinito* [XI-10] *sólo puede converger o diverger a cero, si respectivamente converge o diverge la serie* $\Sigma\, b_n$.

En los casos b_1 y b_2), un producto convergente es *incondicionalmente convergente*, es decir (cfr. § 22-4, b), puede aplicársele la propiedad conmutativa sin alterar su carácter ni su valor.

EJEMPLOS: 6. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots = (1 - \frac{1}{2})\ (1 - \frac{1}{4})\ (1 - \frac{1}{8}) \ldots \neq 0$, por ser convergente $\Sigma\, 1/2^n$.

7. $(1 - \frac{1}{2})\ (1 - \frac{1}{3})\ (1 - \frac{1}{4}) \ldots = 0$ (divergente), por ser divergente $\Sigma\, 1/n$.

b_3) Si hay infinitos factores menores que 1, e infinitos mayores que 1, unos y otros se agrupan por separado, aplicándose teoremas análogos a los de DIRICHLET y RIEMANN (§ 22-4, b) para las series de términos positivos y negativos. Así, si resultan:

1º) Dos productos infinitos convergentes;
2º) Uno convergente y uno divergente (a cero; a infinito);
3º) Dos divergentes (forma indeterminada $0 \cdot \infty$);

tendremos, respectivamente, para el producto dado:

1º) Es incondicionalmente convergente;
2º) Es divergente (a cero; a infinito);
3º) Nada podrá afirmarse en general, y si los factores cumplen [XI-5], reordenándolos podrá hacerse que el producto tienda a cualquier p del intervalo $0 \leqslant p \leqslant \infty$.

Esto muestra la conveniencia de llamar *absolutamente convergente* al producto [XI-2] *si es convergente el producto*

$$\text{[XI-11]} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|) = (1 + |u_1|)(1 + |u_2|) \ldots,$$

porque entonces, y sólo entonces, son convergentes $\Sigma\, a_n$, $\Sigma\, b_n$, $\Sigma\, |u_n|$, y resulta el teorema análogo al de series (§ 22-4, b_1): *Para que un producto infinito sea incondicionalmente convergente, es necesario y suficiente que sea absolutamente convergente.*

EJEMPLO 8:

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \cdot \ \ldots = 0 \ \text{(divergente)},$$

aunque sea convergente la serie alternada

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots .$$

En efecto,

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)<\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=1-\frac{1}{2n},$$

y diverge la serie $\Sigma\, 1/2n$.

c) Productos infinitos de factores cualesquiera. — La definición de convergencia absoluta (b_3) es la misma para un producto [XI-2] de factores complejos cualesquiera, y *no* se refiere al producto de los valores absolutos de los factores, lo que sería poco interesante, como muestran los ejemplos siguientes:

EJEMPLOS: 9. El producto $\Pi\,(-1)^n$ es oscilante, pero $\Pi\,|\,(-1)^n\,|$ es (trivialmente) convergente.

10. El producto $\Pi\left(1+\frac{i}{n}\right)$ es oscilante, pero $\Pi\left|1+\frac{i}{n}\right|$ es convergente. La no convergencia del primer producto puede obtenerse de

$$\operatorname{Arg}\left(1+\frac{i}{n}\right)>\frac{1}{n}\,\frac{\pi}{4},$$

y de la divergencia de

$$\frac{\pi}{4}\,\Sigma\,\frac{1}{n};$$

la convergencia del segundo resulta de

$$\Pi\left|1+\frac{i}{n}\right|=\sqrt{\Pi\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

y (por b_3) de la convergencia de la serie $\Sigma\,\frac{1}{n^2}$.

Veremos, en d_2), *que subsiste en general el teorema* (b_3) sobre convergencia absoluta y condicional (A. PRINGSHEIM, 1889). Por ahora probemos que: *Un producto infinito absolutamente convergente es convergente.*

Poniendo $\qquad P_n = (1+|\,u_1\,|)\,\dots\,(1+|\,u_n\,|)$

se obtiene:

$$\text{[XI-12]}\qquad\begin{cases} p_n - p_{n-1} = (1+u_1)\,\dots\,(1+u_{n-1})\,u_n \\ P_n - P_{n-1} = (1+|\,u_1\,|)\,\dots\,(1+|\,u_{n-1}\,|)\,|\,u_n\,| \end{cases}$$

$$\therefore\quad |\,p_n - p_{n-1}\,| \leqslant P_n - P_{n-1},$$

y por ser convergente la serie

$$P_1+\sum_{n=2}^{\infty}(P_n-P_{n-1})=\lim_{n\to\infty}P_n,$$

resulta absolutamente convergente la serie

$$\text{[XI-13]}\qquad p_1+\sum_{n=2}^{\infty}(p_n-p_{n-1})=\lim_{n\to\infty}p_n=p,$$

siendo además $p\neq 0$. En efecto, por hipótesis $|\,u_n\,|\to 0$, y por lo tanto desde un valor n en adelante,

$$\Sigma \left| \frac{u_n}{1+u_n} \right| < 2\, \Sigma \,|u_n| < +\infty,$$

con lo cual, por el mismo razonamiento que nos dió [XI-13], vemos que existe y es finito el límite de

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{u_k}{1+u_k}\right) = \frac{1}{p_n}.$$

es decir, $p \neq 0$.

d) Logaritmo de un producto infinito. — d_1) Tomando logaritmos en [XI-3], con la determinación principal (§ 45-3, *c*) en el logaritmo de cada factor, resulta:

$$\ln p_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ln}(1+u_k) \begin{cases} \operatorname{Ln} |p_n| = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ln} |1+u_k| \\ \arg p_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arg}(1+u_k), \end{cases}$$

sin que podamos afirmar que la suma del segundo miembro se conservará en la determinación principal.

Si el producto es convergente, será por [XI-5]: $\operatorname{Arg}(1+u_n) \to 0$.

Por otra parte, será:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arg}(1+u_k)\right) - \operatorname{Arg} p_n = 2\, h_n\, \pi,$$

con h_n entero, y por lo tanto:

$$2\pi\,(h_n - h_{n-1}) = \operatorname{Arg}(1+u_n) - (\operatorname{Arg} p_n - \operatorname{Arg} p_{n-1}) \to 0,$$

por lo cual, desde un valor n en adelante, será:

$$2\pi\, |h_n - h_{n-1}| < 2\pi,$$

conservándose *constante* el *entero* $h_n = h$. De aquí deducimos que *para n suficientemente grande,*

[XI-14] $$\operatorname{Ln} p_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ln}(1+u_k) - 2\,h\,\pi\, i.$$

con h entero, independiente de n, pero tal vez no nulo.

Esto prueba que la convergencia del producto infinito equivale a la de la serie de los logaritmos de los factores (en determinación principal). Si los factores son todos positivos, es $h = 0$, y basta tomar en ambos miembros logaritmos aritméticos (es decir, los reales correspondientes a números positivos, § 45-3, *c*).

d_2) Ahora podemos completar la demostración del teorema de PRINGSHEIM (*c*). Ante todo, veamos que la convergencia absoluta es incondicional, pues si $|u_k| < 1$, resulta de la serie logarítmica (§ 45-4):

$$|\operatorname{Ln}(1+u_k)| \leqslant \operatorname{Ln}(1+|u_k|),$$

y entonces, la serie que resulta en [XI-14] para $n \to \infty$, converge absolutamente, y por lo tanto (§ 22-4, b_1), incondicionalmente.

Supongamos ahora que [XI-2] sea convergente, pero no absoluta mente. Por [XI-5] es $|u_n| < \frac{1}{2}$ desde un n en adelante, y por lo tanto:

$$\left|\frac{\operatorname{Ln}(1+u_n)}{u_n}\right| - 1 \leqslant \left|\frac{\operatorname{Ln}(1+u_n)}{u_n} - 1\right| =$$

$$= \left| -\frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} - \frac{u_n^3}{4} + \ldots \right| < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{2};$$

$$\left|\frac{\text{Ln}(1+u_n)}{u_n}\right| = \left|1 - \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} - \dots\right| >$$

$$> 1 - |u_n| \cdot \left|\frac{1}{2} - \frac{u_n}{3} + \frac{u_n^2}{4} - \dots\right| >$$

$$> 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = \frac{1}{2}$$

es decir:

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{|\text{Ln}(1+u_n)|}{|u_n|} \leqslant \frac{3}{2},$$

y por el criterio de comparación (§ 22-2, *b*), las series $\Sigma\,|\text{Ln}(1+u_n)|$ y $\Sigma\,|u_n|$ serán ambas a la vez convergentes o divergentes. Así, si [XI-2] no es absolutamente convergente, tampoco lo es la serie que resulta en [XI-14] para $n \to \infty$, y al ser ésta condicionalmente convergente, también lo será el producto infinito.

e) *Convergencia uniforme.* — Cuando los factores del producto infinito [XI-2] son funciones de una variable real o compleja x, el producto se llama *uniformemente convergente* en un conjunto X de valores de x, si la sucesión de productos parciales $p_n = \text{p}_n(x)$ dada por [XI-3] converge uniformemente en X hacia una función $\text{p}(x)$ que no se anula en ningún punto de X.

El criterio más simple para la convergencia uniforme es el siguiente, que resulta, como podrá comprobarse, de revisar la demostración dada en *b*) desde el punto de vista de la uniformidad en X:

El producto infinito $\Pi\,[1 + \text{u}_n(x)]$ *es uniformemente convergente en todo conjunto* X *donde lo sea la serie* $\Sigma\,|\text{u}_n(x)|$.

El análogo del teorema de continuidad de ABEL para series de potencias (§ 43-4, *b* y *c*) no vale para productos infinitos, es decir, la convergencia de $\Pi(1 + a_n)$ no implica que:

$$\lim_{x \to 1^-} \Pi\,(1 + a_n x^n) = \Pi\,(1 + a_n),$$

como lo ha demostrado G. H. HARDY (Proc. London Math. Soc., 1908) al dar un ejemplo en el cual:

$$\lim_{x \to 1^-} \Pi\,(1 + a_n x^n) = 2\,\Pi\,(1 + a_n).$$

IV. Bibliografía. — 1. Por la importancia fundamental del algoritmo de las series de potencias, todos los grandes tratados citados en Capítulo VI, nota VI, contienen la teoría en forma más o menos extensa; en particular, conviene señalar el de GOURSAT (vol. II, citado en 5), el de HADAMARD (tomo II, citado en 1), el de PICARD (tomo II, citado en 5) y el de VALIRON (vol. I, citado en 5).

2. La teoría aritmética de las trascendentes elementales, con multitud de ejemplos y aclaraciones, está tratada en el último capítulo del excelente curso de matemática pura de G. H. HARDY (citado en Cap. II, nota IV-2) y en un apéndice final de la clásica obra siguiente, que contiene en su segunda parte una útil exposición monográfica de cada una de las funciones trascendentes más importantes del análisis:

E. T. WHITTAKER y G. N. WATSON: *A course of modern Analysis.* (4ª ed., Universidad de Cambridge, 1927).

Así también están tratadas dichas funciones trascendentes, desde el principio, en la obra monográfica, con rica bibliografía, de:

P. DIENES: *The Taylor series. An introduction to the theory of functions of a complex variable.* (Univ. de Oxford, 1931).

El primer libro dedicado exclusivamente al estudio de los teoremas tauberianos es:

H. R. PITT: *Tauberian theorems* (Oxford Univ. Press, Londres, 1958).

3. En el volumen III de nuestra obra (cap. XXIX) estudiamos más extensamente la teoría de las funciones analíticas de variable compleja, con más amplias referencias bibliográficas. Aquí sólo citaremos cursos elementales de iniciación, como los excelentes de:

K. KNOPP: *Funktionentheorie* y *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie.* (4 pequeños volúmenes, 5ª ed., W. de Gruyter, Lepzig, 1937), traducida la parte teórica de la 2ª ed. alemana: *Teoría de funciones.* (Labor, Barcelona - Buenos Aires, 1926);

M. O. GONZÁLEZ: *Fundamentos de la Teoría de Funciones de Variable Compleja.* (Min. Educación, La Habana, 1952).

E. G. PHILLIPS: *Functions of a complex variable with applications.* (Interscience Publ., Nueva York, 7ª ed., 1951). Traducido: *Funciones de una variable compleja y sus aplicaciones.* (Dossat, Madrid - Buenos Aires, 1943);

y el más extenso y muy didáctico de:

S. PINCHERLE: *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche.* (Zanichelli, Bolonia, 1922).

Uno de los mejores cursos didácticos para estudiar más a fondo la teoría es:

E. C. TITCHMARSH: *The theory of functions.* (2ª ed., Univ. de Oxford, 1939).

4. Un amplio capítulo a los teoremas tauberianos dedica la obra póstuma sobre series divergentes de G. H. HARDY (citada en Cap. V, nota IV-2).

Una extensa monografía sobre los números π y e, con notas históricas y bibliográficas, y no menos de cinco pruebas clásicas de su trascendencia, ha publicado recientemente el matemático venezolano

F. J. DUARTE: *Monografía de los números π y e.* (Nos. 34 y 35 del Boletín de la Acad. Cienc. Fís. Mat. Nat. de los EE. UU. de Venezuela, *11*, págs. 1-252, 1949).

CAPÍTULO XII

INTERPOLACIÓN Y DIFERENCIAS FINITAS

§ 46. INTERPOLACIÓN ENTRE VALORES CUALESQUIERA

1. **Teorema de existencia.** — En las ciencias experimentales es preciso inducir las leyes de correspondencia, mediante un cierto número de pares de valores de x, y. En general, una función $y = f(x)$ sólo se conoce para determinados valores de la variable independiente; por ejemplo, cuando está dada (como la función logarítmica) mediante una tabla, o bien cuando resulta de determinadas medidas u observaciones, que también nos conducen a formar una tabla. Cada medida (o cada renglón de la tabla) conduce a un punto del diagrama, y el problema de hallar una función que tome esos valores, equivale al de hallar una curva que pase por esos puntos. Pero *este problema está indeterminado*, pues hay infinitas curvas que pasan por un determinado número de puntos, por grande que éste sea.

Para que el problema de la interpolación quede determinado, debemos *prefijar el tipo de la función.*

Por ejemplo, si la función es de primer grado en x:

[46-1] $$y = a_0 x + a_1,$$

bastan dos puntos, pues el diagrama es una recta. Por otra parte, en [46-1] figuran sólo dos constantes a determinar.

Si la función es un polinomio de segundo grado:

[46-2] $$y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2,$$

necesitamos conocer tres puntos, pues en [46-2] figuran tres constantes a determinar:

EJEMPLO: Parábola de eje vertical, que pasa por los puntos A(—2, 5), B(2, 1), C(4, 5).

La ecuación es de la forma [46-2]. Reemplazando las coordenadas de los puntos se tiene:

$$\begin{aligned} 5 &= a_0(-2)^2 + a_1(-2) + a_2 \\ 1 &= a_0 \,.\, 2^2 + a_1 \,.\, 2 + a_2 \\ 5 &= a_0 \,.\, 4^2 + a_1 \,.\, 4 + a_2 \end{aligned}$$

sistema de ecuaciones que nos da: $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$; y entonces, por [46-2]:

$$y = \tfrac{1}{2} x^2 - x + 1.$$

Una sinusoide de ecuación:

[46-3] $$y = A \text{ sen } (\omega x + \alpha)$$

puede hacerse pasar por tres puntos prefijados, pues en [46-3] figuran tres constantes a determinar: A, ω y α.

Tiene pues un gran interés práctico, y al mismo tiempo teórico, dados $n+1$ puntos de abscisas distintas, determinar la curva más sencilla que pase por ellos, es decir, resolver el problema siguiente:

Obtener la función más sencilla, $y = f(x)$, *que toma los valores* $y_0, y_1, \ldots, y_n$, *correspondientes a los valores* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *de la variable.*

Las curvas más simples son las algebraicas, y entre ellas las parábolas, esto es, las gráficas de polinomios:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Como el número de condiciones impuestas es $n+1$, no será posible, en general, obtener parábola de grado inferior a n que pase por los $n+1$ puntos *, pero vamos a probar que existe una, y sólo una, de grado n que cumple estas $n+1$ condiciones.

Para determinar los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, basta resolver el sistema de ecuaciones lineales

[46-4] $$\begin{cases} y_0 = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n \\ y_1 = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n \end{cases}$$

y la solución es única por el principio de identidad (§ 16-1, *b*), ya se utilice este procedimiento u otro cualquiera.

• 2. <u>Fórmula de Lagrange.</u> — *a*) La resolución del sistema [46-4] suministra el polinomio de orden n que resuelve el problema de la interpolación, pero puede obtenerse directamente con este artificio: formemos el polinomio de grado n que se anule en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y que para $x = x_0$ tome el valor y_0; otro que se anule para $x_0, x_2, \ldots, x_n$, y que para $x = x_1$ tome el valor y_1; ...; otro que se anule en todos los puntos, excepto en el x_n, donde tome el valor y_n. La suma de todos ellos es de la forma:

$$P_n(x) = \lambda_0(x-x_1) \ldots (x-x_n) + \lambda_1(x-x_0)(x-x_2) \ldots (x-x_n) + \\ + \ldots + \lambda_n (x-x_0) \ldots (x-x_{n-1}),$$

y resuelve el problema si se eligen los coeficientes λ de modo

* Si prescindimos de la condición de que la curva sea del tipo parábola, el orden de la curva algebraica que pasa por n puntos es inferior a $n - 1$. Así, por ejemplo, por cinco puntos se puede hacer pasar una curva de segundo orden o una parábola de cuarto orden.

que cumplan la condición impuesta: de tomar estos términos los valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$ para $x_0, x_1, \ldots, x_n$, respectivamente. Estas condiciones determinan dichos coeficientes:

$$\lambda_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1) \ldots (x_0 - x_n)}, \quad \lambda_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0) \ldots (x_1 - x_n)}$$

$$\ldots, \lambda_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-1})},$$

y resulta la fórmula llamada de LAGRANGE, aunque fué descubierta por E. WARING:

$$P_n(x) = y_0 \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \ldots (x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \ldots (x_1 - x_n)} + \ldots + y_n \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

NOTA: Esta fórmula no da el polinomio ordenado (inconveniente común a casi todas las de interpolación), y tiene sobre todo el inconveniente de hacer inútil casi todo el trabajo cuando la aproximación lograda con n valores es insuficiente y es preciso tomar nuevos valores para formar un polinomio de grado superior.

EJEMPLO: Para dos valores, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, resulta:

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} x + \frac{x_0 y_1 - y_0 x_1}{x_0 - x_1},$$

que es la fórmula de la interpolación lineal, la más frecuentemente usada en toda clase de tablas (§ 35-5).

b) He aquí una consecuencia inmediata de la fórmula de LAGRANGE y del teorema de unicidad:

b_1) *Todos los polinomios de un mismo grado n, acotados en $n+1$ puntos de un intervalo (a, b), es decir, que toman $n+1$ valores inferiores a un número fijo, están acotados en todo el intervalo*, puesto que cada polinomio está determinado por estos $n+1$ valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, multiplicados por coeficientes que son finitos, esto es, inferiores a un número fijo h; si las $n+1$ ordenadas son menores que k, al variar éstas, todos los polinomios conservan valores inferiores a $(n+1)hk$.

Recíprocamente:

b_2) *Todos los polinomios de grado n acotados en un intervalo, tienen sus coeficientes acotados.*

En efecto, según *a*), éstos vienen dados por expresiones lineales de las ordenadas $y_0, y_1, \ldots, y_n$, con coeficientes fijos, en que sólo intervienen las abscisas elegidas.

3. La interpolación parabólica progresiva. — El segundo de los inconvenientes señalados en la nota de § 46-2 se evita con la interpolación *parabólica progresiva*, que además conduce más cómodamente al mismo polinomio, por la unicidad ya demostrada (§ 46-1).

a) Tomamos dos de los puntos dados y determinamos el polinomio de *primer grado* $P_1(x)$, cuya gráfica pasa por ellos.

b) Tomando un punto más es fácil determinar, basándose

en el polinomio *anterior*, uno de *segundo grado*: $P_2(x)$, cuya gráfica pase por los tres puntos.

c) Proseguimos así, hasta llegar a $P_n(x)$.

Tendremos:

a) *Primer grado.* Pongamos: $P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$, donde: $a_0 = y_0$; $a_1 = (y_1 - a_0) : (x_1 - x_0)$.

Resulta así la fórmula de interpolación lineal.

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

que representa la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1); suele llamarse *por partes proporcionales* (§§ 35-5 y 40-4, *d*).

b) *Segundo grado.*

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Conservando los mismos a_0, a_1, basta calcular a_2 con la condición que y tome el valor y_2 para x_2; o sea:

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Obsérvese que la diferencia $y_2 - P_1(x)$ es el error que es preciso corregir mediante el nuevo término de coeficiente a_2. Además, vemos claramente la ventaja de este método sobre el de LAGRANGE; una vez obtenida la función lineal mediante dos puntos, y apreciado el valor que da para x_2, si es despreciable vale dicha función para los tres puntos; en caso contrario, se divide dicho error por el producto de distancias de la nueva abscisa a las otras dos, y este cociente es el coeficiente del término nuevo de segundo grado.

c) *Grado n.*

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$\dots + a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}).$$

Conservando los mismos coeficientes, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, que tenía $P_{n-1}(x)$, el polinomio $P_n(x)$ pasa por $y_0, y_1 \dots, y_{n-1}$, pues es $P_n(x_i) = P_{n-1}(x_i) = y_i$, $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$. El nuevo coeficiente, a_n, se calcula para que $P_n(x_n) = y_n$, es decir:

$$a_n = \frac{y_n - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})}$$

donde el numerador es igual al error cometido al tomar para y_n el valor $P_{n-1}(x_n)$ que daría el polinomio anterior, mientras que el denominador es el producto de distancias al nuevo punto x_n, desde los anteriores.

EJEMPLO: He aquí las tensiones del vapor de agua a diversas temperaturas:

Temp.:	t	80°	90°	100°	(centígrados),
Tensiones:	P	35,46	52,55	76,00	(centímetros de mercurio).

La interpolación lineal entre 80° y 100° da:

$$P_1 = 35{,}46 + a_1(t - 80°)$$

donde:

$$a_1 = (76 - 35{,}46) : 20 = 2{,}027;$$

pero si sustituímos $t = 90°$ resulta:

$$P_1 = 35{,}46 + 20{,}27 = 55{,}73$$

$$\text{error:} \quad 52{,}55 - 55{,}73 = -3{,}18;$$

como es excesivo, recurramos a la interpolación de segundo grado, cuyo nuevo coeficiente a_2 se deduce dividiendo ese error por

$$(90 - 80)(90 - 100) = -100;$$

luego, resulta 0,0318; la nueva fórmula es:

$$P_2 = 35{,}46 + 2{,}027(t - 80) + 0{,}0318(t - 80)(t - 100).$$

Por ejemplo: para $t = 86$ resulta $P = 44{,}95$, mientras que la observación directa del fenómeno da 45,01; el error relativo, por lo tanto, apenas pasa de 1 : 1000.

4. **Descomposición de una fracción algebraica en fracciones simples.** — *a) Denominador de ceros simples.* — Dada una fracción algebraica irreducible $f(x)/Q(x)$, con numerador de menor grado que el denominador, si los ceros de éste son simples, es decir, si admite la descomposición: $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, se trata de descomponer la fracción dada en la forma:

$$\frac{f(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

con numeradores constantes. Multiplicando por $Q(x)$, esto equivale a descomponer el polinomio $f(x)$, cuyo grado es menor que n, en suma de n polinomios, cada uno de los cuales contiene $n - 1$ de los factores binómicos; pero esta descomposición es única, y la da la fórmula de LAGRANGE, siendo los coeficientes

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)} = \frac{f(x_1)}{Q'(x_1)}, \quad A_r = \frac{f(x_r)}{Q'(x_r)}.$$

b) Caso general. Supongamos que en el campo complejo, la fracción algebraica $f(x)/Q(x)$ es irreducible, esto es, los polinomios $f(x)$ y $Q(x)$ no tienen ningún factor común, el cual se suprimiría en caso de existir; y que $f(x)$ es de grado menor que el grado m de $Q(x)$. Probemos el siguiente teorema:

b_1) *Una fracción algebraica irreducible* $f(x)/Q(x)$ *cuyo numerador es de grado menor que el* m *de su denominador, y tal que éste admite la raíz real o compleja* a, *múltiple de orden* $\alpha \geqq 1$, *es decir:*

$$Q(x) = (x - a)^{\alpha} . Q_1(x) \quad \textit{con} \quad Q_1(a) \neq 0,$$

puede siempre descomponerse en la forma:

$$[46\text{-}5] \qquad \frac{f(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{(x - a)^{\alpha}} + \frac{f_1(x)}{(x - a)^{\alpha - 1} Q_1(x)},$$

donde la primera fracción del segundo miembro tiene por numerador una constante, y por denominador $(x - a)^{\alpha}$, *mien-*

tras que la última fracción tiene por numerador un polinomio, $f_1(x)$, de grado menor que el $m-1$ de su denominador, y por éste, el resultado de rebajar en una unidad el exponente de $(x-a)$ en $Q(x)$.

En efecto, para obtener [46-5], basta determinar A_1 de manera que sea

$$f(x)=\frac{A_1 . Q(x)}{(x-a)^\alpha}+\frac{f_1(x) . Q(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\, Q_1(x)}=A_1 . Q_1(x)+f_1(x) . (x-a).$$

Si se toma $A_1=f(a)/Q_1(a)$, el polinomio $f(x)-A_1 . Q_1(x)$, a lo más de grado $m-1$, resulta divisible (§ 16-5, c) por $(x-a)$, y su cociente será un polinomio $f_1(x)$ de grado menor que $m-1$.

De aquí resulta el teorema:

b_2) *Una fracción algebraica irreducible $f(x)/Q(x)$, cuyo numerador es de grado menor que el denominador, admite la descomposición:*

$$[46\text{-}6]\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_\alpha}{x-a}+\\ &+\frac{B_1}{(x-b)^\beta}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\dots+\frac{B_\beta}{x-b}+\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\\ &+\frac{L_1}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}}+\dots+\frac{L_\lambda}{x-l},\end{aligned}\right.$$

donde $a, b, \dots, l$ son todos los ceros reales o complejos del denominador $Q(x)$, con el respectivo orden de multiplicidad $\alpha, \beta, \dots, \lambda$. La descomposición [46-6] *es única.*

Para obtener [46-6] basta aplicar el mismo teorema (b_1) a la última fracción de [46-5], y reiterar el proceso hasta obtener el denominador $Q_1(x)$ sin el factor $(x-a)$. Aplicando a la última fracción obtenida, $f_\alpha(x)/Q_1(x)$, la misma [46-5] para $(x-b)^\beta$, y siguiendo así sucesivamente, llegaremos a un denominador que tendrá el único factor lineal $x-l$ y corresdonderá a un numerador de grado cero, es decir, a una constante L_γ.

La unicidad de la descomposición [46-6] se demuestra suponiendo que existiese otra con coeficientes A_1', A_2', $\dots$, $A_{\alpha'}'$, B_1', B_2', $\dots$, $B_{\beta'}'$, $\dots$, L_1' $\dots$, $L_{\lambda'}'$, correspondientes a denominadores $(x-a)^{\alpha'}$, $(x-a)^{\alpha'-1}$, $\dots$, $(x-a)$, $(x-b)^{\beta'}$, $\dots$, $(x-b)$, $\dots$, $(x-l)^{\lambda'}$, $\dots$, $(x-l)$. Habría de ser $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\dots$, $\lambda'=\lambda$, y además, $A_1'=A_1$, $\dots$, $A_\alpha'=A_\alpha$, $B_1'=B_1$, $\dots$, $L'_\lambda=L_\lambda$. En efecto, si fuese $\alpha'>\alpha$, multiplicando ambas descomposiciones por $(x-a)^{\alpha'}$ resultaría:

$$(x-a).g(x)\equiv A_1'+(x-a).g_1(x),$$

donde $g(x)$ y $g_1(x)$ se conservan acotados en valor absoluto para $x\to a$, y por lo tanto, $A_1'=0$. Análogamente, no puede ser tampoco $\alpha>\alpha'$. Si $\alpha=\alpha'$, multipliquemos ambas descomposiciones por $(x-a)^{\alpha}$, y resulta:

$$A_1+(x-a).g(x)\equiv A_1'+(x-a).g_1(x),$$

donde $g(x)$ y $g_1(x)$ se conservan acotados en valor absoluto para $x\to a$, y por lo tanto, $A_1=A_1'$. Suprimidas de ambas descomposiciones las fracciones de estos numeradores, se demuestra del mismo modo $A_2=A_2'$, y se sigue así sucesivamente, hasta probar $L_\lambda=L_\lambda'$.

b_3) Si los polinomios primos entre sí $f(x)$ y $Q(x)$ tienen *coeficientes reales*, a toda raíz imaginaria, $b=\xi+i\,\eta$, de $Q(x)$ corresponderá otra raíz imaginaria conjugada, $c=\xi-i\,\eta=\overline{b}$ con el mismo orden de multiplicidad β (§ 18-2). Entonces $C_1=\overline{B}_1$, $C_2=\overline{B}_2$, ..., $C_\beta=\overline{B}_\beta$, pues para obtener [46-5] hemos tomado $B_1=f(b)/Q_1(b)$, que resultará (§ 18-2) conjugado de $C_1=f(\overline{b})/\overline{Q}_1(\overline{b})$, donde $\overline{Q}_1(x)=f(x)/(x-\overline{b})^\beta$, tiene sus coeficientes conjugados a los de $Q_1(x)=f(x)/(x-b)^\beta$. Por lo tanto:

$$\frac{B_1}{(x-b)^\beta}+\frac{\overline{B}_1}{(x-\overline{b})^\beta}=\frac{G(x)}{[(x-\xi)^2+\eta^2]^\beta},$$

donde $G(x)$, de grado no superior a β, tiene coeficientes reales, y dejará un resto lineal, M_1x+N_1, de coeficientes reales si lo dividimos por el trinomio de segundo grado $(x-\xi)^2+\eta^2\equiv\equiv x^2+p\,x+q$. De aquí se deduce que:

$$\frac{B_1}{(x-b)^\beta}+\frac{\overline{B}_1}{(x-\overline{b})^\beta}=\frac{M_1x+N_1}{[(x-\xi)^2+\eta^2]^\beta}+\frac{G_1(x)}{[(x-\xi)^2+\eta^2]^{\beta-1}}$$

Volviendo a aplicar el proceso a la última fracción del segundo miembro, y haciendo lo mismo con

$$\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\frac{\overline{B}_2}{(x-\overline{b})^{\beta-1}},\ \ldots,\ \frac{B_\beta}{x-b}+\frac{\overline{B}_\beta}{x-\overline{b}}$$

y los demás pares de raíces imaginarias conjugadas de $Q(x)$, habremos probado el teorema:

Dada la fracción irreducible de coeficientes reales $f(x)/Q(x)$, *cuyo numerador es de grado inferior al denominador, teniendo éste ceros reales a, múltiples de orden respectivo* α, *y ceros imaginario-conjugados* $\xi\pm i\,\eta$, *múltiples de orden respectivo* β, *existe la descomposición en fracciones simples, del tipo:*

[46-7]

$$\frac{f(x)}{Q(x)} = \sum_a \left(\frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} \right) +$$

$$+ \sum_{\xi \pm i\eta} \left(\frac{M_1 x + N_1}{[(x-\xi)^2+\eta^2]^\beta} + \frac{M_2 x + N_2}{[(x-\xi)^2+\eta^2]^{\beta-1}} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x-\xi)^2+\eta^2} \right).$$

Esta descomposición es única, pues basta aplicar un razonamiento análogo al visto en b_2).

b_4) *Método de los coeficientes indeterminados.* — La demostración de la existencia de la descomposición [46-7] es constructiva, pues puede servirnos para la determinación efectiva de los coeficientes A_i, M_j y N_j. Sin embargo, la existencia y unicidad de dicha descomposición justifica el empleo, a veces más cómodo, del método de coeficientes indeterminados, ya aplicado en otras ocasiones (§§ 16-7 y 44-4). Escrita *a priori* la fórmula de descomposición [46-7], con coeficientes indeterminados en los numeradores del segundo miembro, se quitan denominadores multiplicando ambos miembros por $Q(x)$. Basta entonces igualar coeficientes de las mismas potencias de x en la igualdad que resulta para formar un sistema lineal de ecuaciones de solución única en las incógnitas buscadas: A_i, M_j y N_j. Éstas son $\sum_a \alpha + \sum_{\xi \mp i\eta} (2\beta) = m$ grado de $Q(x)$, igual al número de coeficientes, eventualmente nulos, de $f(x)$, que a lo más es de grado $m - 1$.

En el § 52 estudiaremos la aplicación de esta descomposición a la integración de funciones racionales.

EJEMPLOS: 1. *Raíces reales simples:*

$$\frac{x^2+3x}{x^4-x^2} = -\frac{3}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}.$$

Caso general:

2. $$\frac{x^4+3x^3}{x^2+2x+1} = x^2 + x - 3 + \frac{5}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

3. $$\frac{(x-1)^2}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+1}.$$

4. $$\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+2} - \frac{5x}{(x^2+2)^2}.$$

EJERCICIOS

1. Estudiar los ejemplos de § 46-1 y § 46-3, con la fórmula de LAGRANGE. Comparar los diversos métodos.

2. Hallar el polinomio de tercer grado que para $x = -1, 1, 2, 4$ vale respectivamente 3, 11, 6, 8. Comparar los métodos de LAGRANGE y de la interpolación parabólica progresiva con el de resolución del sistema [46-4].

3. ¿Cómo se obtiene la función inversa de $y = P_n(x)$, utilizando la fórmula de LAGRANGE? Aplicarlo a resolver la *interpolación inversa*, consistente en encontrar un valor de x correspondiente a un valor dado de $y = f(x)$.

4. Hallar a, b, c, siendo:

$$x^3 - 4x^2 + 4x = (x-1)(x-2)(x-3) + a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c.$$

5. Demostrar que el resto de la división de un polinomio $P(x)$ por el polinomio $Q(x)$ es:

$$R(x) = \sum_i \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)} \cdot \frac{Q(x)}{x - x_i},$$

donde x_i son los ceros de $Q(x)$.

6. Si todos los ceros del polinomio $Q(x)$ son reales, y entre ellos a es doble, siendo simples los demás, y el polinomio $f(x)$ es de grado menor que $Q(x)$ y primo con éste, entonces:

$$\frac{f(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^2} + \frac{A_2}{x-a} + \sum_i \frac{B}{x-b}, \text{ donde:}$$

$$A_1 = \frac{2\,f(a)}{Q''(a)}; \quad A_2 = \frac{2\,[3\,f'(a)\,Q''(a) - f(a)\,Q'''(a)]}{3[Q''(a)]^2};$$

$$B = \frac{f(b)}{Q'(b)};$$

refiriéndose la suma a todas las raíces b de $Q(x) = 0$ distintas de a.

7. Si el polinomio $Q(x)$ tiene un par de raíces simples imaginario-conjugadas ($b_2 = \overline{b_1}$) dadas por $(x - b_1)\,(x - b_2) \equiv x^2 - p\,x - q = 0$, siendo $Q(x) \equiv (x^2 - p\,x - q)\; Q_1(x)$, y $f(x)$ es un polinomio primo con $Q(x)$ y de grado menor que éste, entonces puede ponerse en [46-7]:

$$M = \frac{\begin{vmatrix} r_0 & s_0 \\ r_1 & s_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0\,p + s_1 & s_0 \\ s_0\,q & s_1 \end{vmatrix}}; \qquad N = \frac{\begin{vmatrix} s_0\,p + s_1 & r_0 \\ s_0\,q & r_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0\,p + s_1 & s_0 \\ s_0\,q & s_1 \end{vmatrix}},$$

donde $r_0 x + r_1$ y $s_0 x + s_1$ son respectivamente los restos de dividir $f(x)$ y $Q_1(x)$ por $x^2 - p\,x - q$, para lo que puede emplearse esquema análogo (ahora con sendas filas para p y q) al de la regla de RUFFINI (§ 16-5, *b*). Aplíquese a la descomposición de

$$\frac{2\,x^5 - 3\,x^3 - 2\,x^2 + 9\,x}{x^6 - x^5 + x^3 + x^2 - 2}.$$

(DANIELA VARELA, 1945).

8. Probar que si el polinomio $f(x)$ es de grado menor que $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, con x_i distintos, y primo con él, entonces es:

$$\frac{f(x)}{Q(x)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \dfrac{f(x_1)}{x-x_1} & \dfrac{f(x_2)}{x-x_2} & \dfrac{f(x_3)}{x-x_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix},$$

y generalizar para denominador de grado n con ceros simples.

9. Mediante descomposición en fracciones simples, probar que:

$$D^{(n)} \operatorname{arc\,tg} x = \tfrac{1}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!\, i[(x+i)^{-n} - (x-i)^{-n}].$$

10. Descomponer en fracciones simples:

$$a)\ \frac{x^3+x+1}{3x^2-2x-5};\quad b)\ \frac{1}{1-x^3};\quad c)\ \frac{3x^3-12x^2+16x-4}{x^4-4x^3+4x^2};$$

$$d)\ \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)};\quad e)\ \frac{1}{x^4+1};\quad f)\ \frac{1}{x^6+1};\quad g)\ \left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)^2.$$

11. Generalizar, por inducción, las expresiones (nota I, a) de las diferencias divididas.

§ 47. Interpolación entre valores equidistantes

1. **Diferencias sucesivas de una función.** — Dada una función $f(x)$ y un conjunto de valores de x en progresión aritmética: x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_n = x_0 + nh$, ..., a los que corresponden $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$, se llaman *diferencias primeras* de la función $y = f(x)$ a los números obtenidos restando cada valor funcional del siguiente: $\Delta^1 y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1$, etc.; *diferencias segundas*, el resultado de aplicar el mismo proceso a las diferencias primeras: $\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0$, $\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$, etc., y así sucesivamente. Se tiene el cuadro siguiente:

x_0	y_0	$\Delta^1 y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
x_1	y_1	$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$	. . . .
x_2	y_2	$\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$	. . . .	
x_3	y_3	. . . .		
.	.			

En general, se tiene:

$$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i,$$

es decir, obtenida una columna de diferencias, se forma la diferencia de orden superior a una cualquiera, restando ésta de la siguiente en su misma columna. Suele emplearse $\Delta y_i = \Delta^1 y_i$.

Si calculamos las diferencias sucesivas mediante los valores funcionales iniciales, resulta:

$$\Delta^2 y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) =$$
$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

y en general, se demuestra por inducción, mediante la relación fundamental [11-16] entre números combinatorios:

[47-1] $$\Delta^n y_0 = y_n - \binom{n}{1} y_{n-1} + \binom{n}{2} y_{n-2} - \ldots + (-1)^n y_0.$$

Inversamente:

$y_1 = y_0 + \Delta^1 y_0;\ \Delta^1 y_1 = \Delta^1 y_0 + \Delta^2 y_0;\ \ldots;$

$y_2 = y_1 + \Delta^1 y_1 = y_0 + 2\,\Delta^1 y_0 + \Delta^2 y_0;\ \Delta^1 y_2 = \ldots;$

$y_3 = y_2 + \Delta^1 y_2 = y_0 + 3\,\Delta^1 y_0 + 3\,\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0;\ \Delta^1 y_3 = \ldots;\ \ldots$

y en general, se demuestra como antes por inducción:

[47-2] $$y_n = y_0 + \binom{n}{1} \Delta^1 y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{n}{n} \Delta^n y_0.$$

2. **Operadores simbólicos.** — Las fórmulas del cálculo de diferencias se simplifican notablemente mediante la introducción de operadores simbólicos.

Se designa por E la operación funcional de incrementar la variable independiente x en la constante h, es decir:

$$\mathrm{E}\,\mathrm{f}(x_n) = \mathrm{f}(x_n + h), \quad \text{o sea:} \quad \mathrm{E}\,y_n = y_{n+1},$$

e indicando como producto la aplicación reiterada, tendremos las potencias:

$$\mathrm{E}^r\,\mathrm{f}(x_n) = \mathrm{f}(x_n + r\,h), \quad \text{o sea:} \quad \mathrm{E}^r\,y_n = y_{n+r}.$$

Si convenimos en poner $\Delta^0 = \mathrm{E}^0 = 1$ = operación idéntica (es decir, $\Delta^0 y_n = \mathrm{E}^0\,y_n = y_n$) tendremos $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (\mathrm{E} - 1)\,y_n$; $\mathrm{E}\,y_n = y_{n+1} = y_n + \Delta y_n = (1 + \Delta)\,y_n$, y por lo tanto, los operadores Δ y E se relacionan mediante:

[47-3] $$\mathrm{E} = 1 + \Delta$$

Fácilmente se demuestran las relaciones

$$\Delta\{\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(b) + \ldots + \mathrm{f}(c)\} = \Delta\mathrm{f}(a) + \Delta\mathrm{f}(b) + \ldots + \Delta\mathrm{f}(c),$$
$$\Delta\,k\,\mathrm{f}(a) = k\,\Delta\,\mathrm{f}(a),$$
$$\Delta^m\,\Delta^n\,\mathrm{f}(a) = \Delta^{m+n}\,\mathrm{f}(a),$$

y análogamente para E. Éste y Δ son conmutables:

$$\mathrm{E}\,\Delta\,y_n = \mathrm{E}\,(y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - y_{n+1} = \Delta\,y_{n+1} = \Delta\,\mathrm{E}\,y_n.$$

Así, los operadores Δ y E pueden manejarse como símbolos algebraicos. Si definimos $\Delta^m + \Delta^n$ mediante $(\Delta^m + \Delta^n)\,\mathrm{f}(a) = \Delta^m\,\mathrm{f}(a) + \Delta^n\,\mathrm{f}(a)$, es inmediato demostrar:

$$(\Delta^m + \Delta^n)\,(\Delta^p + \Delta^q) = \Delta^{m+p} + \Delta^{m+q} + \Delta^{n+p} + \Delta^{n+q},$$

que justifica (§ 12-1):

$$(1 + \Delta)^n = 1 + \binom{n}{1}\Delta + \binom{n}{2}\Delta^2 + \ldots + \binom{n}{n}\Delta^n,$$

y análogamente para E.

Entonces, las fórmulas [47-1] y [47-2] pueden escribirse condensadamente:

[47-1′] $$\Delta^n y_0 = (\mathrm{E} - 1)^n y_0$$

[47-2′] $$y_n = (1 + \Delta)^n y_0,$$

siendo en la última $y_n = \mathrm{E}^n y_0$.

3. Diferencias sucesivas de un polinomio. — Si la función es $y = x^n$, la diferencia primera correspondiente a cualquier valor de x es:

$$(x + h)^n - x^n = n\, x^{n-1} h + \ldots + h^n,$$

polinomio de grado $n - 1$, e igualmente, si la función dada es un polinomio cualquiera de grado n, la diferencia primera viene expresada por un polinomio de grado $n - 1$. Por lo tanto, las diferencias segundas vienen dadas por polinomios de grado $n - 2$; las diferencias terceras, por polinomios de grado $n - 3$; ...; las diferencias de orden $n - 1$, por binomios de primer grado; las diferencias n-simas son constantes, y las siguientes son nulas.

Para llegar a una diferencia n-sima bastan $n + 1$ valores equidistantes del polinomio, y como es constante, puede retrocederse mediante adiciones, formando la columna de diferencias $(n - 1)$-ésimas; luego las anteriores, y siguiendo así se llega a formar la columna de valores de la función para valores posteriores y anteriores a los $n + 1$ dados; es decir, se hace la extrapolación fuera del intervalo de los valores dados.

EJEMPLO: Formemos una tabla de cubos partiendo de los cuatro primeros; con éstos se llega a formar, por sustracciones, el triángulo de diferencias impresas en cursiva; repitiendo la diferencia constante 6, y retrocediendo por adiciones sucesivas, la columna de cubos se prolonga:

x	x^3	Δ	Δ^2	Δ^3
0	*0*			
		1		
1	*1*		*6*	
		7		*6*
2	*8*		*12*	
		19		6
3	*27*		18	
		37		6
4	64		24	
		61		
5	125			

EJERCICIO: Partiendo de los cubos
$99^3 = (100 - 1)^3 = 970299$, $100^3 = 1000000$, $101^3 = 1030301$, $102^3 = 1061208$, prosígase la formación de cubos.

4. Diferencias sucesivas de los factoriales. — En la teoría de la interpolación son particularmente importantes los productos de factores en progresión aritmética llamados *factoriales* (o *facultades*). El factorial de diferencia $h = 1$ y grado p se designa así:

$$[x]^p = x(x - 1)\,(x - 2)\,\ldots\,(x - p + 1).$$

Su diferencia es:

$$\Delta\, [x]^p = [x + 1]^p - [x]^p =$$
$$= x(x - 1)\,(x - 2)\,\ldots\,(x - p + 2)[(x + 1) - (x - p + 1)],$$

es decir:

[47-4] $$\Delta\, [x]^p = p\, [x]^{p-1},$$

fórmula análoga a la derivada de x^p, y de la que se deduce:

$$\frac{\Delta [x]^p}{p!} = \frac{[x]^{p-1}}{(p-1)!}, \quad \text{o sea:} \quad \frac{[x+1]^p}{p!} = \frac{[x]^p}{p!} + \frac{[x]^{p-1}}{(p-1)!},$$

que permite tabular rápidamente $[x]^p/p!$ para valores naturales de x, en forma análoga a como formábamos el triángulo aritmético o de TARTAGLIA (§ 11-4).

Dado un polinomio $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, se simplifica notablemente el cálculo de sus diferencias sucesivas, expresándolo como suma de factoriales:

[47-5] $$P_n(x) = \alpha + \beta[x] + \gamma[x]^2 + \ldots + \nu[x]^n,$$

donde α es el resto de dividir $P_n(x)$ por x, es decir, $P_n(x) = \alpha + x\, P_{n-1}(x)$; β es el resto de dividir $P_{n-1}(x)$ por $x-1$, es decir, $P_{n-1}(x) = \beta + (x-1)\, P_{n-2}(x)$; γ es el resto de dividir $P_{n-2}(x)$ por $x-2$, es decir, $P_{n-2}(x) = \gamma + (x-2)P_{n-3}(x)$, etc.

Entonces, [47-4] da inmediatamente las diferencias:

[47-6] $$\begin{cases} \Delta P_n(x) = \beta + 2\gamma[x] + \ldots + n\nu[x]^{n-1}, \\ \Delta^2 P_n(x) = 2!\,\gamma + \ldots + n(n-1)\,\nu[x]^{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^n P_n(x) = n!\,\nu. \end{cases}$$

EJEMPLO: Sea $y = x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 20x + 7$. Aplicando la regla de RUFFINI (§ 16-5) resulta:

0)	1	—12	+30	—20	(+7
		+1	—11	+19	
1)	1	—11	+19	(—1	
		+2	—18		
2)	1	—9	(+1		
		+3			
3)	1	(—6			

$$\begin{aligned} y &= 7 - [x] + [x]^2 - 6[x]^3 + [x]^4 \\ \Delta y &= -1 + 2[x] - 18[x]^2 + 4[x]^3 \\ \Delta^2 y &= 2 - 36[x] + 12[x]^2, \\ \Delta^3 y &= -36 + 24[x], \\ \Delta^4 y &= 24, \\ \Delta^5 y &= 0. \end{aligned}$$

5. Fórmula de Newton-Gregory. — Si de una función desconocida se conocen sus valores en $n+1$ puntos, se ha visto en § 46 cómo se interpola mediante el polinomio de grado n que toma los $n+1$ valores dados, admitiendo que los valores de la función desconocida en los puntos intermedios son los del polinomio en estos puntos. El caso más usual (por ejemplo, en las tablas matemáticas) es aquel en el que los valores de x son equidistantes, y si los puntos considerados son los $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, puesto el polinomio buscado $P_n(x)$ en la forma [47-5], ésta y las [47-6] dan inmediatamente para $x = 0$, los coeficientes:

$$\alpha = y_0; \quad \beta = \Delta^1 y_0; \quad \gamma = \frac{\Delta^2 y_0}{2!}; \quad \ldots; \quad \nu = \frac{\Delta^n y_0}{n!},$$

de donde resulta la fórmula:

[47-7] $$P_n(x) = y_0 + \frac{x}{1!}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

atribuída a NEWTON, pero ya conocida por J. GREGORY (1670).

Si en vez de los puntos 0, 1, 2, ..., n consideramos x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_n = x_0 + nh$, en vez de [47-7] se obtendrá:

[47-8] $$P_n(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{1!}\frac{\Delta y_0}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{h^2} + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!}\frac{\Delta^n y_0}{h^n}.$$

También puede deducirse [47-8] directamente de [47-2], haciendo $x = x_0 + nh$, y sustituyendo $n = (x-x_0)/h$, $n-1 = (x-x_1)/h$, etc.; o bien como la correspondiente en este caso a la interpolación parabólica progresiva (§ 46-3), pudiéndose deducir [47-8] por el cálculo sucesivo para valores equidistantes, mediante las diferencias sucesivas, de los coeficientes a_0, a_1, ..., a_n allí vistos.

La fórmula [47-7] se expresa simbólicamente así:

[47-7′] $$P_n(x) = (1+\Delta)^x y_0 = E^x y_0,$$

teniendo en cuenta que son nulas para un polinomio de grado n las diferencias de orden superior a n.

NOTAS: 1. En las tablas usuales llega siempre a suceder que las diferencias de un orden suficientemente elevado son prácticamente constantes dentro de la aproximación deseada, fijándonos dicho orden el grado del polinomio interpolante.

2. También se procede a interpolar funciones conocidas y tabuladas, cuando el cálculo de sus valores numéricos en puntos intermedios es muy engorroso.

3. Salta a la vista la analogía de la fórmula de NEWTON - GREGORY [47-8] con la de TAYLOR (§ 39-2), si se sustituye en ésta $(x-a)^r$ por $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})$ y $f^{(r)}(a)$ por $\dfrac{\Delta^r y_0}{h^r}$. Sin embargo, [47-8] no es aplicable a infinitos valores, y no es legítimo el paso al límite sin un análisis especial (§ 47-6).

EJEMPLO: Determinar lg 6,0405 mediante la tabla de las dos primeras columnas siguientes:

x_r	lg x_r	Δ	Δ^2	Δ^3
6,040	0,781 036 9386			
		718 971		
6,041	0,781 108 8357		— 119	
		718 852		0
6,042	0,781 180 7209		— 119	
		718 733		1
6,043	0,781 252 5942		— 118	
		718 615		
6,044	0,781 324 4557			

Aquí bastará la interpolación cuadrática, por ser prácticamente constantes las diferencias segundas. Es $x = 6{,}0405$; $x_0 = 6{,}040$; $h = 0{,}001$; $(x-x_0)/h = \frac{1}{2}$; $(x-x_0)(x-x_1)/h^2 = -\frac{1}{4}$; $10^{10}.\lg 6{,}0405 = 781\,036\,9886 + \frac{1}{2}.718\,971 + \frac{1}{8}.119 = 781\,072\,8886$.

6. **Término complementario y paso al límite.** — *a*) Para una determinada función $y = f(x)$, la fórmula de interpolación [47-8] da sólo una expresión aproximada de la misma, siendo realmente $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. Por analogía con la fórmula de TAYLOR (§ 47-5, nota 3), podemos intuir el

TEOR.: *Una función* $f(x)$ *continua en* $[x_0, x_n]$ *con derivada* $f^{(n+1)}(x)$ *existente* (§ 30-5) *en* (x_0, x_n), *tiene como término complementario de la fórmula* [47-8]:

[47-9] $$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

donde $x_0 < \xi < x_n$.

En efecto, escribamos el término complementario en la forma:

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) \cdot (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Si es $a \neq x_0, x_1, \dots, x_n$ un punto cualquiera del intervalo (x_0, x_n), estará determinado $r_n(a)$ mediante:

[47-10] $$f(a) = P_n(a) + r_n(a) \cdot (a - x_0)(a - x_1)\dots(a - x_n).$$

La función:

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - r_n(a)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

se anula en los $n+2$ puntos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n, a$, y por el teorema de ROLLE (§ 35-2), su derivada $F'(x)$ se anula en $n+1$ puntos distintos intermedios, la $F''(x)$ en n puntos distintos intermedios, y por lo tanto, la $F^{(n+1)}(x)$ se anula en un punto ξ, con $x_0 < \xi < x_n$, es decir:

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - r_n(a) \cdot (n+1)! = 0,$$

de donde se despeja $r_n(a)$, y sustituída en [47-10] da:

$$f(a) = P_n(a) + \frac{(a - x_0)(a - x_1)\dots(a - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

con $x_0 < \xi < x_n$, válida para todo a de $[x_0, x_n]$, y que demuestra [47-9] sin más que cambiar a por x.

Conocida la acotación $|f^{(n+1)}(\xi)| < K$, para h pequeño, el error es del orden de h^{n+1}. Así, para $x = x_0 + \frac{1}{2}h$, el error es:

$$\varepsilon < \frac{\frac{1}{2}h . h . 2h \dots nh}{(n+1)!} K < \frac{h^{n+1}}{2(n+1)} K.$$

En § 47-5, ejemplo, el error no supera a $\dfrac{0{,}001^3}{6} \cdot \dfrac{2M}{x^3} < 10^{-12}$,

y hubiésemos podido tomar lg 6,0405 = 0,781 072 888 637, supuestos exactos los valores tabulados, lo que no es cierto, pues sólo tienen sus cifras exactas (Cap. V, nota II, *b*).

NOTA: La fórmula [47-9] es también válida fuera del intervalo $[x_0, x_n]$, si $f(x)$ cumple las condiciones de hipótesis, pero entonces, si x es exterior a $[x_0, x_n]$, también puede serlo ξ, pues éste resulta en general un punto intermedio entre $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x$.

La fórmula [47-8], aplicada *fuera* del intervalo de los n valores dados, se llama de *extrapolación*, útil si se conoce una acotación de la derivada $n+1$-ésima, pero muy peligrosa en su aplicación incondicional, si se desconoce límite de error. Tal sucede en las leyes naturales cuyo proceso fuera del intervalo de observaciones queda indeterminado. Además, aparte del riesgo de un crecimiento rápido de la derivada, el producto de distancias a los puntos dados crece rápidamente al salir del intervalo de éstos.

Así, en § 46-3, ejemplo, la misma fórmula que tan excelente resultado nos ha dado para el valor $t = 86$, nos da para $t = 0°$ el resultado absurdo 127,70, mientras que el valor observado es 0,46 en centímetros de mercurio.

La fórmula [47-9] es válida para interpolación entre valores cuales-

quiera (§ 46-3), pues en su demostración no interviene la circunstancia de que los puntos sean equidistantes. Si el polinomio interpolante $P_n(x)$ toma la forma de LAGRANGE (§ 46-2), por el teorema de unicidad (§ 46-1), el resto será el mismo [47-9].

b) La función $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ dada por [47-9], se anula en $n+1$ puntos, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, y aplicando el teorema de ROLLE reiteradamente, como hemos hecho en *a*), resultará que existe un punto de (x_0, x_n) tal que $f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) = 0$, es decir:

[47-11] $$f^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta^n y_0}{h^n}, \quad (x_0 < \xi < x_n).$$

En las condiciones de hipótesis del teorema [47-9], aplicando [47-11] para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y haciendo tender h a 0, obtendremos la fórmula de TAYLOR (§ 39-2) como caso límite de la [47-8].

EJERCICIOS

1. Efectuar en detalle las demostraciones indicadas en § 47-2.

2. Mediante los valores de $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$, para $x = -2, -1, 0, 1, 2$, prosígase hallando los valores funcionales para $x = 3, 4, 5, \ldots$

3. Expresar $y = 5x^3 - 3x + 2$ en la forma
$$P_n(x) = \alpha + \beta[x] + \gamma[x]^2 + \delta[x]^3,$$
y formar la tabla de sus diferencias.

4. Hallar el polinomio $f(x)$ tal que
$$\Delta f(n) = 9n^2 - 3n - 2; \qquad f(0) = 3.$$

5. Para la función $f(x) = e^{-x^2}$ se tiene $f(0) = 1$; $f(0{,}05) = 0{,}99750$; $f(0{,}10) = 0{,}99005$; $f(0{,}15) = 0{,}97775$; $f(0{,}20) = 0{,}96079$; $f(0{,}25) = 0{,}93941$; $f(0{,}30) = 0{,}91393$. Calcular $f(0{,}0477)$ y $f(0{,}2862)$, mediante [47-8], comprobando los resultados por el desarrollo en serie de MAC-LAURIN.

6. Mediante [47-2] probar (cfr. ejercicio 2 de § 2) que:
$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^2 = 4 + \binom{n-1}{1} \cdot 16 + \binom{n-1}{2} \cdot 20 + \binom{n-1}{3} \cdot 8 =$$
$$= \frac{2n}{3}(n+1)(2n+1);$$
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4;$$
$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30.$$

7. Si en la tabla de valores equidistantes se toman en cuenta hasta las diferencias terceras, el valor correspondiente a $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ es:
$$\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{(y_1 + y_2) - (y_0 + y_3)}{16}.$$
(DE MORGAN).

NOTAS AL CAPÍTULO XII

I. Diferencias divididas. — *a*) DEF.: Se llaman *diferencias divididas* o *polinomios interpolares* de la función $y = f(x)$ en la sucesión de puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots$, los cocientes sucesivos siguientes:

$$[0\ 1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad [1\ 2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ \ldots;$$

$$[0\ 1\ 2] = \frac{[1\ 2] - [0\ 1]}{x_2 - x_0}, \quad [1\ 2\ 3] = \frac{[2\ 3] - [1\ 2]}{x_3 - x_1}, \ldots;$$

$$[0\ 1\ 2\ 3] = \frac{[1\ 2\ 3] - [0\ 1\ 2]}{x_3 - x_0}, \ldots$$

Resulta, además:

$$[0\ 1] = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0};$$

$$[0\ 1\ 2] = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)};$$

$$[0\ 1\ 2\ 3] = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{y_3}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}; \ldots$$

fórmula que se generaliza por inducción; por lo tanto, una diferencia dividida es una función simétrica (Cap. X, nota III) de los puntos a que se refiere.

b) *Fórmula de* LAGRANGE. — Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, debe ser $[0\ 1\ 2\ \ldots\ n\ x] = 0$, como análogamente hemos visto en § 47-3, es decir:

$$\frac{y}{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)} + \frac{y_0}{(x_0 - x)(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)} + \ldots + \frac{y_n}{(x_n - x)(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})} = 0,$$

de la que se deduce inmediatamente la fórmula de LAGRANGE (§ 46-2).

c) *Fórmula de* NEWTON. — Si las diferencias divididas de tercer orden son constantes, se tendrá para cualquier x:

$$[x\ 0\ 1\ 2] = [0\ 1\ 2\ 3],$$

y siendo

$$[x\ 0\ 1\ 2] = \frac{[0\ 1\ 2] - [x\ 0\ 1]}{x_2 - x}$$

resulta

$$[x\ 0\ 1] = [0\ 1\ 2] + [0\ 1\ 2\ 3]\ (x - x_2).$$

Como también

$$[x\ 0\ 1] = \frac{[0\ 1] - [x\ 0]}{x_1 - x}$$

resulta:

$$[x\ 0] = [0\ 1] + [0\ 1\ 2]\ (x - x_1) + [0\ 1\ 2\ 3]\ (x - x_1)(x - x_2),$$

y por ser

$$[x\ 0] = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}$$

queda en definitiva:

$$y = y_0 + [0\ 1]\ (x - x_0) + [0\ 1\ 2]\ (x - x_0)(x - x_1) + [0\ 1\ 2\ 3]\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Si las diferencias divididas constantes son las de orden n, queda la fórmula análoga debida a NEWTON (1687), coincidente con la dada en la interpolación parabólica progresiva (§ 46-3), siendo precisamente los coeficientes de la misma las sucesivas diferencias divididas:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = [0\ 1], \quad a_2 = [0\ 1\ 2], \quad \ldots, \quad a_n = [0\ 1\ \ldots\ n].$$

d) *Coeficientes diferenciales.* — Si $f(x)$ admite n coeficientes diferenciales (Cap. X, nota I, *a*) en el punto x_0, es:

$$y_1 = y_0 + h_1 \frac{y^{(1)}}{1!} + h_1^2 \frac{y^{(2)}}{2!} + \ldots + h_1^n \frac{y^{(n)}}{n!} + o(h_1^n),$$

$$y_2 = y_0 + h_1 \frac{y^{(1)}}{1!} + h_2^2 \frac{y^{(2)}}{2!} + \ldots + h_2^n \frac{y^{(n)}}{n!} + o(h_2^n),$$

y calculando las diferencias divididas, si se llama h a la mayor de las $h_1, h_2, \ldots, h_n$ en valor absoluto, resulta:

$$[0\ 1] = \frac{y^{(1)}}{1!} + h_1 \frac{y^{(2)}}{2!} + h_1^2 \frac{y^{(3)}}{3!} + \ldots + h_1^{n-1} \frac{y^{(n)}}{n!} + o(h_1^{n-1}),$$

$$[0\ 1\ 2] = \frac{y^{(2)}}{2!} + (h_1 + h_2) \frac{y^{(3)}}{3!} + (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) \frac{y^{(4)}}{4!} + \ldots + o(h^{n-2});$$

en general, para $m \leqq n$:

$$[0\ 1\ 2\ \ldots\ n] = \frac{y^{(m)}}{m!} + s_1 \frac{y^{(m+1)}}{(m+1)!} + \ldots + s_{n-m} \frac{y^{(n)}}{n!} + o(h^{n-m}),$$

siendo:

$$s_1 = h_1 + h_2 + \ldots + h_m = \Sigma h_r,$$

$$s_2 = \Sigma h_r h_s, \qquad s_3 = \Sigma h_r h_s h_t, \ \ldots$$

Finalmente, para $m = n$,

$$[0\ 1\ 2\ \ldots\ n] = \frac{y^{(n)}}{n!} + o(1),$$

y cuando los n incrementos $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tienden a 0, se verifica:

$$\lim\ [0\ 1\ 2\ \ldots\ n] = \frac{y^{(n)}}{n!}.$$

Los incrementos $h_1 = x_1 - x_0$, $h_2 = x_2 - x_0$, $h_3 = x_3 - x_0$, ..., pueden ser cualesquiera; pero si los intervalos son iguales, $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = h$, y por lo tanto, $x_n - x_0 = n h$, se tiene:

$$[0\ 1\ 2] = \frac{(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)}{2 h^2} = \frac{y_2 - 2 y_1 + y_0}{2 h^2} = \frac{1}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{h^2},$$

$$[0\ 1\ 2\ 3] = \frac{1}{2!} \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{3 h^3} = \frac{1}{3!} \frac{\Delta^3 y_0}{h^3},$$

y en general,

$$[0\ 1\ 2\ \ldots\ n] = \frac{1}{n!} \frac{\Delta^n y_0}{h^n};$$

de donde resulta:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta^n y_0}{h^n} = y^{(n)},$$

que da otro importante significado a los coeficientes diferenciales. En particular, si $f(x)$ admite derivadas sucesivas, la fórmula anterior constituye un resultado clásico.

II. **Empleo de diferencias centrales.** — *a)* En la interpolación de valores de una función $y = f(x)$ entre x_0 y x_1 mediante la fórmula de NEWTON (§§ 46-3 y 47-5), figuran únicamente las diferencias sucesivas de y_0, en cuya formación sólo intervienen los valores de la función para $x_0, x_1, x_2, \ldots$, pero no los de su izquierda. Mejor aproximación se obtiene haciendo intervenir diferencias situadas sobre una línea horizontal del cuadro de las mismas o en sus proximidades, por cuya razón reciben el nombre de *diferencias centrales*.

Para expresar éstas se emplea una notación especial, debida a W. F. SHEPPARD (1899), basada en el símbolo δ, introducido como equivalente a

$\Delta E^{-\frac{1}{2}}$ (§ 47-2). Al ser $\Delta = \delta E^{\frac{1}{2}}$, podemos escribir $\Delta y_0 = \delta y_{1/2}$, $\Delta^2 y_0 = \delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_0 = \delta^3 y_{3/2}$, ..., $\Delta^n y_0 = \delta^n y_{n/2}$, dando la tabla:

x_{-2}	y_{-2}				
		$\delta y_{-3/2}$	$\delta^2 y_1$		
x_{-1}	y_{-1}				
		$\delta y_{-1/2}$	$\delta^2 y_{1/2}$	$\delta^2 y_{-1}$	
x_0	y_0				$\delta^4 y_0$
		$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 y_0$	$\delta^3 y_{-1/2}$	
x_1	y_1				$\delta^4 y_1$
		$\delta y_{3/2}$	$\delta^2 y_2$	$\delta^2 y_{3/2}$	
x_2	y_2				$\delta^4 y_2$

Otro símbolo empleado es el μ, para indicar el promedio de diferencias consecutivas del mismo orden, tales:

$$\mu \delta y_0 = \tfrac{1}{2}(\delta y_{-1/2} + \delta y_{1/2}), \quad \mu \delta^3 y_0 = \tfrac{1}{2}(\delta^3 y_{-1/2} + \delta^3 y_{1/2}), \quad \text{etc.}$$

b) *Fórmula de* NEWTON - GAUSS. — Si en la fórmula de NEWTON con diferencias divididas (nota I, *c*) tomamos $0 = x_0$, $1 = x_1$, $2 = x_{-1}$, $3 = x_2$, $4 = x_{-2}$, etc., y $x = x_0 + u\,h$, $(x - x_0)/h = u$, $(x - x_1)/h = u - 1$, $(x - x_{-1})/h = u + 1$, etc., resulta:

$$[0\ 1] = \frac{\Delta y_0}{h};\ [0\ 1\ 2] = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2};\ [0\ 1\ 2\ 3] = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!\,h^3},\ \text{etc.,}$$

y por lo tanto:

$$f(x) = y_0 + u\,\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\,\Delta^2 y_{-1} + \frac{(u+1)u(u-1)}{3!}\,\Delta^3 y_{-1} +$$
$$+ \frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!}\,\Delta^4 y_{-2} + \frac{(u+2)(u+1)u(u-1)(u-2)}{5!}\,\Delta^5 y_{-2} + \cdots$$

debida a I. NEWTON y usada por K. F. GAUSS Con la notación de SHEPPARD (*a*), también puede escribirse así:

$$f(x) = y_0 + \binom{u}{1}\delta y_{1/2} + \binom{u}{2}\delta^2 y_0 + \binom{u+1}{3}\delta^3 y_{1/2} +$$
$$+ \binom{u+1}{4}\delta^4 y_0 + \binom{u+2}{5}\delta^5 y_{1/2} + \cdots,$$

que muestra es conveniente para valores de x en el intervalo $(x_0, x_0 + \tfrac{1}{2}h)$.

Las diferencias que figuran en la fórmula son las señaladas con puntos gruesos en el esquema siguiente:

x	y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
−3	•						
		•					
−2	•		•				
		•		•			
−1	•		•		•		
		•		•		•	
0	●		●		●		●
		●		●		●	
1	•		•		•		
		•		•			
2	•		•				
		•					
3	•						

en donde también se han señalado con puntos finos todos los valores que intervienen en la formación de los coeficientes.

Para valores a la izquierda de x_0, se cambia h en $-h$, transformándose (§ 47-1) Δy_0 en: $f(x_0 - h) - f(x_0) = -\Delta y_{-1}$; $\Delta^2 y_{-1}$ no varía; $\Delta^3 y_{-1}$, en $f(x_0 - 2h) - 3f(x_0 - h) + 3f(x_0) - f(x_0 + h) = -\Delta^3 y_{-2}$, etc., dando la fórmula:

$$f(x) = y_0 - \binom{u}{1}\delta y_{-1/2} + \binom{u}{2}\delta^2 y_0 - \binom{u+1}{3}\delta^3 y_{-1/2} +$$

$$+ \binom{u+1}{4}\delta^4 y_0 - \binom{u+2}{5}\delta^5 y_{-1/2} + \ldots, \quad (u < 0),$$

llamada de NEWTON - GAUSS *para interpolación retrógrada*, conveniente para valores de x en el intervalo $(x_0 - \frac{1}{2}h.\ x_0)$.

c) Fórmulas de BESSEL y STIRLING. — La fórmula de NEWTON GAUSS (*b*) se puede escribir así:

$$f(x) = [\tfrac{1}{2} y_0 + \tfrac{1}{2} y_0] + u\Delta y_0 + \left[\tfrac{1}{2}\binom{u}{2}\Delta^2 y_{-1} + \tfrac{1}{2}\binom{u}{2}\Delta^2 y_{-1}\right] +$$

$$+ \binom{u+1}{3}\Delta^3 y_{-1} + \ldots,$$

y se sustituyen en los segundos sumandos de los paréntesis cuadrados $\frac{1}{2} y_0$, $\frac{1}{2}\Delta^2 y_{-1}$, $\frac{1}{2}\Delta^4 y_{-2}$ por sus equivalentes obtenidos de las identidades: $y_0 = y_1 - \Delta y_0$, $\Delta^2 y_{-1} = \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_{-1}$, $\Delta^4 y_{-2} = \Delta^4 y_{-1} - \Delta^5 y_{-2}$, etc.; resulta:

$$f(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + (u - \tfrac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\,\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} +$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-\frac{1}{2})}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!}\,\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \ldots$$

fórmula dada por NEWTON (1711) y usada por F. W. BESSEL, cuyo nombre recibe. Con la notación de SHEPPARD (*a*), puede escribirse así:

$$f(x) = \mu y_{1/2} + (u - \tfrac{1}{2})\delta y_{1/2} + \binom{u}{2}\mu\delta^2 y_{1/2} + \binom{u}{2}\frac{u-\frac{1}{2}}{3}\delta^3 y_{1/2} +$$

$$+ \binom{u+1}{4}\mu\delta^4 y_{1/2} + \binom{u+1}{4}\frac{u-\frac{1}{2}}{5}\delta^5 y_{1/2} + \binom{u+2}{6}\mu\delta^6 y_{1/2} +$$

$$+ \binom{u+2}{6}\frac{u-\frac{1}{2}}{7}\delta^7 y_{1/2} + \ldots,$$

que muestra es conveniente para valores de x en el entorno de $x_0 + \frac{1}{2}h$.

La fórmula de NEWTON - GAUSS (*b*) puede escribirse también así:

$$f(x) = y_0 + u\,[\Delta y_0 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y_{-1}] + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} +$$

$$+ \frac{u(u^2-1^2)}{3!}[\Delta^3 y_{-1} - \tfrac{1}{2}\Delta^4 y_{-2}] + \frac{u^2(u^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots$$

y reemplazar en ella las diferencias de orden par por diferencias de orden impar, utilizando: $\Delta^2 y_{-1} = \Delta y_0 - \Delta y_{-1}$, $\Delta^4 y_{-2} = \Delta^3 y_{-1} - \Delta^3 y_{-2}$, etc.; entonces resulta:

$$f(x) = y_0 + u\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u(u^2-1^2)}{3!}\,\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} +$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{5!}\,\frac{\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-3}}{2} +$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1)(u^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots$$

fórmula dada por NEWTON (1711) y estudiada por J. STIRLING (1730), cuyo nombre recibe. Con la notación de SHEPPARD (a), puede escribirse así:

$$f(x) = y_0 + u\,\mu\,\delta\,y_0 + \frac{u^2}{2!}\,\delta^2 y_0 + \frac{u(u^2-1^2)}{3!}\,\mu\,\delta^3 y_0 +$$
$$+ \frac{u^2(u^2-1^2)}{4!}\,\delta^4 y_0 + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{5!}\,\mu\,\delta^5 y_0 + \ldots,$$

que muestra es conveniente para valores de x en el entorno de x_0.

Para comparar la diversa utilidad de las fórmulas de NEWTON-GREGORY (§ 47-5), NEWTON-BESSEL y NEWTON-STIRLING, damos los siguientes esquemas:

x y Δ¹ Δ² Δ³ Δ⁴ Δ⁵ Δ⁶ — x: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

x y Δ¹ Δ² Δ³ Δ⁴ Δ⁵ Δ⁶ — x: −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4

x y Δ¹ Δ² Δ³ Δ⁴ Δ⁵ Δ⁶ — x: −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3

GREGORY. BESSEL. STIRLING.

Las gráficas muestran claramente la marcha que debe seguirse para formar los coeficientes. Éstos son las diferencias indicadas con puntos gruesos; en las columnas en que hay dos, se toma el promedio de ambos. También se han marcado con puntos finos todos los valores que intervienen en la formación de estos coeficientes; se observa cómo en la fórmula de GREGORY sólo se toman en consideración los valores $x_0, x_1, x_2, \ldots$ a la derecha de x_0; en la de BESSEL intervienen los equidistantes a uno y otro lado del intervalo (x_0, x_1); en la de STIRLING, los equidistantes a uno y otro lado de x_0.

d) Término complementario. — Teniendo en cuenta que $x = x_0 + u\,h$, bajo las mismas hipótesis y razonamiento empleado en § 47-6, se tendrá que en la fórmula de NEWTON-GREGORY, el término complementario puede tomar la forma:

$$R_n(x) = \binom{u}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

En la fórmula de STIRLING se requiere el mismo número, $2n+1$, de ordenadas, $y_{-n}, y_{-n+1}, \ldots, y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n$, para llegar a término con Δ^{2n} que al término con Δ^{2n-1}, por lo cual convendrá siempre detenerse en un término de orden par, $2n$. Resulta así:

$$R_{2n}(x) = \binom{u+n}{2n+1} h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi).$$

En la fórmula de BESSEL sucede algo análogo, pero ahora conviene detenerse en un término de orden impar, $2n+1$. Resulta así:

$$R_{2n+1}(x) = \binom{u+n}{2n+2} h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi).$$

En las tablas más usuales y aplicaciones más corrientes es inútil calcular el término complementario, porque las diferencias varían con suficiente regularidad para que las de un cierto orden sean prácticamente constantes (§ 47-5, nota 1), y así, sólo se lo tiene en cuenta cuando esto no sucede.

En la fórmula de LAGRANGE (§ 46-2 y nota I, a) no se podrá prescindir de él, pues en ella no intervienen diferencias, y nada nos permite determinar su grado de aproximación respecto de la función interpolada.

III. **Bibliografía.** — 1. La teoría de la interpolación suele exponerse como preliminar de la teoría de los errores de observación, en muchas obras de técnicas diversas, y en particular en las de Estadística.

Entre las primeras, dedica tres excelentes capítulos iniciales la obra de WHITTAKER y ROBINSON (citada en Cap. X, nota V-4). Entre las de cálculo numérico y matemática práctica, conteniendo ineludiblemente el tema, pueden verse las citadas en Cap. V, nota IV-3; también dedican importantes capítulos ZURMÜHL (citado en Cap. X, nota V-4) y las obras:

FR. A. WILLERS: *Methoden der praktischen Analysis.* (W. de Gruyter, Leipzig, 1928), traducida al inglés: *Practical Analysis (Graphical and numerical methods)*, con sección adaptada a las modernas máquinas calculadoras norteamericanas. (Dover, Nueva York, 1948);

H. VON SANDEN: *Praktische Mathematik.* (3ª ed., Teubner, Leipzig, 1953).

D. R. HARTREE: *Numerical analysis.* (Clarendon Press, Oxford, 1952).

J. F. STEFFENSEN: *Interpolation.* (2ª ed., Chelsea, Nueva York, 1950).

W. E. MILNE: *Numerical calculus. Approximations, interpolation, finite differences, numerical integration, and curve fitting.* (Princeton Univ. Press, 1949).

Basadas en cursos del Instituto de Tecnología de Massachusetts están las dos obras siguientes, de las cuales la segunda es de nivel más elevado:

F. B. HILDEBRAND: *Introduction to numerical analysis* (McGraw-Hill Nueva York, 1956);

Z. KOPAL: *Numerical analysis, with emphasis on the application of numerical techniques to problems of infinitesimal calculus in single variables* (Wiley, Nueva York, 1955).

2. Obras monográficas, completas y clásicas, sobre diferencias finitas, son las tres siguientes:

N. E. NÖRDLUND: *Differenzenrechnung.* (Springer, Berlín, 1924);

L. M. MILNE-THOMSON: *The calculus of finite differences.* (Macmillan, Londres, 1933, reimpreso en 1951):

CH. JORDAN: *The calculus of finite differences.* (2ª ed., Chelsea, Nueva York, 1947).

Más selectiva, notable por el estudio de la relación lineal recurrente, es:

T. FORT: *Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain.* (Clarendon Press, Oxford, 1948).

3. Para la aplicación de la fórmula de LAGRANGE (§ 46-2) se han construído las siguientes

Tables of Lagrangian coefficients for sexagesimal interpolation. (Nat. Bureau of Standards, Applied Math. Ser., nº 35, Washington, D. C., 1954).

CAPÍTULO XIII

EL AREA Y LA INTEGRACIÓN

§ 48. CONCEPTO DE INTEGRAL SEGÚN CAUCHY

1. **Noción de área en el plano.** — En la Geometría elemental se construye la teoría de la medida de la extensión en el plano, comenzando por asignar a cada región R de una cierta clase M un número $\mu(R)$, llamado *área* de R, que cumple los postulados siguientes:

I) $\mu(R) \geqq 0$;

II) *Regiones congruentes* R *y* R′ *tienen igual área;* más precisamente: si $R \varepsilon M$ y es R′ congruente con R, entonces $R' \varepsilon M$ y $\mu(R) = \mu(R')$;

III) *Una región suma de varias de* M, *tiene un área suma de las de éstas.*

Con estos axiomas, $\mu(R)$ queda determinado salvo un factor constante, que si M contiene un cuadrado de lado 1 (y por II a todos) puede fijarse conviniendo en que:

IV) *Si* C *es un cuadrado de lado* 1, *es* $\mu(C) = 1$.

Si la clase M ha de contener todos los rectángulos, deberá asignar al de lados α y β el área $\alpha.\beta$. En efecto, por III está determinada el área $m\,n$ de todo rectángulo cuyos lados miden m y n unidades, y también las de los rectángulos cuyos lados midan $1/p$ y $1/q$, pues siendo $p\,q$ el número de tales rectángulos contenidos en C, es $1/(p\,q)$ el área de cada uno. Como con $m\,n$ de ellos se compone un rectángulo de lados m/p y n/q, el área de éste es $(m/p).(n/q)$. Para lados de medida real cualquiera, deberá asignarse como área el elemento $\alpha.\beta$ de separación de clases o de sucesiones contiguas, por el mismo método con que se *definió* en § 7-5 el producto $\alpha.\beta$ (hágase, observando dónde se usa el axioma I).

Como el trapecio y el triángulo se transforman en rectángulos por descomposición (III) y congruencia (II), y los polígonos se descomponen en triángulos, queda resuelto completamente el problema del área para todos los polígonos planos.

2. **El área del trapezoide.** — Consideremos una función $f(x)$ positiva y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Su gráfica, conjuntamente con el eje x y las ordenadas $x = a$ y $x = b$, limita una región plana T que llamaremos *trapezoide* (fig. 138). Su área $\mu(T)$ está dada por lo que llamaremos *integral definida de la función* $f(x)$ *entre los límites* (*o extremos*) *a y b*. Por lo tanto, desde un punto de vista intuitivo, la

integral definida no es más que dicha área, aun cuando desde el punto de vista analítico el área geométrica vendrá dada por el mismo número real que introduciremos como valor de la integral definida (§ 48-3). Una y otro se obtienen por aproximaciones sucesivas, por defecto y por exceso, medidas de áreas contenidas y continentes, que ya sepamos evaluar, y que formarán las clases inferior y superior de la teoría del número real. Estas clases tendrán un solo elemento de separación si demostramos que son *contiguas*, procedimiento en esencia ya seguido por los griegos, y a cuya última parte le llamaban *método de exhaución* (nota I).

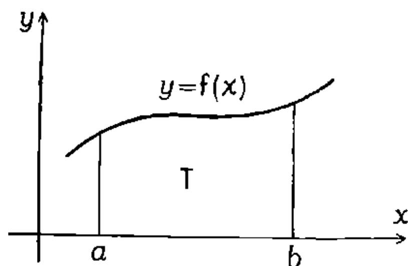


Fig. 138.

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos, iguales o desiguales, por los puntos:

[48-1] $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{r-1} < x_r < \ldots < x_n = b,$$

obteniendo así lo que llamaremos una *partición* del intervalo $[a, b]$. Llamaremos *norma* de la partición [48-1] al número

[48-2]: $$\delta = \text{Máx } (x_r - x_{r-1}) .$$

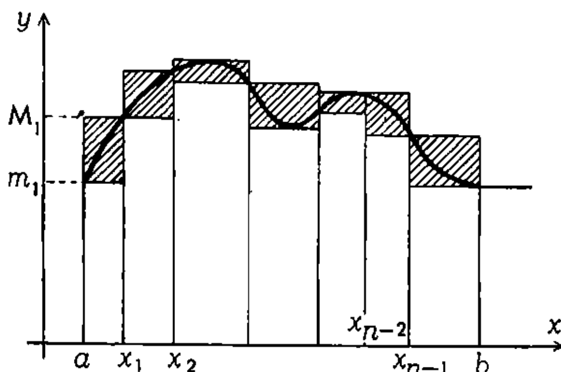


Fig. 139.

Sean m y M los extremos (accesibles) de la función continua $f(x)$ en $[a, b]$ (§ 26-5), y llamemos m_r al extremo inferior y M_r al extremo superior de dicha función en el subintervalo $[x_{r-1}\, x_r]$. Obtendremos así (fig. 139) un conjunto de rectángulos que dará para cada partición [48-1] un *área contenida*

[48-3] $$s = \sum_{r=1}^{n} m_r \ (x_r - x_{r-1}),$$

y un área *continente*

[48-4] $$S = \sum_{r=1}^{n} M_r \ (x_r - x_{r-1}),$$

al trapezoide en cuestión. La diferencia de áreas vendrá dada por la suma de los pequeños rectángulos rayados en la figura 139. A los números [48-3], correspondientes a distintas particiones, les llamaremos *sumas inferiores*, y a los [48-4], *sumas superiores*.

Si suponemos existente $\mu(T)$, tendremos, en virtud de los axiomas geométricos I y III (§ 48-1):

[48-5] $$s \leqq \mu(T) \leqq S,$$

por las relaciones de inclusión entre las correspondientes regiones planas, y en consecuencia, toda suma inferior será no mayor que toda suma superior (de igual o distinta partición):

[48-6] $$s_1 \leqq S_2.$$

Se comprende intuitivamente que las aproximaciones de $\mu(T)$ dadas en [48-5], se pueden mejorar tanto como se quiera, tomando particiones cuyas normas tiendan a cero. Esto es lo que probaremos ahora, al definir analíticamente la integral, siendo la demostración de existencia de $\mu(T)$ el punto delicado de la cuestión.

3. **La integral definida.** — *a*) Para definir analíticamente la integral, comencemos por observar que debemos demostrar [48-6] sin recurrir a las relaciones [48-5] ni a la existencia de $\mu(T)$, que probaremos justamente a partir de [48-6].

Podemos considerar como partición inicial a la definida por los únicos puntos a, b, ampliando así el significado de la palabra *partición;* y las sumas por defecto y por exceso se reducen a un solo sumando, es decir:

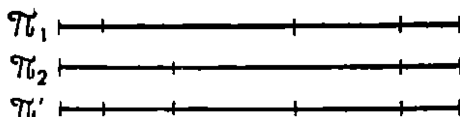
$$s_0 = m\,\delta, \quad S_0 = M\,\delta,$$

siendo para toda otra partición:

[48-7] $$s_0 \leqq s \leqq S \leqq S_0.$$

Diremos que una partición π' de $[a, b]$ es *posterior* a otra partición π cuando los intervalos que forman π' resultan de la partición de los intervalos de π, es decir, cuando se consideran todos los puntos de división, introduciendo otros intermedios.

Dadas dos particiones cualesquiera, π_1 y π_2 de $[a, b]$, si cada una tiene puntos de división que no pertenecen a la otra. ninguna de ellas es posterior a la otra; pero se forma una nueva partición π' posterior a ambas, adoptando los puntos de división de una y otra. Ejemplo:



En otras palabras: la relación de precedencia en el conjunto de las particiones de un intervalo tiene la propiedad de composición o dirección (§ 2-7, nota 2).

Puesto que cada partición π' posterior a π se deduce subdividiendo sus intervalos, cada sumando $m_r \delta_r$ produce varios de suma $\geqq m_r \delta_r$ en virtud de [48-7]; y cada $M_r \delta_r$ da varios de suma $\leqq M_r \delta_r$. Por lo tanto, la acotación [48-7] queda ampliada así:

[48-8] $$s_0 \leqq s \leqq s' \leqq S' \leqq S \leqq S_0.$$

De aquí resulta que toda suma s_1 es no mayor que toda suma S_2, pues elegida una partición π' posterior a ambas, es:

$$s_1 \leqq s' \leqq S' \leqq S_2.$$

b) Probada ya [48-6], tenemos una clase inferior de números s, y una clase superior de números S; si probamos que ambas clases son *contiguas*, definirán un número real como elemento único de separación, *número que por definición será el valor de la integral definida de la función* f(x) *entre los límites* a *y* b, indicado por $\int_a^b f(x)\, d\,x$, y que según los postulados que definen el área, evaluará la del trapezoide en cuestión.

Aquellas clases serán contiguas si probamos que para $\delta \to 0$:

[48-9] $$\lim\, (S - s) = 0$$

esto es, que a todo $\varepsilon > 0$ corresponde un δ tal, que para *toda* partición de norma menor que δ corresponden sumas inferior s y superior S tales que $S - s < \varepsilon$.

Por la continuidad *uniforme* de f(x) en $[a, b]$ (§ 26-6), para cada $\varepsilon > 0$ existirá un $\delta > 0$ tal que para *cualquier* partición de norma menor que δ será para todos sus subintervalos:

[48-10] $$M_r - m_r < \frac{\varepsilon}{b - a},$$

y entonces:

[48-11]
$$S - s = \Sigma\, (M_r - m_r)\, (x_r - x_{r-1}) < \frac{\varepsilon}{b - a} \Sigma\, (x_r - x_{r-1}) = \varepsilon,$$
como queríamos probar.

c) Por [48-6] y [48-9], el elemento frontera de las clases contiguas, o integral definida, será también el límite común de las sumas inferiores y superiores cuando tiende a cero la norma de las particiones:

[48-12] $$\int_a^b f(x)\, d\,x = \lim_{\delta \to 0} s = \lim_{\delta \to 0} S.$$

Si consideramos un punto ξ_r cualquiera en $[x_{r-1}, x_r]$, será:

[48-13] $$m_r \leqq f(\xi_r) \leqq M_r,$$

y en vez de las sumas inferior y superior correspondientes a cada partición, podemos considerar las llamadas *sumas de* RIEMANN:

[48-14] $$\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}),$$

cada uno de cuyos sumandos representa un rectángulo intermedio entre el contenido y el continente. El límite de [48-14] para $\delta \to 0$ existirá también, y coincidirá con el valor [48-12], ya que por [48-13] es:

[48-15] $$s \leqq \Sigma f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \leqq S.$$

Por lo tanto, y por definición, *el valor de la integral definida de la función continua* $f(x)$ *en* $[a, b]$, *vendrá dado por el límite común para* $\delta \to 0$:

[48-16] $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma m_r (x_r - x_{r-1}) = \\ = \lim \Sigma f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) = \\ = \lim \Sigma M_r (x_r - x_{r-1}),$$

y representará el área del trapezoide correspondiente.

d) La demostración de existencia y definición de integral definida se puede generalizar fácilmente para el caso de una función $f(x)$ que se conserve *acotada* en el intervalo $[a, b]$ y sea *continua* en él salvo en un número finito de puntos (figura 140). En este caso pueden formarse también las sumas [48-3] y [48-4], para las cuales se siguen cumpliendo [48-6] y [48-9], y de ahí se deduce *la subsistencia de la definición existencial* [48-16]. El método para demostrar [48-9] consiste en excluir los puntos de discontinuidad, mediante entornos de longitud total ω tan pequeña como se quiera.

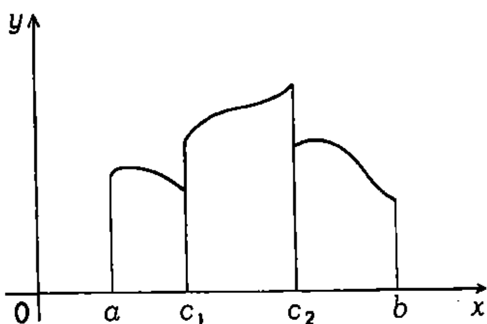


Fig. 140.

Así, si:

[48-17] $$|f(x)| < M \quad \text{para} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

y encerramos cada uno de los k puntos de discontinuidad en un entorno de longitud ω/k, excluyendo de la suma [48-11] todo rectángulo cuya base

tenga algún punto común con dichos entornos, para una partición cualquiera de norma menor que $\omega/2\,k$, la suma de bases de los sumandos excluídos para cada punto de discontinuidad no será mayor que $2\,\omega/k$ (fig. 141), y en virtud de [48-17], el valor de los sumandos de [48-11] correspondientes a los k puntos de discontinuidad será menor que:

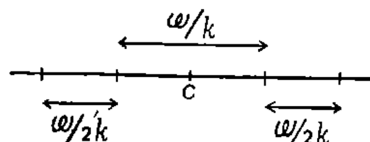


Fig. 141.

$$k.2\,M.2\,\frac{\omega}{k} = 4\,M\,\omega.$$

La función $f(x)$, en la parte del intervalo $[a, b]$ restante a los entornos ω/k excluídos, será uniformemente continua, y podemos *en dicha parte* formular [48-10]. Por lo tanto, dado ε arbitrariamente pequeño, fijaremos ω tal que sea $\omega < \varepsilon/(4\,M)$, y entonces, para *toda* partición la norma δ inferior, tanto a $\omega/(2\,k)$ como a la determinada por la condición de continuidad uniforme [48-10], corresponderán sumas [48-3] y [48-4] tales que:

$$[48\text{-}18] \qquad S - s < 4\,M\,\omega + \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) < 2\,\varepsilon,$$

es decir, se cumplirá [48-9], y por lo tanto [48-16].

Dejamos para el § 49 una más amplia generalización de este concepto de integral definida.

e) Esta operación de integración definida, equivalente a la *cuadratura de un área*, no es más que la formación de una suma de infinitésimos, cuyo número aumenta al infinito; el símbolo y notación [48-16] quedan justificados por la expresión:

$$[48\text{-}19] \qquad \int_a^b f(x)\,d\,x = \lim_{\Delta x \to 0} \Sigma\, f(x)\,.\Delta x,$$

donde cada uno de los sumandos del segundo miembro representa el área de un *rectángulo elemental* de la sumación [48-19].

4. **Cálculo directo de algunas integrales.** — Veremos en el § 50 que, por lo general, para calcular una integral no es necesario aplicar el proceso que sirve para definirla, el que resulta muy difícil por poco que se complique la función. Sin embargo, calcularemos directamente algunas integrales muy sencillas, a modo de ejemplos para familiarizarnos con la definición, y para cerciorarnos de que es constructiva.

a) Para $f(x) = 1$, todas las sumas s valen lo mismo:

$$s = \Sigma\, m_r\,\delta_r = \Sigma\, 1\,.\delta_r = b - a,$$

y entonces, por [48-12]:

$$[48\text{-}20] \qquad \int_a^b 1\,.\,d\,x = \int_a^b d\,x = b - a.$$

Discútanse las otras formas de definición [48-16].

b) Para $f(x) = x$ dividamos $[a, b]$ en n partes *iguales*, de amplitud $\delta = (b-a)/n$. Tendremos $f(x_r) = x_r = a + r\,\delta$; entonces:

$$\Sigma\, f(x_r)\,\delta_r = \delta\,\Sigma\,(a + r\,\delta) = \delta\,(n\,a + \delta\,\Sigma\, r) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\,n\,a + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 (1 + 2 + \ldots + n),$$

y como $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ (demuéstrese por recurrencia), se obtiene:

$$\Sigma\, \mathrm{f}(x_r)\delta_r = (b-a)a + \tfrac{1}{2}\,(b-a)^2\,\frac{n+1}{n}.$$

Como el límite del segundo miembro para $n\to\infty$ es:

$$(b-a)a + \tfrac{1}{2}(b^2-2ab+a^2) = \tfrac{1}{2}(b^2-a^2),$$

se tiene por [48-16]:

[48-21] $$\int_a^b x.\mathrm{d}\,x = \tfrac{1}{2}(b^2-a^2).$$

EJERCICIO Hallar [48-21] formando el promedio de las sumas inferior y superior para una partición *cualquiera.*

5. **Propiedades de la integral definida.** — *a*) *Propiedad aditiva de intervalo. Si el intervalo* $[a,b]$ *se descompone en dos por un punto intermedio c, se tiene:*

[48-22] $$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^c \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_c^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

DEM.: Recordemos (§ 48-3, *a*) que si un intervalo $\delta_r = x_r - x_{r-1}$, se divide en dos, δ'_r y δ''_r, la suma $s=\Sigma\, m_r\,\delta_r$ *no puede decrecer.* Sentado esto, haremos la demostración en dos partes:

1º Como el primer miembro de [48-22] es el extremo superior de *todas* las sumas *s*, y el segundo de sólo las de aquellas particiones que tienen *c* como punto de división, se tiene:

[48-23] $$\int_a^b \geqslant \int_a^c + \int_c^b$$

2º Como al intercalar en una partición el punto *c*, no decrece la suma *s*, se tiene:

[48-24] $$\int_a^c + \int_c^b \geqslant \int_a^b$$

Las desigualdades [48-23] y [48-24] sólo pueden coexistir si vale la igualdad [48-22].

Si ponemos por definición:

[48-25] $$\int_b^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_a^b \mathrm{f}\,(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

[48-22] se puede escribir así:

$$\int_a^c + \int_c^b + \int_b^a = 0.$$

El teorema se generaliza fácilmente para una descomposición del intervalo en un número finito cualquiera de intervalos parciales.

b) *Propiedad lineal respecto del integrando.* — b_1) Si $\mathrm{f}(x)$ se multiplica por un número real k, las sumas s, S, deducidas de $\mathrm{f}(x)$, se transforman en las $k\,s$, $k\,$S para la nueva función

$k\,f(x)$, y si s y S tienen límites iguales, lim s = lim S, aquéllas convergen hacia k lim $s = k$ lim S. Es decir:

Si $f(x)$ *se multiplica por una constante, su integral queda multiplicada por la misma constante:*

[48-26] $$\int_a^b k\,f(x)\,d(x) = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

En particular, para $k = -1$, resulta:

Funciones opuestas tienen integrales opuestas.

EJEMPLO: Las ordenadas de la elipse de semiejes a, b, referidas a sus ejes de simetría, son iguales a las ordenadas correspondientes de la circunferencia de radio a multiplicadas por $\frac{b}{a}$; luego, el área de la semielipse superior es igual a la del semicírculo superior multiplicada por $\frac{b}{a}$, y por lo tanto, el área de la elipse es:

$$\pi a^2 \frac{b}{a} = \pi a b.$$

b_2) Si $f(x)$ es suma de dos funciones integrables $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, para cada partición de $[a, b]$, la suma [48-14] relativa a f es suma de las correspondientes a f_1 y f_2, y su límite para $n \to \infty$ es la suma de ambos límites; luego:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

y en general:

[48-27] $$\int_a^b \Sigma\, f_r(x)\,dx = \Sigma \int_a^b f_r(x)\,dx,$$

si el número de sumandos es finito.

b_3) De b_1 y b_2 resulta la *propiedad lineal:*

$$\int_a^b \Sigma\, k_r\, f_r(x)\,.dx = \Sigma\, k_r \int_a^b f_r(x)\,.dx,$$

para cualquier número finito de términos.

c) Propiedades de monotonía. — Como la integral de una función positiva es $\geqq 0$, resulta del carácter lineal, por sustracción:

[48-28] Si $f(x) \leqq g(x)$, es $\int_a^b f(x)\,.dx \leqq \int_a^b g(x)\,.dx.$

De aquí resulta, observando que $-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

o sea:

[48-29] $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx;$$

brevemente: *el módulo de la integral no supera a la integral del módulo.*

6. **Teorema del valor medio.** — *a*) Como por [48-7] todas las sumas s y S están comprendidas entre $s_0 = m(b - a)$ y $S_0 = M(b - a)$, tendremos:

[48-30] $$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x).dx \leqq M(b-a);$$

por consiguiente, *existirá un número* μ *comprendido entre* m *y* M ($m \leqq \mu \leqq M$) *tal que*:

[48-31] $$\int_a^b f(x).dx = \mu\,(b-a).$$

Este número μ se llama *valor medio* de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$; su valor es:

[48-32] $$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx.$$

Si suponemos $f(x)$ continua, tomará (§ 26-4) el valor μ en un punto ξ por lo menos, del intervalo (gráficamente: la recta horizontal $y = \mu$ cortará a la curva) y el teorema del valor medio [48-31] puede escribirse en la siguiente forma, *para funciones continuas*:

[48-33] $$\int_a^b f(x).dx = (b-a).f(\xi), \quad (a < \xi < b).$$

b) Es interesante interpretar gráficamente el teorema del valor medio y su demostración. La doble desigualdad [48-30] expresa que el área del trapezoide está comprendida (fig. 142) entre las de los rectángulos de igual base: $a\,R\,S\,b$ y $a\,R'\,S'\,b$, y es entonces igual a la de un rectángulo $a\,R''\,S''\,b$ de igual base y altura intermedia μ (valor medio).

Como $R''\,S''$ puede cortar a la curva más de una vez. la abscisa ξ no es necesariamente única (línea punteada de figura 142).

NOTA: Si dividimos $[a, b]$ en n partes iguales a h, y tomamos las n ordenadas: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la función $f(x)$, su media aritmética es:

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = \frac{y_1 h + y_2 h + \ldots + y_n h}{n h}$$

El denominador es $n h = b - a$. El límite del numerador para $n \to \infty$ es la integral de $f(x)$. Por lo tanto, el límite de la media aritmética de las n ordenadas, al crecer n es precisamente [48-32]. Tenemos así otro significado del número μ, que hemos llamado valor medio, y es legítimo llamarlo *media aritmética de la función* en el intervalo $[a, b]$.

c) Señalemos una generalización del teorema del valor medio (*a*), fundada en las propiedades de monotonía (§ 48-5, *c*).

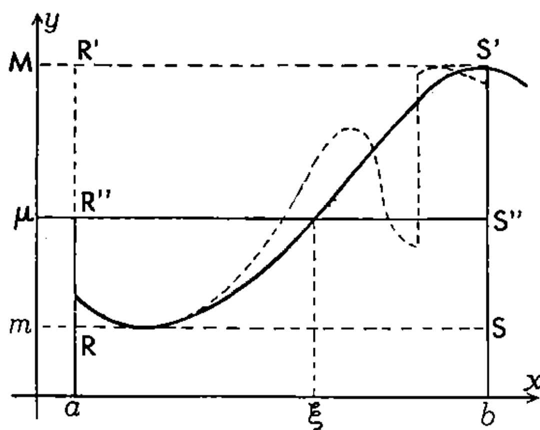


Fig. 142.

Sea $\varphi(x) \geqslant 0$ y $f(x)$ comprendida en m y M; se tiene, por ser $m\,\varphi(x) \leqslant f(x)\,\varphi(x) \leqslant M\,\varphi(x)$:

$$m \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,.\,\varphi(x)\,dx \leqslant M \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

y entonces existe un valor μ intermedio entre m y M tal que:

[48-34] $$\int_a^b f(x)\,.\,\varphi(x)\,dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Este teorema, llamado *primer teorema del valor medio*, comprende al de (*a*) para $\varphi(x) \equiv 1$. Se lo ha demostrado suponiendo $\varphi(x) \geqslant 0$, pero basta, evidentemente, *que* $\varphi(x)$ *no cambie de signo en* $[a, b]$.

Ejercicios

1. Probar que en un círculo de radio r, las áreas s y S de los polígonos inscritos y circunscritos forman dos clases contiguas con frontera πr^2.

2. Interpretar geométricamente los resultados [48-20] y [48-21].

3. Probar que $\int_a^b (2x+3)\,.\,dx = b^2 + 3b - (a^2 + 3a)$: *a*) directamente; *b*) utilizando los resultados [48-20] y [48-21].

4. Indicar las relaciones que ligan a $I = \int_0^a f(x)\,dx$ y $J = \int_{-a}^0 f(x)\,dx$, supuestas existentes, en caso de que $f(x)$ sea: *a*) una función par, *b*) una función impar (§ 23-9).

5. Calcular: $\int_a^b e^x \,\mathrm{d}\,x$, $\int_0^a \operatorname{sen} x \,.\, \mathrm{d}\,x$, $\int_0^a \cos x \,.\, \mathrm{d}\,x$.

6. A partir de

$$\frac{1}{x_i^2} < \frac{1}{x_{i-1}\,x_i} < \frac{1}{x_{i-1}^2}, \text{ probar que} \int_a^b \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}, \quad (a \,.\, b > 0).$$

7. Tomando los puntos x_r en progresión geométrica, calcular la integral, ya hallada así por P. FERMAT en el siglo XVII (ver nota I):

$$\int_a^b x^n \,\mathrm{d}\,x = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1,\ b > a > 0.$$

8. Con las mismas subdivisiones, y usando el ejercicio 6 de § 21, probar que

$$\int_a^b \frac{1}{x} \mathrm{d}\,x = \ln b - \ln a, \ (b > a > 0).$$

9. Calcular el límite de $\mathrm{I}_n = \int_0^a x^n \,\mathrm{d}\,x$ para $n \to +\infty$. Interpretación geométrica.

10. ¿Cuál es la integral de 0 a b de la función $x.[x]$ (§ 23-3, ej. 3)?

11. Probar:

$$a)\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{\mathrm{d}\,x}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1};$$

$b)$ la sucesión $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu} - \int_1^\nu \frac{\mathrm{d}\,x}{x}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$, es decreciente y acotada inferiormente (cfr. § 22-3, b).

12. Tomando $h = (\operatorname{Arc\,sen} b)/n$, $x_r = \operatorname{sen} r\,h$, y considerando sumas de RIEMANN [48-14] con adecuados ξ_r, probar:

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}\,x}{+\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{Arc\,sen} b, \text{ si } |b| < 1.$$

13. Hallar la abscisa intermedia ξ del teorema del valor medio [48-33] para las integrales siguientes, e interpretar geométricamente:

$$1^{\circ})\ \int_0^1 1 . \mathrm{d}\,x; \quad 2^{\circ})\ \int_a^b x . \mathrm{d}\,x; \quad 3^{\circ})\ \int_a^b \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2} \ (a . b > 0).$$

14. Demostrar la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ para integrales:

$$\left(\int_a^b \mathrm{f}(x) \,.\, \mathrm{g}(x) \,.\, \mathrm{d}\,x\right)^2 \leqslant \int_a^b \mathrm{f}^2(x)\,\mathrm{d}\,x \,.\, \int_a^b \mathrm{g}^2(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

§ 49. INTEGRAL DE RIEMANN

1. La integral según Riemann. — El proceso de cálculo explicado en el § 48-3, para la obtención de la integral definida de una función acotada y continua salvo un número finito de discontinuidades, cabe aplicarlo a una función *acotada*, prescindiendo de su continuidad; entonces, las sumas inferiores s y sumas superiores S que allí aparecían, correspondientes a cada partición del intervalo $[a, b]$, seguirán cumpliendo la condición de ordenación [48-6], pues subsiste la demostración vista en § 48-3, *a*.

La idea de RIEMANN consiste en prescindir de toda hipótesis de continuidad y, *con la única hipótesis de la acotación*, ver qué clase de funciones conducen a clases *contiguas* de sumas, para que resulten así integrables con el mismo proceso.

DEF.: *Integral* de la función $f(x)$ *acotada* en $[a, b]$ es el número frontera entre las sumas s y S, *cuando ambas son contiguas.*

Condición necesaria y suficiente para la existencia de la integral es que para cada $\varepsilon > 0$ exista una partición del intervalo de integración en un número *finito* de subintervalos de longitudes δ_r, tal que:

[49-1] $$S - s = \Sigma\,(M_r - m_r)\,\delta_r < \varepsilon \quad (\delta_r = x_r - x_{r-1}).$$

Llamando *oscilación* de una función en un intervalo a la diferencia de sus extremos superior e inferior en el mismo, designemos por $\omega_r = M_r - m_r$ a la de $f(x)$ en $[x_{r-1}, x_r]$; entonces, la condición de existencia de la integral se expresa así:

[49-2] $$\Sigma\,\omega_r\,\delta_r < \varepsilon.$$

La integral así definida suele llamarse *integral de* RIEMANN, o integral (R); las funciones acotadas que verifican [49-1] o [49-2] se llaman *integrables* (R).

TEOR. 1: *Toda función* $f(x)$ *continua en* $[a, b]$ *es integrable* (R).

Porque es acotada y verifica [49-1], que no es sino la [48-11] antes demostrada (§ 48-3, *b*). En cambio, una función continua en (a, b) puede no conservarse acotada, y no ser aplicable a ella la definición de función integrable (R).

EJEMPLO: $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$; no se conserva acotada en [0; 1], y tampoco cumple la condición [49-2], como es fácil ver.

TEOR. 2: *Toda función* $f(x)$ *acotada y monótona en* $[a, b]$ *es integrable* (R) en $[a, b]$.

DEM.: Si $f(x)$ es finita y creciente en $[a, b]$, el máximo en cada intervalo parcial $[x_{r-1}, x_r]$ es el valor $f(x_r)$, y el mínimo es $f(x_{r-1})$; la oscilación es la diferencia $f(x_r) - f(x_{r-1})$, y

la suma de estas diferencias es $f(b) - f(a)$; luego, si todos los intervalos tienen medida menor que h, resulta:

[49-3] $$S - s < (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n)h = [f(b) - f(a)].h,$$

número arbitrariamente pequeño con h.

Son, por lo tanto, integrables las funciones crecientes; análogamente las decrecientes; y también, por lo tanto, las funciones de variación acotada, que definiremos en § 55-9, por ser diferencia de dos crecientes (§ 55-9). En particular, toda función que tenga un número finito de máximos y mínimos y sea monótona en cada intervalo parcial que ellos determinan (cfr. ejercicio 5 de § 49). Esas funciones desempeñan un importante papel en muchas cuestiones de Análisis, y de ellas nos ocuparemos más adelante (§ 55-1, nota 3; § 55-9; y series de FOURIER, vol. III).

NOTA: No basta la monotonía en (a, b); es preciso que $f(x)$ esté definida en a y en b para poder aplicar el criterio [49-3].

Por ejemplo: no es integrable $1/x$, ni tampoco $\ln x$ en $(0; 1)$, a pesar de ser monótonas en $(0; 1)$, por no tener valor finito para $x = 0$.

2. **Integrales inferior y superior.** — Si no se impone la condición de contigüidad de las clases, cabe que no haya número frontera y la función se dice *no integrable*, pero siempre existen las llamadas *integral inferior* e *integral superior* de DARBOUX, definidas como extremo superior (§ 23-14) de las sumas inferiores, y extremo inferior de las superiores, respectivamente:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \text{extr sup } s, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \text{extr inf } S,$$

siendo, por lo tanto, para todo par de sumas (ver ejercicio 3 de § 49):

$$s \leqq \underline{\int} \leqq \overline{\int} \leqq S.$$

La condición de existencia de la integral es, por lo tanto, la igualdad $\underline{\int} = \overline{\int}$.

EJEMPLO: Si $f(x)$ es la función de DIRICHLET en $[0, 1]$, cualquiera sea la partición adoptada, es en cada intervalo:

$$m_r = 0, \qquad M_r = 1;$$

luego, $$s = 0, \qquad S = 1;$$

por lo tanto, $$\underline{\int} = 0, \qquad \overline{\int} = 1.$$

La función de DIRICHLET no es, pues, integrable (R).

NOTA: Algunas de las propiedades de la integral subsisten para las integrales inferior y superior de DARBOUX. Tal ocurre con la aditividad respecto al intervalo (§ 48-5, a), y las propiedades de monotonía (§ 48-5, c). En cambio, no vale la propiedad lineal respecto del integrando (§ 48-5, b), lo que hace que estas integrales sean poco interesantes en

sí mismas. Por ejemplo, si $f(x)$ designa la función de DIRICHLET, y $g(x) = 1 - f(x)$, se tiene, integrando en $[0; 1]$:

$$1 = \underline{\int_0^1}(f+g)\,dx \neq \underline{\int_0^1} f\,dx + \underline{\int_0^1} g\,dx = 0$$

$$1 = \overline{\int_0^1}(f+g)\,dx \neq \overline{\int_0^1} f\,dx + \overline{\int_0^1} g\,dx = 2.$$

Se tiene, en general, en virtud de las propiedades de los extremos superior e inferior, análogas a las de los límites de oscilación (cfr. ejercicio 12 de § 20):

$$\underline{\int}(f+g)\,dx \geqslant \underline{\int} f.dx + \underline{\int} g.dx; \quad \overline{\int}(f+g)\,dx \leqslant \overline{\int} f.dx + \overline{\int} g.dx,$$

y si a es una constante:

$$\underline{\int} a\,f.dx = a\underline{\int} f.dx \quad \text{si} \quad a \geqslant 0; \quad \underline{\int} a\,f.dx = a\overline{\int} f.dx \quad \text{si} \quad a \leqslant 0.$$

y análogamente para $\overline{\int} a\,f.dx$.

EJERCICIOS

1. Demostrar que si $f(x)$ es integrable (R), lo es también $|f(x)|$. La recíproca no vale como lo muestra la función $f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}$, siendo $\varphi(x)$ la función de DIRICHLET (§ 23-3, ej. 4).

2. Probar que el producto de dos funciones integrables (R) en $[a, b]$ es integrable (R) en $[a, b]$.

3. Demostrar en detalle la desigualdad $\underline{\int_a^b} f(x).dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x).dx$, del § 49-2.

4. Si $f(x)$ es monótona y acotada en $[0,1]$, la diferencia

$$\Delta_n = \int_0^1 f(x).dx - \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

cumple $\Delta_n = O(1/n)$ para $n \to \infty$. Más precisamente se tiene, según que la función sea creciente o decreciente:

$$\frac{f(0) - f(1)}{n} \leqslant \Delta_n \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant \Delta_n \leqslant \frac{f(0) - f(1)}{n}.$$

5. Si $\varphi(x)$ designa la función de DIRICHLET (§ 23-3, ej. 4), la función $f(x) = \{\varphi(x) - \frac{1}{2}\}$ sen x, con extremos (§ 23-14) $-\frac{1}{2}$ y $+\frac{1}{2}$ en $[0,2\pi]$, tiene en dicho intervalo un mínimo en $\pi/2$ y un máximo en $3\pi/2$. Hallar sus integrales inferior y superior de DARBOUX, y estudiar también la función $g(x) = \{\varphi(x) - \frac{1}{2}\}.|$ sen $x|$.

§ 50. Integral y primitiva

1. La función integral y su derivada. — *a*) Hasta ahora, la noción de integral aparece como totalmente independiente de la de derivada. En este parágrafo probaremos que cuando f(x) es continua, ambas son en cierto modo inversas. Este resultado nos permitirá abordar sistemáticamente el cálculo de integrales definidas.

Si fijamos el origen a y hacemos variar el extremo superior, que llamaremos X, la integral de f(x) en el intervalo $[a, X]$ será una función de X:

[50-1] $$\int_a^X f(x)\,dx = F(X),$$

que se llama *función integral* de f(x), y que representa, cuando f$(x) > 0$, el área absoluta (§ 54) del trapezoide, variable con el extremo X. Para determinar esta función calculemos su derivada, y para ello formemos el incremento:

[50-2] $$\Delta F(X) = \int_a^{X+h} - \int_a^X = \int_X^{X+h} = h\,\mu,$$

siendo μ (§ 48-6) un número comprendido entre los extremos inferior y superior de f(x) en el intervalo $[X, X+h]$. Esto nos muestra que la función integral F(x) es siempre continua.

Si f(x) *es continua en el punto* X, todos los valores de f(x) en $[X, X+h]$ tienden hacia f(X) para $h \to 0$, y también $\mu \to$ f(X); luego, resulta:

[50-3] $$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta F(X)}{\Delta X} = F'(X) = f(X).$$

Por lo tanto:

La función integral de la función acotada f(x) *es continua, y tiene como derivada* f(x) *en todo punto de continuidad de ésta.*

En particular:

Si f(x) *es continua en* $[a, b]$, *es* F$'(x) =$ f(x) *en todo él.*

b) Queda así resuelto el problema inverso de la derivación, que dentro del Cálculo diferencial no encuentra solución: dada una función f(x), hallar otra F(x), llamada antiderivada o *función primitiva,* tal que su derivada sea f(x). Este problema y el de la integración *coinciden en el campo de las funciones continuas,* aun cuando sean problemas distintos en un campo funcional más amplio. Tenemos, ahora:

Toda función continua tiene función primitiva. Esta es su función integral, y de ella se deducen todas (§ 35-3), sumándole una constante arbitraria.

Nota 1: Al variar a en [50-1], la integral queda incrementada en una constante, pero no para todo valor de C es $F(x)+C$ una función integral. Por ejemplo, por [48-21]:

$$\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2} \quad ; \quad \int_a^x x\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2};$$

pero $\frac{x^2}{2} + 1$ no se obtiene para ningún valor de a.

Tampoco es $F(x) \equiv C \neq 0$ una función integral de $f(x) \equiv 0$, pues para todo a es $\int_a^X f(x)\,dx = 0$.

Llamaremos *integral indefinida* de $f(x)$ a toda función integral más una constante arbitraria:

[50-4] $$\int_a^X f(x)\,dx + C.$$

Si $f(x)$ es continua, este concepto coincide con el de función primitiva. Por esta razón se usa el símbolo de integración $\int$ para indicar la *primitiva* $F(x)$, o función cuya diferencial es $f(x)\,dx$:

[50-5] $$F(x) = \int f(x)\,dx \text{ equivale a } dF(x) = f(x)\,dx.$$

Nota 2: Se suele llamar integral indefinida a [50-1]. Nosotros la llamaremos *función integral*, para llamar *integral indefinida* a [50-4], que puede comprender una familia más amplia de funciones en virtud de la nota 1. La primitiva [50-5] se lee integral de $f(x)\,dx$, y se la llama a veces integral indefinida, lo que no es apropiado, pues puede no coincidir con [50-4] si $f(x)$ no es continua.

Ejercicio: Probar que la función integral de $\operatorname{sg} x$ (§ 23-6), discontinua en $x=0$, es para $a=0$ la función continua $|x|$. ¿Cuál es la función integral, tomando $a=2$?

2. **Regla de Barrow.** — *a*) Se quiere calcular la integral definida en un intervalo $[a, b]$, de una función $f(x)$ *continua* en él. Si por un procedimiento cualquiera hemos hallado una primitiva $F(x)$, como la función integral también es primitiva (§ 50-1), y dos primitivas difieren en una constante aditiva (§ 35-3), tendremos:

$$\int_a^X f(x)\,dx = F(X) + C,$$

pero el valor de la constante C puede *determinarse*: haciendo $X = a$ el primer miembro se reduce a cero, y queda:

$$F(a) + C = 0 \quad \therefore \quad C = -F(a),$$

y entonces:

$$\int_a^X f(x)\,dx = F(X) - F(a).$$

En particular, para $X = b$ resulta para la integral definida:

$$[50\text{-}6] \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

donde el tercer miembro es una notación cómoda para el segundo: *La integral definida de una función continua* $f(x)$ *en un intervalo* $[a, b]$, *es igual a la diferencia de valores de una primitiva cualquiera en los extremos superior e inferior.*

Ejemplo: Como $f(x) = x^2$ tiene la primitiva $F(x) = x^3/3$ (verifíquese), se tiene:

$$\int_1^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{64-1}{3} = 21.$$

Ya que otra primitiva, como $(x^3/3) + 5$, difiere de $F(x)$ en una constante, conduce al mismo resultado, pues la constante se simplifica al formar la diferencia de valores.

Nota 1: La importancia del resultado de Barrow no se puede ponderar suficientemente; representa la sencilla fórmula [50-6], el punto de confluencia de dos grandes corrientes del pensamiento: el cálculo integral de Arquímedes, que se proponía la evaluación de áreas por artificios de sumación tan ingeniosos como infecundos (nota I), y el Cálculo diferencial, nacido en el siglo xvii, para la resolución del problema de la tangente, por obra de Fermat, Pascal, etc. (Cap. VIII, nota I); disciplinas ambas que parecían condenadas a la esterilidad, de cuya conjunción expresada por la fórmula [50-6] nació el Análisis moderno, por obra de Newton y de Leibniz.

b) Si dos funciones *continuas* tienen la misma derivada $f(x)$ en todos los puntos, excepto a lo sumo en número finito de puntos de discontinuidad de $f(x)$, las dos funciones difieren en una constante a la derecha de cada punto de discontinuidad, y difieren en otra constante a la izquierda; pero por la supuesta continuidad, ambas constantes deben ser iguales; luego, subsiste el teorema fundamental en que se basa la regla de Barrow. Basta, pues, fijarse en que la primitiva elegida sea *continua* en $[a, b]$, a pesar de las discontinuidades que pueda tener el integrando $f(x)$:

Regla generalizada de Barrow: Si $f(x)$ es una función continua, excepto en un número finito de puntos del intervalo (a, b) e integrable en (a, b), y se conoce una función $F(x)$ *continua* en $[a, b]$ tal que, excepto a lo más en un número finito de puntos de (a, b), sea primitiva de $f(x)$, entonces es válida la regla de Barrow [50-6].

Notas: 2. Si el conjunto de discontinuidades de $f(x)$ es infinito, pero numerable, subsiste esta regla, en virtud de Capítulo IX, nota VI, *d*).

3. También allí hemos visto que el conjunto de puntos donde la función de Cantor tiene derivada no nula no es numerable. Este conjunto,

llamado *conjunto ternario de* CANTOR, es además de medida nula (nota III, *c*), pues su complementario en [0; 1] está formado por infinitos segmentos de longitud total 1.

Definamos la función $f(x)$ tal que sea nula en $0 \leqslant x \leqslant 1$, salvo en el conjunto de CANTOR, en cuyos puntos asignamos a $f(x)$ un valor cualquiera nulo o no, lo que no afecta su integrabilidad (R) (nota III). La función de CANTOR $\Phi(x)$ es continua, y verifica $\Phi'(x) = f(x)$, excepto en los puntos del conjunto de CANTOR, y sin embargo, no se verifica la regla de BARROW, pues

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \neq \Phi(1) - \Phi(0) = 1.$$

4. V. VOLTERRA dió un ejemplo famoso (ver nota IV) de una función *continua* $\Phi(x)$, con derivada finita y *acotada* en todo $[a, b]$ no integrable (R). En este caso, tampoco será aplicable la regla de BARROW, por inexistencia de la integral, que así vemos que no debe confundirse con la primitiva.

3. Sobre la aplicación de la regla de Barrow. — La precipitada aplicación de la fórmula [50-6] puede llevar a grandes errores, sobre todo si la primitiva es una función multiforme: en este caso, hemos de tener cuidado de adoptar la fórmula para una rama *continua*. Así, por ejemplo si la primitiva es una raíz cuadrada con un cierto signo, se cuidará no cambiar éste; si es arc sen x se adoptará la determinación continua, y lo mismo para arc tg x.

EJEMPLOS: 1. Es evidentemente errónea:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arc\,tg} x\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2},$$

porque aun cuando es $\operatorname{arc\,tg} 1 = \pi/4$, y $\operatorname{arc\,tg} (-1) = 3\pi/4$, estos valores corresponden a una determinación de arc tg x que en $\pi/2$ es discontinua. Si se toma el valor principal, *continuo*: $-\pi/2 < \operatorname{arc\,tg} x < \pi/2$, resulta el cálculo correcto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arc\,tg} x\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. En:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

el primer miembro sólo tiene sentido si a y b son del mismo signo, mientras que el segundo tiene un valor determinado, incluso cuando a y b son de distinto signo; en este caso, la fórmula [50-6] no es aplicable.

3. La función

$$\Phi(x) = -(\operatorname{sg} x)\sqrt{1-x^2}$$

(fig. 143), tiene la derivada

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}},$$

tanto para $1 > x > 0$, como para $-1 < x < 0$. Sin embargo, *no es primitiva de* $f(x)$, pues no es derivable en $x = 0$. Podría no obstante apli-

carse la regla generalizada de BARROW (§ 50-2, *b*), si no fuera $\Phi(x)$ *discontinua* en $x = 0$.

Una función continua que a la vez es primitiva en $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$, es (fig. 144):

$$\Psi(x) = (\operatorname{sg} x)\,(1 - \sqrt{1 - x^2}).$$

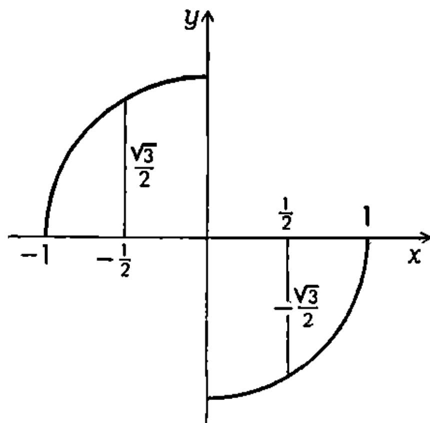


Fig. 143.

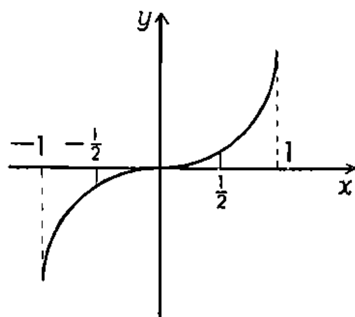


Fig. 144.

Se tiene:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \Big[\,\Psi(x)\,\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3},$$

mientras que con $\Phi(x)$ hubiéramos llegado erróneamente a $-\sqrt{3}$ (fig. 143).

4. **Integrales generalizadas.** — *a*) *Intervalo infinito.* — Pondremos por definición:

[50-7] $$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{X\to\infty} \int_a^{X} f(x)\,dx.$$

Según que este límite sea finito, infinito, o no exista, la integral del primer miembro se llama *convergente*, *divergente* u *oscilante*, denominaciones análogas a las empleadas para las series. La teoría de estas integrales será desarrollada en el volumen II (§ 80); pero conviene establecer desde ahora la fórmula fundamental que permite el cálculo de estas integrales, en el caso de existencia de límite, finito o infinito, y que generaliza la fórmula de BARROW como consecuencia inmediata de la definición:

[50-8] $$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{X\to\infty} \Phi(X) - \Phi(a),$$

fórmula que suele escribirse convencionalmente así:

$$\int_a^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}\,x = \Phi\,(x) - \Phi\,(a).$$

b) *Integrando infinito.* — Correlativamente al caso (a), si una función $\mathrm{f}(x)$ se conserva acotada e integrable (§ 49-1) en $[a + \varepsilon, b]$, por pequeño que sea $\varepsilon > 0$, pero tal que $|\,\mathrm{f}(x)\,| \to \infty$ para $x \to a^+$, puede generalizarse el concepto de integral, si se define:

[50-9] $$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \mathrm{f}\,(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

empleándose en este caso la misma notación conocida para representar la integral definida.

Según que ese límite sea finito, infinito o no exista, la integral se llama *convergente, divergente* u *oscilante.* Si el integrando se hace infinito en un punto intermedio c, es decir, si $|\,\mathrm{f}(x)\,| \to \infty$ para $x \to c$ $(a < c < b)$, la integral generalizada se define entonces mediante:

[50-10] $$\int_a^b \mathrm{f}\,(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} \mathrm{f}\,(x)\,\mathrm{d}\,x + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b \mathrm{f}\,(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Si se conoce una función $\mathrm{F}(x)$ *continua* en $[a, b]$, tal que, excepto a lo más en un número finito de puntos de (a, b), sea primitiva de $\mathrm{f}(x)$, como consecuencia inmediata de las definiciones [50-9], [50-10] subsistirá la regla generalizada de BARROW (§ 50-2), y podrá aplicarse la misma fórmula [50-6]. En el volumen II desarrollaremos detenidamente la teoría de las integrales generalizadas.

EJEMPLOS: 1. $$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}} = \Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_0^\pi = 2\sqrt{\pi}.$$

2. $$\int_{-1}^{+1} x^{-2/3}\,\mathrm{d}\,x = \Big[\,3\,x^{1/3}\,\Big]_{-1}^{+1} = 6.$$

3. La función $\ln|x|$ es primitiva de $1/x$ en $-1 < x < 0$ $0 < x < 2$; sin embargo, será falso afirmar que:

$$\int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \Big[\,\ln\,|x|\,\Big]_{-1}^{2} = \ln\,2,$$

porque la primitiva $\ln|x|$ *no es continua* en $x = 0$.

Ejercicios

1. Función integral de 1, x, sen x.
2. Función integral de $|x|$.
3. $$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{+\sqrt{1-x^2}} = \Big[\text{arc sen } x\Big]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = -\pi < 0$$

es evidentemente falso. ¿Dónde está el error?

4. Sea la función continua $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^2(1+e^{1/x})^2}$; $f(0) = 0$; que nunca es negativa y es derivada de $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$.

Resulta: $$0 < I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = \frac{1-e}{1+e} < 0.$$

¿Dónde está el error?

5. Verificar si es correcto $\displaystyle\int_{-1}^{2} \text{sg}\, x\, dx = \Big[\,|x|\,\Big]_{-1}^{2} = 1.$

6. Calcular: $a)$ $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$, $b)$ $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$, $c)$ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \text{sen } x\, dx$.

7. Área comprendida entre la curva *versiera* $y = (1+x^2)^{-1}$ y el eje x.

8. Calcular $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, y aplicar al cálculo del límite para $n \to \infty$ de $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-0}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$.

9. Aplicando $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!/n^n} = 1/e$ (ejercicio 7 de § 21), calcular directamente la integral generalizada $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\, dx$. $= -1$.

Notas al capítulo XIII

I. **Orígenes de la noción de integral.** — *a*) *Precursores.* — La noción de integral es mucho más vieja que la de derivada (ver Cap. VIII, nota I), y sus orígenes pueden remontarse a los griegos en problemas de cálculo de áreas y volúmenes, tratados aisladamente. Antifonte, hacia —430, define el área del círculo mediante una sucesión de polígonos regulares inscritos, y Eudoxo (409-356) calcula los volúmenes del cono y de la pirámide, como nos ha trasmitido Euclides en sus *Elementos* (libro 12, prop. 7 y 10). A este tipo de problemas está consagrada casi toda la obra de Arquímedes (287-212), gran parte de la cual ha llegado inalterada hasta nosotros.

b) El método "apagógico". — Se suele citar a ARQUÍMEDES como el primer antecesor del "Cálculo integral. En su libro *Sobre la cuadratura de la parábola*, enuncia para áreas el axioma de ARQUÍMEDES (§ 6-5, *b*): "nos hemos servido del lema siguiente: *Si dos superficies son desiguales el exceso de la mayor sobre la menor, siendo agregado a sí mismo un cierto número de veces, puede llegar a sobrepasar una superficie propuesta y limitada*".

Aunque llamado *axioma de* ARQUÍMEDES, es de EUDOXO, y tal vez anterior, y fué constantemente adoptado también por EUCLIDES: "Los geómetras que han vivido antes que nosotros, también han usado este lema para probar que los círculos están entre sí ..., y las esferas ...; que una pirámide es la tercera parte ..., y que un cono ...".

Es de notar que ARQUÍMEDES haya sentido la necesidad de *justificar* el uso de este postulado: "Ahora bien, los teoremas así demostrados no han parecido menos evidentes que los demostrados en otra forma. Los que acabo de publicar tienen entonces el mismo grado de evidencia".

Con este postulado, son eludidos los razonamientos dirigidos a infinitos o infinitésimos, y reconducidos a un sistema de desigualdades, mediante demostraciones por absurdo, método llamado *apagógico* en el siglo XVII. Aun en las demostraciones de los griegos, la idea directriz encierra un teorema general sobre sucesiones monótonas a_n creciente, a'_n decreciente: *Si* B *y* C *son fijos, y* $a_n \to$ B, $a'_n \to$ B, *siendo siempre* a_n *menor* (*y* a'_n *mayor*) *que* B *y* C, *entonces* B = C.

En sustancia, se trata de la *unicidad del límite* de dos sucesiones convergentes. En varias formas aparece en ARQUÍMEDES, en sus diferentes cuadraturas y cubicaciones, y sin referencia a conceptos como "infinito" "tiende", etc. Con este *método de exhaución* (de aniquilar la diferencia) han sistematizado los griegos los procesos infinitos.

Aunque el método "apagógico" es irreprochable como método de demostración, no es constructivo, pues por consistir en demostraciones por absurdo, reposa en el previo conocimiento del resultado a demostrar. Dice ARQUÍMEDES: "He descubierto este teorema, primero por consideraciones de mecánica, y luego por razonamientos geométricos".

Además de esta demostración *heurística*, destinada a "dar alguna verosimilitud al resultado", que se apoya en consideraciones de estática, y donde no vacila en considerar el segmento de la parábola *como la suma de una infinidad de segmentos de recta paralelos*, un tercer método, basado en principios análogos y desarrollado con todo rigor por exhaución, equivale en esencia al cálculo de la integral de x^2, y establece así los fundamentos del Cálculo integral. Pero para ver en la obra de ARQUÍMEDES un naciente cálculo integral, de entre las múltiples cuestiones geométricas tratadas sería necesario desentrañar algún esbozo de clasificación según la naturaleza de la integral correspondiente. Sólo en el siglo XVII se llega a una tal clasificación.

c) El siglo XVII. — En los diecinueve siglos que separan a ARQUÍMEDES de KÉPLER (1571-1640) no se encuentran progresos esenciales en la vía abierta por el siracusano. Fué un problema práctico (con motivo de la gran cosecha de uva en Austria, donde KÉPLER se encontraba) él que le indujo a estudiar la cubicación de toneles, y en 1615 aparece su famosa *Stereometría doliorum*, que contiene toda una teoría, muy imperfecta, sin duda, de la cubicación de sólidos de revolución, resolviendo el problema para 92 tipos, que designa con los nombres de las frutas a que se asemejan.

Por consideraciones nada rigurosas, descomponiéndolo en pequeñas cuñas o husos por planos meridianos, llega a cubicar el toro; y también aborda el problema para los cuerpos de revolución engendrados por un segmento circular que gira alrededor de su cuerda, cuerpos que llama *meliformes* o *citriformes*, según que el segmento sea mayor o menor que un semicírculo, logrando obtener cilindros equivalentes. Finalmente, enun-

cia una ley errónea, que sospecha exacta para este segundo caso: los volúmenes engendrados por el segmento circular al girar alrededor de su cuerda y de su eje de simetría son entre sí como la altura y la semicuerda del segmento circular.

En la misma obra hay atisbos del problema inverso de la tangente, que había de dar origen al Cálculo integral; se trata de distinguir la clase de cada cónica entre las diversas que pasan por un punto, según sea la posición de la tangente en él.

BUENAVENTURA CAVALIERI (1591?-1647) es otro gran precursor del Cálculo integral, y su *Geometría indivisibilibus* (1645) significa un progreso considerable en dirección distinta de la de KÉPLER. Mientras el gran astrónomo alemán persiste en la vía arquimediana de sumar los elementos infinitesimales en que se descompone cada figura, vano empeño casi siempre, el jesuíta italiano evita la sumación directa y se limita a comparar dos figuras para deducir la extensión de una mediante la otra. Cada recinto plano lo consi era como suma de infinitos segmentos paralelos, y cada cuerpo como suma de sus infinitas secciones paralelas. Tales segmentos y tales secciones planas son los *indivisibles* de CAVALIERI. Cuáles fueran los indivisibles de GALILEO, que también estaba en posesión de una teoría análoga, es cosa ignorada, pues nada llegó a publicar, pero en sus *Discorsi* (1638) efectúa una verdadera integración de la función $g\,t$, para llegar a la ley de caída de los graves: $(1/2)\,g\,t^2$.

El resultado capital de la Geometría de CAVALIERI es su famoso principio: *Dos figuras planas o espaciales que tienen equivalentes sus secciones paralelas son equivalentes.* Con él logra cubicar los conos, cuadrar la parábola, la elipse y la espiral de ARQUÍMEDES, problemas ya resueltos por el siracusano; pero estimulado por los ataques de sus competidores, llega a perfeccionar el método, comparando figuras cuyas secciones son tales que la extensión de una es potencia de la otra, y así llega (1647) a resultados que equivalen, con el tecnicismo actual, a calcular las integrales de las potencias x^n de exponente natural.

Su exposición ha sido muy censurada, llegando a decir MARIE que si hubiera premios para la oscuridad, lo ganaría sin disputa. Tal oscuridad, agregamos por nuestra parte, perdura a través de NEWTON y hasta nubla muchos tratados actuales —por su fecha, aunque no por su contenido—; oscuridad inevitable mientras se pretende descomponer las figuras en elementos *invariables*, sean *indivisibles* o *infinitésimos*. Tales tratados, escritos especialmente para técnicos, que hablan de puntos *consecutivos* de una curva, y que definen la tangente por la condición de tener dos puntos de la curva *confundidos* en uno, y dan definiciones metafísicas de los infinitésimos (cuando tan fácil es en nuestro tiempo darla sencilla y rigurosa) están conceptualmente atrasados respecto de CAVALIERI, quien, con excelente sentido, no pretende definir los indivisibles ni explicar la paradoja del continuo, limitándose a dar imágenes intuitivas y a enunciar con todo rigor y claridad su fecundo principio.

Gran progreso estaba reservado al Cálculo integral, por obra de JUAN WALLIS (1616-1703), que abandona el método geométrico de los matemáticos continentales, abordando la integración aritméticamente; y para poner de manifiesto su designio, titula su obra *Arithmetica infinitorum* (1655). He aquí los más importantes progresos debidos al genial inglés: integración de potencias de cualquier exponente (aunque sin utilizar el simbolismo); integral de $\sqrt{1-x^2}$, esto es, área del círculo en forma de producto de infinitos factores; de otro modo: desarrollo de π en producto infinito (§ 53-3), fórmula cuya importancia bastaría para inmortalizarlo; demostración de la cuadratura dada por HUYGENS para la cisoide, etc.

Pero con ser importantes estos hallazgos afortunados, el mérito más trascendental de WALLIS reside en haber establecido claramente la noción de *límite*, en la clara y rigurosa forma hoy vigente, esto es, con la condi-

ción de que la diferencia entre la variable y el límite sea *quavis assignabili minor*.

II. **La integral como límite según la norma.** — Es la definición de integral según CAUCHY (§ 48-3) hemos logrado acotar por un $\varepsilon > 0$ arbitrario la diferencia $S - s = \Sigma(M_r - m_r)\,\delta_r$, con sólo tomar suficientemente pequeña la máxima amplitud de los intervalos δ_r, acotación que imponíamos como condición para que la función sea integrable RIEMANN (§ 49-1), pero exigiendo solamente que para cada $\varepsilon > 0$ haya una partición que la verifique; pudiéndose demostrar que en tal caso basta tomar una partición cualquiera, de norma suficientemente pequeña.

La norma δ suele tomarse como variable independiente para considerar la integral como lim s ó lim S para $\delta \to 0$, pero nótese que s y S no son funciones ordinarias de δ, pues para cada δ hay infinitas sumas s y S.

Obsérvese también que las sumas [48-14] tienen infinitos valores para cada δ, no sólo por la infinidad de particiones de igual norma, sino también por las infinitas elecciones posibles del punto de cada intervalo, y debemos insistir en que *no se trata, por lo tanto, de funciones de* δ.

La demostración general antedicha, que expresa la integral como *límite según la norma* δ, suele llamarse *lema de* DARBOUX, y será expuesta más adelante en conexión con el problema equivalente de la rectificación de arcos (Cap. XV, nota I).

III. **Condiciones de integrabilidad (R.).** — Se puede dar a la condición necesaria y suficiente de integrabilidad (R) [49-2] otras formas en que aparezca más claramente el papel que juegan los puntos de discontinuidad de $f(x)$.

a) Si en una partición indicamos con λ la longitud total de los subintervalos donde la oscilación (§ 49-1) de $f(x)$ es superior a un número $\omega > 0$, tendremos:

$$\lambda\,.\,\omega \leqslant \Sigma\,\omega_r\,\delta_r,$$

y como por [49-2], para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición tal que $\Sigma\,\omega_r\,\delta_r < \varepsilon\,.\,\omega$ resulta $\lambda < \varepsilon$. Recíprocamente, si $\lambda < \varepsilon/2$, se prueba [49-2] análogamente a [48-18] y se tiene el enunciado de RIEMANN:

Para que una función acotada sea integrable (R) *en* $[a, b]$, *es necesario y suficiente que para cada par de números,* $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$, *exista una partición tal, que sea* $< \varepsilon$ *la suma de subintervalos donde la oscilación supera a* ω.

b) Llamamos *oscilación* de $f(x)$ *en un punto*, al límite de la oscilación en un entorno del punto cuando la amplitud de éste tiende a cero. Si $f(x)$ es acotada, este límite existe, pues la oscilación no aumenta al decrecer el intervalo.

Con esta noción, puede darse a la condición de integrabilidad la siguiente forma, debida a P. DU BOIS REYMOND:

Condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ *sea integrable* (R), *es que para todo par de números,* $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$, *el conjunto* $G(\omega)$ *de los puntos donde la oscilación no es menor que* ω, *se pueda incluir en un número* finito *de intervalos de suma* $< \varepsilon$.

Es suficiente porque, como antes, encerrados los puntos de oscilación $\geqq \omega$ en número finito de intervalos de longitud total $< \varepsilon$, los sumandos aportados por tales intervalos a la suma $S - s = \Sigma\,\omega_r\,\Delta\,x_r$ no llegan a $(M - m)\varepsilon$. En los restantes puntos que pueden comprender los extremos de los intervalos anteriores, la oscilación es $\omega(x) < \omega$, cada uno de ellos puede cubrirse por un entorno donde la oscilación sea también $< \omega$ y por el lema de BOREL (Cap. VI, nota III), siendo cerrado el conjunto de dichos puntos, al fraccionar suficientemente los intervalos que forman, será en cada intervalo parcial $M_r - m_r < \omega$; luego, su aporte a la suma

$\Sigma(M_r - m_r)\Delta x_r$ es $<(b-a)\omega$; y tomados ω y ε suficientemente pequeños, resulta $S - s$ menor que cualquier número positivo.

Es necesaria porque, si la función es integrable, existen particiones donde los intervalos de oscilación $M_r - m_r \geqq \omega$ tienen longitud arbitrariamente pequeña; y los puntos de oscilación $\omega(x) \geqq \varepsilon$ están encerrados en ellos.

c) Un conjunto lineal se llama *de medida nula*, cuando puede incluirse en un número finito *o infinito numerable* de intervalos cuya longitud total sea tan pequeña como se quiera.

Por ejemplo, es de medida nula el conjunto R de todos los puntos racionales de la recta, a pesar de ser denso. Basta numerar dichos puntos (§ 2-11) y cubrir el i-ésimo con un intervalo de longitud, $\varepsilon/2^i$, para tener el conjunto R cubierto por infinitos intervalos de longitud total:

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^i} + \ldots = \varepsilon.$$

y esto, cualquiera sea $\varepsilon > 0$.

Sea $f(x)$ una función integrable (R). Como un punto es de discontinuidad cuando y sólo cuando la oscilación es no-nula en él, *el conjunto* D *de los puntos de discontinuidad* es la reunión de los conjuntos $G(1)$, $G(1/2)$, $G(1/3)$, ..., y entonces *es de medida nula*, pues por el criterio *b*) puede incluirse $G(1/i)$ en un número finito de intervalos de longitud total $\varepsilon/2^i$, y así queda incluído D en un número finito o infinito numerable de intervalos de longitud total ε. Por esta razón no es integrable la función de DIRICHLET (§ 49-2, ej.). Probemos que la condición hallada es también suficiente. En efecto, el conjunto A de los puntos de $[a, b]$ donde la oscilación es $< \omega$, es *abierto* (es decir, complementario de un conjunto cerrado, Cap. VI, nota II, *d*), pues si en $x_0 \varepsilon$ A es $\omega(x_0) < \omega$, en todo un entorno de x_0 la oscilación será menor que ω, y lo mismo ocurrirá para cada punto de dicho entorno. El complementario B respecto al intervalo $[a, b]$ será *cerrado*, y estando formado B por los puntos en los cuales la oscilación es $\geqslant \omega$, estará contenido en el conjunto D de puntos de discontinuidad de la función, y por la hipótesis es B de medida nula. Cubierto B por la infinidad numerable de intervalos de longitud total menor que ε, bastará aplicar a este cubrimiento del conjunto cerrado B el lema de BOREL (Cap. VI, nota III), que subsiste para conjuntos cerrados, para tener cubierto B por un número *finito* de intervalos de longitud total $< \varepsilon$, con lo cual la función es integrable (R) en virtud del criterio *b*). Tenemos, entonces:

Para que una función acotada $f(x)$ *sea integrable, es necesario y suficiente que el conjunto de sus puntos de discontinuidad sea de medida nula* (LEBESGUE).

d) Parece que si una función es discontinua en un conjunto denso, lo es en todo el intervalo, pero no es así. RIEMANN dió el primer ejemplo de una función discontinua en un conjunto denso y continua en otro conjunto denso. Otro más sencillo es:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}, \quad f(x) = 0 \text{ para } x \text{ irracional.}$$

Esta función es (Cap. VI, nota IV) discontinua sólo en los puntos racionales. Como el conjunto que éstos forman es numerable y. en consecuencia. de medida nula, es $f(x)$ integrable (R). La integral (R) de esta función es cero, por serlo la integral inferior de DARBOUX, pues el extremo inferior de $f(x)$ en cualquier subintervalo es cero.

IV. Derivada acotada no integrable (R). — Hemos indicado (§ 50-2, nota 4) que V. VOLTERRA (*Sui principii del calcolo integrale*, Giorn. di Mat. Battaglini, vol. *19*, 1881, pág. 335) dió un ejemplo de función *continua* $\Phi(x)$, con derivada finita y *acotada* en todo $[a, b]$ y no-integrable (R). Reproduzcamos dicho ejemplo en la siguiente forma:

El conjunto ternario de CANTOR era de medida nula. Consideremos, en cambio, el siguiente conjunto C que es cerrado y no es de medida nula: Si 9, 25, 49, son los cuadrados impares sucesivos, dividamos el intervalo $[0;1]$ en 9 partes iguales, y suprimamos el interior de la primera. Cada uno de los 8 restantes subintervalos, se vuelve a dividir en 25 partes iguales, suprimiendo el interior de la primera parte de cada subintervalo. Las partes restantes se vuelven a dividir en 49 partes iguales, de las cuales se suprimen las primeras, y así sucesivamente. La clausura del conjunto formado por los puntos de división (es decir, éstos y sus puntos de acumulación) forman el conjunto C. Los segmentos que yan quedando después de k operaciones tienen longitud total:

$$\frac{3^2-1}{9}\cdot\frac{5^2-1}{25}\cdot\frac{7^2-1}{49}\cdots\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}$$

que para $k\to\infty$ es un producto infinito (Cap. XI, nota III) cuyo límite según WALLIS (§ 53-3) es $\pi/4>0$. Este valor es, pues, lo que llamaremos *medida* del conjunto C. (H. J. S. SMITH en Proc. London Math. Soc., 1875, con subdivisiones sucesivas en ν, ν^2, ν^3, ..., ν^k, .. partes, dió un primer ejemplo de esta clase de *conjuntos generalizados de* CANTOR de medida positiva. Un valor aproximado de ésta para $\nu=2$, calculado por J. GUARNIERI, fué incluído en la primera edición de este volumen).

Tomemos sobre cada intervalo (α,β) contiguo al conjunto C la función

$$F(x,\alpha)=(x-\alpha)^2\operatorname{sen}\frac{\pi}{x-\alpha},\qquad F(\alpha,\alpha)=0,$$

siendo, por lo tanto:

$$F'(x,\alpha)=2(x-\alpha)\operatorname{sen}\frac{\pi}{x-\alpha}-\pi\cos\frac{\pi}{x-\alpha},\qquad (x\neq\alpha).$$

La función $F'(x,\alpha)$ se anula en infinitos puntos de (α,β), y sea $\alpha+\gamma$ el mayor valor de x no superior a $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, en el cual es nula $F'(x,\alpha)$. Definamos ahora la función $\Phi(x)$, en tal forma que sea $\Phi(x)=0$ en los puntos del conjunto C; en cada intervalo (α,β) contiguo a C, sea $\Phi(x)=F(x,\alpha)$ para $\alpha\leqq x\leqq\alpha+\gamma$, $\Phi(x)=F(\alpha+\gamma,\alpha)$ para $\alpha+\gamma\leqq x\leqq\beta-\gamma$ y $\Phi(x)=-F(x,\beta)$ para $\beta-\gamma\leqq x\leqq\beta$. (En la fig. 145, correspondiente al ejemplo de SMITH, se ha tomado $\nu=2$ y

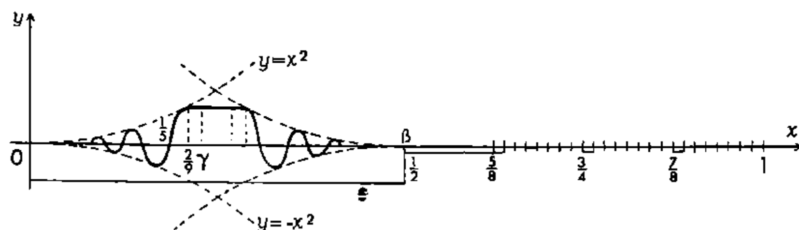


Fig. 145.

se ha representado $\Phi(x)$ en $[0,\frac{1}{2}]$; el proceso de formación de C se ha llevado hasta $k=3$). La función $\Phi(x)$ es continua, y tiene en todo punto derivada finita acotada en $[0,1]$. En los puntos x_0 del conjunto C, su derivada $\Phi'(x_0)$ es nula, ya que el cociente incremental es nulo si x_0+h pertenece a C; y si en cambio x_0+h pertenece a un intervalo contiguo a C, el cociente incremental no supera en valor absoluto a:

$$\left|\frac{\Phi(x_0+h)}{h}\right|\leqq\frac{(x_0+h-\alpha)^2}{|h|}\leqq|h|,$$

donde α es el extremo del intervalo contiguo situado en $[x_0, x_0 + h]$. La función $\Phi'(x)$ tiene una discontinuidad en cada punto de C, con oscilación no menor que la de $F'(x, \alpha)$ en $x = \alpha$, es decir, no inferior a 2π; por no ser C de medida nula, la función $\Phi'(x)$, determinada, finita y acotada en [0; 1], no será integrable (R) (nota III, *c*).

V. **Bibliografía.** — 1. La integral de CAUCHY está expuesta en forma didáctica en la obra de R. COURANT (citada en Cap. VI, nota VI-2), que introduce la noción de integral definida antes que la de derivada, y desarrolla ejemplos interesantes de integración directa; y en CH.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN (citado en Cap. VI, nota VI-4).

2. Para la integral de RIEMANN pueden consultarse: S. PINCHERLE (citado en Cap. VI, nota VI-3), J. REY PASTOR, *Elementos de la Teoría de funciones* (citado en Cap. VI, nota VI-2), el volumen II de F. SEVERI (citado en Cap. IV, nota III-1), E. T. WHITTAKER y G. N. WATSON (citado en Cap. XI, nota IV-2). Tratan también este tema, como preliminar a un concepto más general de integral debido a H. LEBESGUE, que veremos en el volumen III (Cap. XXIV), las obras siguientes: L. M. GRAVES, A. E. SAGASTUME BERRA (citados en Cap. IX, nota VIII-2) y:

H. KESTELMANN: *Modern theories of integration.* (Univ. de Oxford, 1937).

Para un estudio más completo pueden verse: E. GOURSAT (citado en Cap. VI, nota VI-5), y sobre todo E. W. HOBSON (citado en Cap. IX, nota VIII-3), así como el estudio excesivamente monográfico de

R. L. GOMES: *Integral de* RIEMANN. (Junta de Investigação Matem., Porto, 1949).

Un tratamiento completo de la integral de RIEMANN y su generalización a la de LEBESGUE en el espacio euclídeo, contiene:

W. W. ROGOSINSKI: *Volume and integral.* (Oliver and Boyd, Edinburgo, 1952).

3. Un estudio detenido y profundo de las ampliaciones sucesivas del concepto de integral contiene la clásica obra siguiente, cuyos primeros capítulos se refieren a las integrales de CAUCHY y de RIEMANN:

H. LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* (2ª ed., Gauthier Villars, París, 1928).

4. La colección de problemas de G. POLYA y G. SZEGÖ (citada en Cap. V, nota IV-2) dedica un capítulo a la integral como límite de sumas de rectángulos.

CAPÍTULO XIV

CÁLCULO DE PRIMITIVAS Y APLICACIONES

§ 51. MÉTODOS GENERALES DE INTEGRACIÓN

1. **Primitivas inmediatas.** — En este capítulo nos proponemos indicar la manera de hallar sistemáticamente las funciones primitivas de gran número de funciones que se presentan con frecuencia, pero debe tenerse presente que aunque (§ 50-1, *b*) toda función continua tiene primitiva, por lo general ésta no puede expresarse mediante las funciones elementales. Tal ocurre, por ejemplo, con la primitiva de e^{-x^2}. Por esta razón el proceso de integración da lugar a la creación de nuevas funciones.

La tabla de derivadas de las funciones elementales (§ 32-11) nos permite formar una tabla de integrales, que debemos recordar de memoria para integrar, mediante ella y los métodos de los apartados siguientes, otras funciones. Por ejemplo:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1),$$

pues:

$$D\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{(n+1)\, x^n}{n+1} = x^n$$

si:

$$n+1 \neq 0, \quad \text{o sea:} \quad n \neq -1;$$

y para otra variable cualquiera u, que puede ser una función de x, tendremos la integral 1 de la tabla de la página siguiente (cfr. § 32-11).

2. **Integración por descomposición.** — El carácter lineal de la derivación (§ 32-1) se traduce en el de la integración:

$$[51\text{-}1] \quad \int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

En efecto, la derivada de ambos miembros es la misma: $\alpha f(x) + \beta g(x)$, y entonces (a menos de constantes aditivas), ambos coinciden (§ 35-3).

EJEMPLOS: 1. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x} + 3}{x}\, dx = \int \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}\right) dx =$

TABLA DE PRIMITIVAS INMEDIATAS

1. $\int u^n \, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (\text{si } n \neq -1)$

   a) $\int u^0 \, du = \int du = u + C$

   b) $\int u \, du = \dfrac{u^2}{2} + C$

   c) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2} \, du = 2\sqrt{u} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln u + C,$ pues: $D_u(\ln u + C) = \dfrac{1}{u},$

   o bien: $d(\ln u + C) = \dfrac{du}{u}.$

3. $\int a^u \, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C.$ pues: $D_u\left(\dfrac{a^u}{\ln a}\right) = \dfrac{a^u \ln a}{\ln a} = a^u$

   a) $\int e^u \, du = e^u + C.$

4. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$

4' $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$

4'' $\displaystyle\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$

4''' $\displaystyle\int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 u} = -\operatorname{cotg} u + C$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sen} u + C$

5' $\displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C$

6. $\int \operatorname{sh} u \, du = \operatorname{ch} u + C$

6' $\int \operatorname{ch} u \, du = \operatorname{sh} u + C$

6'' $\displaystyle\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{tgh} u + C$

7. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \operatorname{arg\,sh} u + C$

7' $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arg\,ch} u + C$

7'' $\displaystyle\int \frac{du}{1-u^2} = \operatorname{arg\,tgh} u + C$

NOTA. — Se indican con letras ciertos casos particulares del correspondiente número.

$$= \frac{x^3}{3} - 4\sqrt{x} + 3\ln x + C.$$

2.

$$\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

3.

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sen}^2 x . \cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x}{\mathrm{sen}^2 x . \cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}\right) dx =$$

$$= \mathrm{tg}\, x - \mathrm{cotg}\, x + C.$$

4.

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}\right) dx = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} + C.$$

Este resultado es el mismo de § 51-1, ej. 7'', y análogo al de § 51-1, ej. 5'. La analogía se explica en el campo complejo, pues aplicando las fórmulas de EULER [45-8] resulta:

$$x = \mathrm{tg}\, y = \frac{e^{2iy} - 1}{i(e^{2iy} + 1)}, \quad \text{de donde:} \quad e^{2iy} = \frac{1 + ix}{1 - ix};$$

$$y = \mathrm{arc\,tg}\, x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + ix}{1 - ix} = \frac{1}{i}\left(ix + \frac{(ix)^3}{3} + \frac{(ix)^5}{5} + \dots\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

válido para $|x| < 1$ (§ 45-4). Así resulta que si en

$$D\ \tfrac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{1}{1 - x^2}$$

cambiamos x por ix, y derivamos (§ 41-1, *b*) en el campo complejo:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2i} \ln \frac{1 + ix}{1 - ix}\right) = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{d}{dx}\ (\mathrm{arc\ tg}\, x).$$

3. **Integración por sustitución.** — *a*) Este método consiste en efectuar un cambio de variables:

[51-2] $$x = \alpha(t),$$

para transformar la integral

[51-3] $$\int f(x)\, dx$$

en otra más sencilla, o bien inmediata, es decir, que figure en la tabla de § 51-1.

¿Cómo se hace esta transformación? Simplemente, reemplazando [51-2] y $dx = \alpha'(t)\, dt$ en [51-3]. En efecto, la función

$$\int f[\alpha(t)]\, \alpha'(t)\, dt = G(t),$$

una vez expresada en términos de x es la primitiva buscada, puesto que su diferencial vale:

$$\mathrm{d}\,G(t) = f[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,\mathrm{d}\,t = f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

La notación [51-3], usada para la integral o primitiva, tiene entonces [frente a otras posibles notaciones, como $D^{-1} f(x)$: antiderivada de $f(x)$] la gran ventaja de indicarnos cómo debe hacerse la sustitución.

EJEMPLOS: 1. $I = \int \cos 3x.\mathrm{d}x$. Haciendo $3x = t$, resulta:

$$x = \frac{t}{3} \therefore \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3},$$

y entonces:

$$I = \int \cos t \frac{\mathrm{d}t}{3} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,t + C = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,3x + C.$$

2. $$J = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^4}.$$

Haciendo $x + 2 = t$, resulta: $x = t - 2 \therefore \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$
y entonces:

$$J = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^4} = \int t^{-4}\mathrm{d}t = \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3(x+2)^3} + C.$$

3. $K = \int e^{\mathrm{sen}\,x} \cos x.\mathrm{d}x$. Poniendo $\mathrm{sen}\,x = t$, resulta: $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$,
y entonces:

$$K = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + C = e^{\mathrm{sen}\,x} + C.$$

NOTA 1: El método de integración por sustitución puede aplicarse también sin necesidad de introducir explícitamente una nueva variable t, sino haciendo aparecer su expresión en función de x dentro del símbolo de diferencial. En los ejemplos anteriores se tiene:

$$I = \int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}(3x) = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,3x + C.$$

(al pasar del 2º miembro al 3º hemos multiplicado y dividido por un mismo número).

$$J = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^4} = \int (x+2)^{-4}\,\mathrm{d}(x+2) = \frac{(x+2)^{-3}}{-3} + C.$$

$$K = \int e^{\mathrm{sen}\,x} \cos x\,\mathrm{d}x = \int e^{\mathrm{sen}\,x}\,\mathrm{d}\,\mathrm{sen}\,x = e^{\mathrm{sen}\,x} + C.$$

EJEMPLOS:

4. $\int \mathrm{sen}\,e^x.e^x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{sen}\,e^x.\mathrm{d}e^x = -\cos e^x + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \ln x \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \ln x\,\mathrm{d}\ln x = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

6. $\int e^{x^2}.x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int e^{x^2}.2x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int e^{x^2}\mathrm{d}x^2 = \tfrac{1}{2}\,e^{x^2} + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{-2x\,\mathrm{d}x}{1-x^2} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{1-x^2} =$

$$= -\tfrac{1}{2}\ln(1-x^2) + C.$$

8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \tfrac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{x^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{2} + C$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \tfrac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} =$$

$$= \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} + C.$$

10. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{d(9-x^2)}{\sqrt{9-x^2}} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{9-x^2} + C = -\sqrt{9-x^2} + C.$$

Nótese *bien* la diferencia entre 7 y 8, y lo mismo entre 9 y 10.

NOTA 2: El método de sustitución se apoya en la correspondencia entre x y t por la expresión $x = \alpha(t)$, y solamente en el caso de que exista esta correspondencia puede aplicarse el método; de lo contrario, pueden resultar absurdos.

EJEMPLO 11: Sea $\int dx/(1-x)$. Pongamos $t = \ln(1-x)$,

$$dt = -\frac{dx}{1-x},$$

y la integral se transforma así: $\int -dt = -t = -\ln(1-x)$; pero no debe olvidarse que mientras la integral propuesta tiene valor cualquiera que sea x (excepto $x = 1$), el resultado carece de sentido para $x > 1$, pues el logaritmo de $1-x$ sería imaginario (§ 45-3, *c*). Sin embargo, la primitiva de $1/(1-x)$, para todo valor real de $x \neq 1$, es $-\ln|1-x|$.

b) *Aplicación a la integral definida.* — Cuando se tiene una integral definida, puede aplicarse el método de sustitución para hallar la primitiva correspondiente, pero también puede hacerse la sustitución directamente en la función integral (§ 50-1) y por lo tanto en la integral definida; veamos bajo qué condiciones es legítima la fórmula

[51-4] $$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} f[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,dt,$$

donde los extremos son correspondientes, es decir: $x = \alpha(t)$, $x_0 = \alpha(t_0)$.

He aquí las hipótesis que hacemos:

1ª La función $f(x)$ está acotada y es continua (salvo puntos aislados) en todo el campo de variación de t, al recorrer ésta el intervalo $[t_0, t]$, donde resulta ser función uniforme respecto de x (ver ejercicio 9 de § 51).

2ª La función $\alpha(t)$ y su derivada $\alpha'(t)$ están acotadas y son continuas (salvo puntos aislados) en $[t_0, t]$.

El caso más sencillo es aquel en que $\alpha(t)$ es monótona en $[t_0, t]$ como en la figura 146; entonces hay correspondencia biunívoca entre los intervalos $[t_0, t]$ y $[x_0, x]$, así como entre los valores de ambas funciones. Cabe sin embargo el caso más general, indicado en la figura 147 en que subsiste la validez de la transformación [51-4].

En efecto, de las hipótesis 1ª y 2ª resulta que tanto $f(x)$ como $f[\alpha(t)]\,\alpha'(t)$ **están acotadas y son continuas, salvo, a lo sumo, en puntos aislados, y por lo tanto son integrables, siendo** funciones continuas los dos **miembros** de [51-4], que llamaremos así: $F(x) = F[\alpha(t)]$ y $\Phi(t)$, funciones ambas uniformes

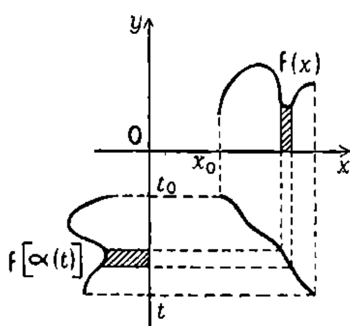


Fig. 146.

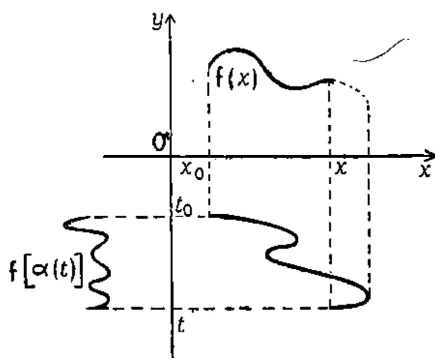


Fig. 147.

en $[t_0, t]$. Prescindiendo de los puntos excepcionales, que son aislados, las dos son derivables: la derivada respecto de t de la primera es:

$$F'(x)\,.\,\alpha'(t) = f(x)\,.\,\alpha'(t),$$

y esta misma es la derivada $\Phi'(t)$: luego, por el teorema de § 35-3, generalizado en § 50-2, *b*, ambas funciones difieren en una constante, la cual es nula, por ser $F[\alpha(t_0)] = 0$, $\Phi(t_0) = 0$. Queda, por lo tanto, demostrada la igualdad [51-4].

NOTAS: 3. Al efectuar el cambio de variable que cumpla las condiciones 1ª y 2ª, deberá cuidarse, además, de la validez de las fórmulas elementales que se utilicen, en el intervalo considerado.

4. Si los conjuntos de puntos de discontinuidad de $f(x)$, $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son numerables y se cumplen las demás hipótesis enunciadas, subsiste la validez de [51-4], en virtud de § 50-2, *b*, nota 2. Con demostración más penosa, subsiste la validez de [51-4] si se supone sólo que $f(x)$ es integrable (R), que $\alpha(x)$ es la integral (R) de su derivada $\alpha'(x)$, existente a menos de un conjunto de medida nula, siempre que además $\alpha(x)$ sea *monótona.*

EJERCICIO: Si en $\int_{-1}^{+1} dx = 2$ hacemos la sustitución $x^2 = t$,

$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \text{ resulta } 2 = \int_{+1}^{+1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 0. \text{ ¿Dónde está el error?}$$

c) **Estando representada una integral definida por un área plana, convendrá en ocasiones aplicar una transformación** de coordenadas cartesianas (o a otros sistemas, § 54-2), y ver

geométricamente en qué se transforma la integral, o bien el área dada.

EJEMPLO 12: Calcular el área A del sector hiperbólico O P′ P de la figura 148.

Refiriendo la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$ a sus asíntotas como nuevos ejes ξ, η, por medio de las fórmulas de transformación de coordenadas:

$$[51\text{-}5] \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y); \\ \eta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \end{cases}$$

resulta la ecuación más sencilla:

$$[51\text{-}6] \qquad \xi \cdot \eta = \tfrac{1}{2}.$$

Entonces, el área B A P′ Q vendrá dada por:

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{\xi_0} \frac{d\xi}{2\xi} = \left[\tfrac{1}{2} \ln \xi \right]_{1/\sqrt{2}}^{\xi_0} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln (\sqrt{2}\, \xi_0) = \tfrac{1}{2} \ln (x_0 + y_0),$$

si ξ_0 es la coordenada ξ del punto P′ de coordenadas antiguas $(x_0, -y_0)$.

De la equivalencia de los triángulos O A B y O P′ Q, que resulta de [51-6], obtenemos en valor absoluto el área buscada:

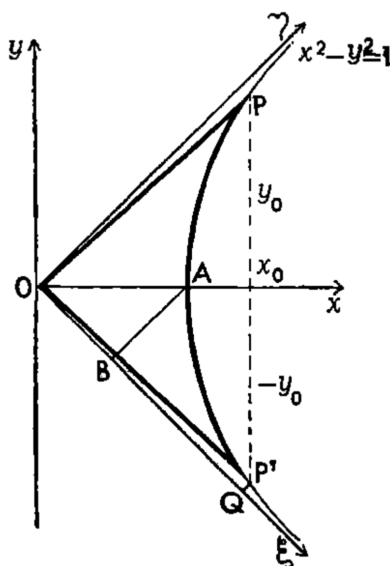


Fig. 148.

$$A = 2\left(\tfrac{1}{2} \ln (x_0 + y_0) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \xi_0 \eta_0 \right) = \ln (x_0 + y_0).$$

De aquí resulta:

$$x_0 + y_0 = e^A; \qquad x_0 - y_0 = \frac{x_0^2 - y_0^2}{x_0 + y_0} = \frac{1}{x_0 + y_0} = e^{-A},$$

y entonces: $\quad x_0 = \dfrac{e^A + e^{-A}}{2} = \text{ch } A; \qquad y_0 = \dfrac{e^A - e^{-A}}{2} = \text{sh } A.$

4. Integrales calculables por sustitución. — *a)* $\int \text{sen}^p x \cdot \cos^q x \, dx$. Si por lo menos un exponente es impar, la integral se calcula fácilmente por sustitución, separando previamente un factor de la correspondiente potencia.

EJEMPLOS:

1. $\int \text{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx$

$$= \int \text{sen}^2 x (1 - \text{sen}^2 x) \, d \,\text{sen}\, x = \int t^2 (1 - t^2) \, dt \qquad (t = \text{sen}\, x)$$

$$= \int (t^2 - t^4) \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \text{sen}^3 x - \frac{1}{5} \text{sen}^5 x + C.$$

2. $$\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x = \int \cos^4 x \cos x \, \mathrm{d}x =$$
$$= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \, \mathrm{d} \operatorname{sen} x = \qquad (t = \operatorname{sen} x)$$
$$= \int (1 - t^2)^2 \, \mathrm{d}t = \int (1 - 2t^2 + t^4) \, \mathrm{d}t =$$
$$= t - \tfrac{2}{3} t^3 + (1/5) t^5 + \mathrm{C} = \ldots$$

b) Las integrales

[51-7] $$\mathrm{I} = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x; \quad \mathrm{J} = \int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x$$

no están comprendidas en el caso (*a*), pues los exponentes son pares. Se resuelven ambas por sustitución, previa transformación del integrando, poniéndolo *en función del coseno del arco doble.*

De: $1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

resultan:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

y entonces:

$$\mathrm{I} = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2x \, \mathrm{d}\, 2x = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \mathrm{C}.$$
$$\mathrm{J} = \int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \mathrm{C}.$$

c) En algunos casos deben combinarse los métodos de descomposición y de sustitución.

Ejemplo 3:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, \mathrm{d}x + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \, \mathrm{d}x =$$
$$= - \int \frac{\mathrm{d} \cos x}{\cos x} + \int \frac{\mathrm{d} \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = - \ln \cos x + \ln \operatorname{sen} x + \ln \mathrm{K} =$$
$$= \ln \left(\mathrm{K} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \ln (\mathrm{K} \operatorname{tg} x).$$

No obstante, es más simple dividir numerador y denominador por $\cos^2 x$, transformando así la integral en $\int \mathrm{d}(\operatorname{tg} x) / (\operatorname{tg} x)$.

5. **Integración por partes.**— *a*) De la regla de diferenciación de un producto (§ 34-4), $\mathrm{d}(uv) = u \, \mathrm{d}v + v \, \mathrm{d}u$, resulta:

$$u \, \mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v \, \mathrm{d}u,$$

de donde, integrando, se obtiene la fórmula:

[51-8] $$\int u . \mathrm{d}v = u . v - \int v \, \mathrm{d}u,$$

llamada *de integración por partes.* Podemos entonces enunciar la regla de integración por partes así:

La integral del producto de una función por la diferencial

de otra es igual al producto de ambas funciones menos la integral de la segunda (ya integrada) por la diferencial de la primera.

La relación [51-8] conduce el cálculo de una integral al de otra, y se aplica cuando esta última es más sencilla.

Ante todo, este método se aplica *para integrar funciones trascendentes cuya derivada es algebraica*, tales como $\ln x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ y $\operatorname{arc\,sen} x$:

EJEMPLOS: 1.

$$\int \ln x \, . \, dx = x \ln x - \int x \, d \ln x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx =$$
$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

2. $$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \, . \operatorname{arc\,tg} x - \int x \, d \operatorname{arc\,tg} x =$$
$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x \, dx}{1 + x^2} =$$
$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$
$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C.$$

3. $$\int \operatorname{arc\,sen} x \, dx = x \operatorname{arc\,sen} x - \int x \, d \operatorname{arc\,sen} x =$$
$$= x \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$
$$= x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

4. En una integral como $I = \int x^3 \ln x \, dx$ pueden tomarse las partes de varias maneras. Por la misma razón que antes, conviene hacerlo tomando *el logaritmo como parte finita*, es decir:

$$u = \ln x; \qquad dv = x^3 \, dx$$
$$du = \frac{1}{x} dx; \qquad v = \frac{x^4}{4}.$$

Entonces:

$$I = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \tfrac{1}{4} \int x^3 \, dz =$$
$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \tfrac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4} (\ln x - \tfrac{1}{4}) + C.$$

La aplicación de la fórmula de integración por partes se facilita preparando previamente la integral, es decir, llevándola a tener la forma $\int u \, dv$. En el ejemplo 4 se tiene:

$$I = \int x^3 \ln x \, dx = \int \ln x \, . \, x^3 \, dx = \int \ln x \, . d \frac{x^4}{4};$$

ahora, la integral está "preparada" para la integración por partes, y la aplicación de [51-8] nos da:

$$I = \ln x \, . \frac{x^4}{4} - \int \frac{x}{4} \, . \, \frac{1}{x^4} dx; \; \ldots$$

EJEMPLO 5: $$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, d x = \int \ln x \cdot \frac{d x}{\sqrt{x}} = \int \ln x\; d\,(2\sqrt{x}) =$$
$$= \ln x \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\,\frac{1}{x}\, d x =$$
$$= 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 2\int \frac{d x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

Hemos visto (ej. 4) que cuando $\ln x$ aparece multiplicado por una potencia cualquiera (también fraccionaria o negativa) de x, se integra por partes eligiendo el logaritmo como parte finita. Lo mismo vale para toda trascendente con derivada algebraica.

En cambio las integrales:
$$\int x^n \cdot e^x\, d x, \quad \int x^n \operatorname{sen} x\, d x, \quad \int x^n \cos x\, d x,$$
siendo ahora el exponente n un número natural, se calculan también por partes, pero *tomando las trascendentes* e^x, sen x ó cos x *dentro de la parte diferencial.*

EJEMPLOS: 6.

$$\int x \cdot e^x\, d x = \int x\, d e^x = x\, e^x - \int e^x \cdot d x = x\, e^x - e^x + C.$$

7. $$\int x^2 \cdot e^x\, d x = \int x^2\, d e^x = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2 x\, d x,$$

y la última integral es el doble de la ya calculada en el ejemplo anterior.

8. $$\int x \cos x\, d x = \int x\, d \operatorname{sen} x = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot d x =$$
$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

9. $$\int x \operatorname{sen} 3 x\, d x =$$
$$= -\tfrac{1}{3}\int x(-\operatorname{sen} 3 x)\, d\, 3 x = -\tfrac{1}{3}\int x\, d \cos 3 x =$$
$$= -\tfrac{1}{3}\left[x \cos 3 x - \int \cos 3 x\, d x\right] =$$
$$= -\tfrac{1}{3}\left[x \cos 3 x - \tfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3 x\right] + C.$$

A veces el método de integración por partes se aplica acompañado de algún artificio. Por ejemplo:
$$I = \int e^{ax} \operatorname{sen} b x\, d x = \frac{1}{a}\int \operatorname{sen} b x\, d e^{ax} =$$
$$= \frac{1}{a} \cdot e^{ax} \operatorname{sen} b x - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos b x\, d x.$$

Integrando de nuevo por partes en la última integral, se llega a:
$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \operatorname{sen} b x - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos b x - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax} \operatorname{sen} b x\, d x.$$

Pero esta última integral es otra vez I; entonces:
$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{1}{a} e^{ax} \operatorname{sen} b x - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos b x + K,$$

o bien:

[51-9] $$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\,(a \operatorname{sen} b x - b \cos b x) + C.$$

Análogamente se calcula la integral:

[51-10] $J = \int e^{ax} \cos b\,x\; d\,x = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b \operatorname{sen} b\,x + a \cos b\,x) + C.$

También pueden calcularse ambas integrales por el método de EULER, observando que por la fórmula de EULER [45-7] es:

$$e^{ax} \cos b\,x + i\,e^{ax} \operatorname{sen} b\,x = e^{(a+ib)x},$$

cuya primitiva es $e^{(a+ib)x}/(a+ib)$, y separando partes reales e imaginarias, se hallan las expresiones de I y de J.

b) Aplicación a la integral definida. — La fórmula ya demostrada en *a)* prueba que las funciones cuyas diferenciales son $u(x).d\,v(x)$ y $v(x).d\,u(x)$ dan como suma $u(x).v(x)$, más una constante. Por consiguiente, cualquiera sea el intervalo $[a, b]$, se verifica:

$$[51\text{-}11] \quad \int_a^b u(x).d\,v(x) = \Big[\,u(x).v(x)\,\Big]_a^b - \int_a^b v(x).d\,u(x).$$

Suponíamos allí que $u(x)$ y $v(x)$ son diferenciables sin excepción en el intervalo $[a, b]$; pero si $u(x)$ y $v(x)$ tienen puntos singulares en que no existe derivada (puntos en los cuales pueden ser estas funciones discontinuas, con discontinuidad finita), como las integrales indefinidas son *continuas*, según se demostró en § 50-1, es aplicable lo dicho en § 50-2, siendo por lo tanto válida la fórmula [51-11] de integración por partes. Como la expuesta teoría de la integral presupone la acotación de las funciones integrando, no podemos abordar por ahora el caso en que $u(x)$ y $v(x)$ presenten discontinuidades infinitas.

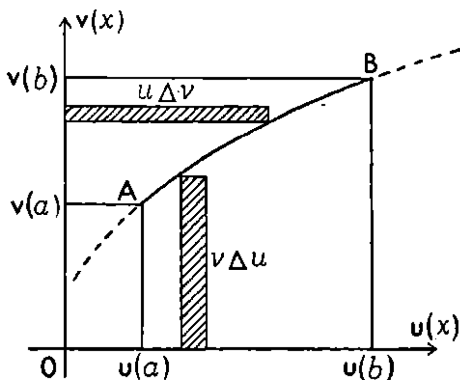


Fig. 149.

NOTA 1. Cuando la curva de ecuaciones paramétricas $u = u(x)$, $v = v(x)$ es monótona creciente (es decir, no decrece v al crecer u), la fórmula [51-11], escrita en la forma:

$$\int_a^b v(x)\,d\,u(x) + \int_a^b u(x)\,d\,v(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a),$$

y teniendo presente § 51-3, *b*, expresa que la suma de los trapezoides de la figura 149 es igual a la diferencia de los rectángulos de diagonales OA y OB.

c) Forma integral del término complementario de la fórmula de TAYLOR. — Sea $f(x)$ una función continua conjuntamente con sus derivadas hasta el orden $n+1$. Se tiene:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(u)\,d\,u = \int_0^x f'(x-t)\,d\,t,$$

e integrando por partes:

$$f(x) - f(0) = x f'(0) + \int_0^x f''(x-t)\,t\,.\,d\,t.$$

Si reiteramos el procedimiento, tomando como parte diferencial $t\,d\,t = (d\,t^2)/2$, $t^2 d\,t = (d\,t^3)/3$, ..., tendremos, después de n integraciones por partes:

[51-12] $$\begin{cases} f(x) = f(0) + x f'(0) + \dfrac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + T_n \\ T_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x f^{(n+1)}(x-t)\, t^n\, d\,t. \end{cases}$$

Esta es la fórmula de MAC LAURIN (§ 39-4), con la *expresión exacta* del término complementario. Aplicándola a $F(h) = f(a+h)$, resulta para la fórmula de TAYLOR [39-6]:

[51-13] $$T_n = \frac{1}{n!} \int_0^h f^{(n+1)}(a+h-t)\, t^n\, d\,t,$$

o bien, con el cambio de variables $a + h - t = \tau$:

[51-14] $$T_n = \frac{1}{n!} \int_a^{a+h} f^{(n+1)}(\tau)\,(a+h-\tau)^n\, d\,\tau.$$

NOTAS: 2. Mediante el teorema del valor medio (§ 48-6), se obtienen de aquí formas más simples, aunque no exactas, de T_n. Si se hace salir $f^{(n+1)}(\tau)$ de la integral [51-14], se reencuentra la forma de LAGRANGE [39-7].

3. La [51-12] nos permite construir una *primitiva* $f(x)$ *de orden* $n+1$ *de una función continua dada* $g(x) = f^{(n+1)}(x)$, siendo $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$ constantes arbitrarias.

EJERCICIOS

1. Hallar la curva con pendiente igual a la abscisa y que pasa por P (2; 4).

2. Un grave es lanzado en el instante $t = 0$, verticalmente hacia arriba, desde la altura h_0, a la velocidad v_0. Suponiéndolo bajo la acción de la gravedad $-g$ y en el vacío, hallar la altura h en función del tiempo t, el instante t_m en que alcanza la máxima altura, el instante τ en que vuelve a estar a la altura h_0, y la distancia d recorrida en dicho lapso τ a partir de $t = 0$.

3. Explicar por qué una primitiva de $1/x$ para x real $\neq 0$ es $\ln|x|$.

4. Hallar mediante descomposición (§ 51-2):

$$\int \frac{d\,x}{\operatorname{sen}^2 x \,.\cos x} = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C,$$

$$\int \frac{d\,x}{\operatorname{sen}^3 x \,.\cos^3 x} = 2\ln|\operatorname{tg} x| - 2\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x} + C.$$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, d\,x = \operatorname{arc\,sen} x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

5. **Calcular:**

$$I_1 = \int \sqrt[3]{1+2x}\,\mathrm{d}x,\quad I_2 = \int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,.\cos x\,\mathrm{d}x,\quad I_3 = \int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$

$$I_4 = \int \frac{\cos x\,.\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen} x},\qquad I_5 = \int \frac{x\,.\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}},\qquad I_6 = \int \frac{3x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^3},$$

$$I_7 = \int \frac{x\,.\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}},\qquad I_8 = \int \frac{\operatorname{arc\,sen} x\,.\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad I_9 = \int \frac{\ln \ln x\,.\mathrm{d}x}{x\,.\ln x}.$$

6. **Probar:** *a*) que tres primitivas de $1/\operatorname{ch} x$ son:

$$2\operatorname{arc\,tg} e^x,\quad \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sh} x,\quad 2\operatorname{arc\,tg}\operatorname{tgh}(x/2);$$

b) que estos resultados son compatibles.

7. **Calcular por sustitución, en la integral definida:**

$$A = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x,\qquad B = \int_0^3 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x},\qquad C = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}.$$

8. Mediante el cambio $x = \cos t$, hallar y explicar por qué

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^0 \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t \neq -\int_{-\pi/2}^0 \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t,$$

a pesar de ser $\cos(-\pi/2) = 0$; $\cos 0 = 1$.

9. **Si aplicamos la sustitución $x = \operatorname{sen} t$ a la integral definida** $\int_0^\pi t^2 \cos t\,\mathrm{d}t$, **resulta** $\int_0^0 (\operatorname{arc\,sen} x)^2\,\mathrm{d}x = 0$, y por ser $(\operatorname{arc\,sen} x)^2 = t^2$, $\cos t$, continuas, será $\int_0^\pi t^2 \cos t\,\mathrm{d}t = 0$. ¿Por qué es falso el razonamiento anterior?

10. **Demostrar que para cualquier función integrable $g(u)$ es:**

$$\int_0^{\pi/2} g(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} g(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} g(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x.$$

11. Calcular:

$$I = \int (1+\cos x)^3\,\mathrm{d}x,\quad J = \int \operatorname{cotg}^3 x\,\mathrm{d}x.$$

12. Calcular el área de un cuadrante de círculo de radio a, mediante sustitución en la integral definida.

13. **Calcular:** $\quad I = \int x^n \ln x\,\mathrm{d}x.$

14. **Calcular por partes** $I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ **(cfr. ejercicio 12 y § 51-4, *c*).**

15. Utilizando el resultado anterior calcular, por partes:

$$J = \int x\operatorname{arc\,sen} x\,\mathrm{d}x.$$

16. *a*) Expresar en forma recurrente $I_n = \int \operatorname{sen}^n x \, dx$ (n natural); *b*) Aplicar al cálculo de $J_n = \int x^n \operatorname{arc\,sen} x \, dx$ (n natural).

17. Expresar en forma recurrente $K_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ (n natural).

18. Aplicar el teorema del valor medio [48-34], hallando en cada caso μ, en las integrales:

$$I = \int_{-1}^{1} x^3 e^x \, dx, \quad J = \int_{1/2}^{2} \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

19. Probar, tomando $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ en $K = \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$, que el primer teorema del valor medio [48-34] no vale si $\varphi(x)$ cambia de signo en el intervalo de integración.

§ 52. Integración de clases particulares de funciones

1. **Funciones racionales.** — *a*) *Un ejemplo preparatorio.* — Consideremos la integral:

[52-1] $$I = \int \frac{3x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1} \, dx,$$

y como en ella el integrando $f(x)$ es una función racional, cuyo numerador es de grado no menor que el del denominador, podemos efectuar la división, y descomponer luego la parte no entera en fracciones simples, aplicando, por ejemplo, el método de los coeficientes indeterminados (§ 46-4, b_4). Tendremos, sucesivamente:

$$\frac{3x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1} = 3x + \frac{1}{x^2 - 1}$$

[52-2] $$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A\,(x+1) + B\,(x-1)}{(x+1)\,(x-1)}$$

$$\therefore \quad A\,(x+1) + B\,(x-1) = 1.$$

Como esta igualdad vale para todo x, nos permite calcular A y B. Para $x = 1$ se tiene:

$$2A = 1 \quad \therefore \quad A = \tfrac{1}{2},$$

y para $x = -1$

$$-2B = 1 \quad \therefore \quad B = -\tfrac{1}{2}.$$

Reemplazando estos valores en el tercer miembro de [52-2] tenemos la descomposición:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1},$$

y finalmente:

$$I=\int\left(3x+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=\frac{3}{2}x^2+\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$$

b) *Método general.* — Podemos suponer siempre que el grado del numerador es *inferior* al del denominador (pues en caso contrario basta efectuar la división entera correspondiente), y además que ambos polinomios de coeficientes reales son primos entre sí en el campo complejo (§ 17-2, a_5) y por lo tanto en el campo real (§ 18-2) (pues siempre los podremos dividir por su m. c. d.). Entonces podemos descomponer el integrando en fracciones simples (§ 46-4, *b*) más una eventual parte entera, y la dificultad de la integración reside solamente en el problema algebraico (§§ 19 y 41) de *hallar los ceros del denominador.* Distinguiremos tres casos, según que éstos sean simples y reales, que haya ceros simples imaginarios, y que los haya múltiples.

b_1) *Caso de ceros simples reales.* — A este caso pertenece el ejemplo estudiado en *a*), pero no es preciso usar el método de los coeficientes indeterminados, pues en virtud de § 46-4, *a*, tendremos la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{f(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n},$$

con la expresión de los coeficientes:

$$A_i=\frac{f(x_i)}{Q'(x_i)}.$$

Esto da inmediatamente la integral, que es la función trascendente:

$$A_1\ln|x-x_1|+\ldots+A_n\ln|x-x_n|+C.$$

EJEMPLOS: 1. Para encontrar la función primitiva de:

$$\frac{(1/2)x^2+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{(1/2)x^2+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}=$$

$$=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{x+2},$$

se tiene: $Q'(x)=3x^2+4x-1$, y entonces:

$$A_1=\frac{f(1)}{Q'(1)}=\frac{3/2}{6}=\tfrac{1}{4};\quad A_2=\frac{f(-1)}{Q'(-1)}=-\tfrac{3}{4};\quad A_3=\frac{f(-2)}{Q'(-2)}=1;$$

luego, la primitiva es:

$$\tfrac{1}{4}\ln|x-1|-\tfrac{3}{4}\ln|x+1|+\ln|x+2|+C.$$

2. De la descomposición § 46-4, ej. 1 resulta:

$$\int\frac{x^2+3x}{x^4-x^2}dx=-3\ln|x|+\ln|x+1|+2\ln|x-1|+C.$$

b_2) *Caso en que hay ceros simples imaginarios.* — Consideremos el caso más sencillo, en que el denominador $Q(x)$ es de segundo grado. Si sus raíces son $a + bi$ y $a - bi$, se tiene:

$$Q(x) = a_0 (x - a - bi)(x - a + bi) = a_0[(x-a)^2 - (bi)^2] = a_0 [(x-a)^2 + b^2].$$

Por consiguiente será:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{A(x-a)}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{Aa + B}{(x-a)^2 + b^2}.$$

Así transformada, la función se integra sin dificultad:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2(x-a)\, dx}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{Aa + B}{b^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{d\,[(x-a)^2 + b^2]}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{Aa + B}{b} \int \frac{d\,\frac{x-a}{b}}{1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{A}{2} \ln\,[(x-a)^2 + b^2] + \frac{Aa + B}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-a}{b}$$

EJEMPLOS: 3.

$$I = \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

La descomposición dada en § 46-4, a, sería:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{A'}{x-i} + \frac{A''}{x+i},$$

pero agrupando los dos últimos términos y prosiguiendo luego como antes, se tiene:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}.$$

Se halla así: $A = 1$; $C = 0$; $B = -1$, y entonces:

$$I = \ln x - \int \frac{x\, dx}{x^2+1} = \ln x - \ln \sqrt{x^2+1} + C.$$

4. La descomposición de § 46-4, ej. 3 nos da:

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^3 + x} dx = \ln x - 2 \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

b_3) *Caso en que hay ceros múltiples.* — Si en el denominador hay un factor $(x - a)^h$, esta raíz h-ple a origina h fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^h q(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^h} + \frac{A_1}{(x-a)^{h-1}} + \dots + \frac{A_{h-1}}{x-a} + \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Multiplicando por $(x-a)^h$, y llamando $F(x) = P(x)/q(x)$ la descomposición:

$$F(x) = A_0 + A_1 (x-a) + \dots + (x-a)^h p(x)/q(x)$$

determina los coeficientes $A_0 = F(a)$, $A_1 = F'(a)$, $A_2 = F''(a)/2!$, ...

El método de coeficientes indeterminados, ya visto, es también útil; sobre todo cuando hay raíces imaginarias, es más breve que la agrupación de fracciones conjugadas obtenidas por el método anterior. Si las raíces son reales, es muy preferible el método de las derivadas.

EJEMPLOS: 5. Descompongamos:

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3},$$

identificados los numeradores en ambos miembros resulta:

$$A = 1, \quad -2A + B = 0, \quad A - B + C = 0,$$

donde A = 1, B = 2 C = 1; luego, la función primitiva es:

$$\ln |x - 1| - 2(x-1)^{-1} - \tfrac{1}{2}(x-1)^{-2} + K.$$

Más breve es el método de las derivadas, pues en este caso es: $F(x) = x^2$, $F(1) = 1$, $F'(1) = 2$, $F''(1) = 2$.

6. **Separemos ante todo la parte entera 1 de la fracción:**

$$\frac{x^6 - 2x^4 + 1}{x^5 - 8x^3 + 16x} = 1 + \frac{6x^4 - 16x + 1}{x(x-2)^2(x+2)^2}.$$

La descomposición en fracciones simples, será por lo tanto:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{(x+2)^2}.$$

Calcúlense los cinco coeficientes por ambos métodos.

NOTA: Si se presentan alguna vez raíces imaginarias dobles, basta utilizar este recurso:

$$\frac{1}{(x^2+b^2)^2} = \frac{(x^2+b^2)+(b^2-x^2)}{(x^2+b^2)^2} \cdot \frac{1}{2b^2},$$

que se descompone en dos fracciones: la 1ª tiene como primitiva arc tg (x/b), salvo el coeficiente, y la 2ª es la derivada de

$$\frac{x}{x^2+b^2}.$$

EJERCICIO: **Partiendo de la derivada de $x/(x^2+b^2)^2$, aplíquese el método al caso de raíces triples; etc.**

Si las raíces tienen parte real a, basta escribir $x - a$ en vez de x.

c) Método directo de HERMITE. — En el caso b_3), de ceros múltiples del denominador, veremos que es posible y conveniente descomponer el integrando en la siguiente forma:

[52-3] $$\frac{f}{Q} = \left(\frac{X}{D}\right)' + \frac{Y}{q},$$

donde:

$$D = \text{m. c. d. } (Q, Q'), \quad q = \frac{Q}{D},$$

y los polinomios X, Y, de grados inferiores a D y q, respectivamente, se determinan por el método de los coeficientes indeterminados.

La integral de la fracción propuesta viene dada, entonces, por la expresión siguiente:

[52-4] $$\int \frac{f}{Q}\, dx = \frac{X}{D} + \int \frac{Y}{q}\, dx,$$

que se compone de una parte racional y una logarítmica, por tener q todos sus ceros simples, ya que cada uno *h-ple* de Q es $(h-1)$*-ple* de D. Obsérvese que la determinación de D, q, X, Y es *racional*, no exigiendo la determinación de los ceros, y ésta sólo se necesita para el polinomio de menor grado q al calcular la parte trascendente de la integral.

DEM.: Sea:

$$\mathrm{Q}(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_h)^{\alpha_h} \qquad \text{grado } n;$$

$$\mathrm{D}(x) = \text{m.c.d.}(\mathrm{Q}, \mathrm{Q}') = (x-x_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x-x_h)^{\alpha_h - 1}, \qquad \text{grado } n-h;$$

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D}} = \mathrm{q}(x) = (x-x_1) \dots (x-x_h), \qquad \text{grado } h \leqslant n.$$

Veamos cómo se determinan los polinomios X e Y, de grados inferiores a D y q, respectivamente, que satisfagan a la relación [52-3], o sea:

$$\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{q\,D}} = \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{D}} - \frac{\mathrm{X\,D}'}{\mathrm{D}^2} + \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{q}};$$

es decir:

$$\mathrm{f} = \mathrm{q\,X}' - \mathrm{p\,X} + \mathrm{D\,Y}, \qquad \text{siendo} \qquad p = \frac{\mathrm{D}'\,\mathrm{q}}{\mathrm{D}}.$$

Sea X un polinomio indeterminado de grado $n-h-1$, e Y otro de grado $h-1$; el número total de coeficientes indeterminados es n, y como el primer miembro es de grado $n-1$, se tiene número suficiente de ecuaciones lineales para determinarlos. Éstas forman un sistema *determinado*, porque si fuera nulo su determinante, el sistema homogéneo que resulta tomando términos independientes nulos, admitiría solución no formada por ceros, es decir, habría dos polinomios no idénticamente nulos X, Y que satisfarían a [52-3] y [52-4] para el polinomio $\mathrm{f} \equiv 0$, y resultaría de [52-4] (cuyo primer miembro es nulo) la igualdad de una función racional $\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{D}}$ con una logarítmica.

EJEMPLOS: 7. Sea el denominador $\mathrm{Q} = (x-1)^3 (x^2+1)$.
Inmediatamente se forma:

$$\mathrm{D} = (x-1)^2, \qquad \mathrm{D}' = 2(x-1),$$
$$\mathrm{q} = (x-1)(x^2+1), \qquad \mathrm{p} = 2(x^2+1).$$

La ecuación de HERMITE es, en este caso:

$$\mathrm{f} = (x-1)(x^2+1)a - 2(x^2+1)(ax+b) + (x-1)^2(cx^2+dx+e),$$

e identificando los coeficientes se calculan a, b, c, d, e.

Si es, por ejemplo, $\mathrm{f} = 1$, resulta:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3 (x^2+1)} = \frac{2x-3}{4(x-1)^2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

y esta última integral se calcula por descomposición en fracciones simples, resultando:

$$\frac{2x-3}{4(x-1)^2} + \tfrac{1}{4} \ln|x-1| - \tfrac{1}{8} \ln(x^2+1) + \tfrac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} x.$$

8. Integrar $\displaystyle \frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{d}{dx}\,\frac{ax+b}{(x-1)^2}$.

Al aplicar el método de los coeficientes indeterminados es ventajoso emplear exponentes negativos:

$$\frac{d}{dx}[(ax+b)(x-1)^{-2}] = a(x-1)^{-2} - 2(ax+b)(x-1)^{-3},$$
$$x^2 = A(x-1)^2 + a(x-1) - 2(ax+b),$$
e identificando resulta: $A = 1$, $a = -2$, $b = 3/2$, dando para la integral buscada:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^3} = \frac{-2x+3/2}{(x-1)^2} + \ln|x-1| + C.$$

2. Irracionales algebraicos. — *a) Funciones racionales en* x *y* $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$. — Las integrales de funciones

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

racionales en la variable x y en una raíz de la forma indicada, se transforman en integrales de funciones racionales, que ya sabémos integrar, con la sustitución que consiste en tomar dicha raíz como nueva variable.

Ejemplos: 1. $$I = \int \frac{dx}{x-3\sqrt{x-2}};$$
poniendo $\sqrt{x-2} = t$, resulta
$$I = \int \frac{2t\,dt}{t^2-3t+2} =$$
$$= \int\left(\frac{-2}{t-1} + \frac{4}{t-2}\right)dt = -2\ln|t-1| + 4\ln|t-2| + \ln C =$$
$$= \ln\frac{C(t-2)^4}{(t-1)^2} = \ln\frac{C(\sqrt{x-2}-2)^4}{(\sqrt{x-2}-1)^2}.$$

2. En la integral $$I = \int \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}\,dx,$$
el integrando es t^2, siendo $t = \sqrt[3]{(x+1)/x}$. Con esta sustitución se tiene $x = 1/(t^3-1)$ y resulta:
$$I = \int t^2 \frac{-3t^2}{(t^3-1)^2}\,dt,$$
que es una integral de función racional.

Nota 1. Si el integrando es función racional de x y de *varias* raíces del mismo subradical fracción de expresiones lineales:

$$\sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ \ldots$$

se racionaliza la integral con la sustitución $t = \sqrt[l]{(ax+b)/(cx+d)}$, siendo $l = \text{m.c.m.}\ (p, q, r, \ldots)$ el mínimo común múltiplo de los índices. En efecto, todas las raíces dadas son entonces potencias *enteras* de t, y el integrando resulta función racional de x y de la *única* raíz t.

Ejemplo 3: $$I = \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$$

Se tiene: $l = \text{m.c.m.}\,(2,\ 3,\ 6) = 6$; y haciendo $x = t^6$ resulta:

$$I = \int \frac{t^3 + t^2}{t} \cdot 6\,t^5\,dt = 6\int (t^7 + t^6)\,dt = 6\left(\frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7}\right) + C =$$

$$= \frac{6}{8}\sqrt[6]{x^8} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C = x\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

b) *Integración de ciertos irracionales cuadráticos.* — Por el mismo procedimiento de hallar una sustitución que racionalice el integrando, pueden integrarse las funciones de forma entera o fraccionaria donde figure una raíz *cuadrada* de un trinomio de segundo grado:

$$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}.$$

Si fuera $a = 0$ estaríamos en el caso de § 52-2, *a*. Entonces distinguiremos dos casos:

b_1) *Caso* $a > 0$. Sacándolo del radical, éste queda en la forma $\sqrt{x^2 + p\,x + q}$, y haremos la sustitución:

[52-5] $$\sqrt{x^2 + p\,x + q} = x + t.$$

[52-6] $$\therefore\quad x^2 + p\,x + q = x^2 + 2\,t\,x + t^2.$$

Como en [52-6] los términos en x^2 se simplifican (*para eso se dió la forma* [52-5] *a la sustitución*), puede expresarse x como función *racional* de t, y el integrando se racionaliza.

Ejemplo 4: $I = \int \sqrt{x^2 + 4}\,dx$. Poniendo $\sqrt{x^2 + 4} = x + t$, resulta:

$$x^2 + 4 = x^2 + 2\,t\,x + t^2 \quad \therefore \quad x = \frac{4 - t^2}{2\,t} = \frac{2}{t} - \frac{t}{2}$$

$$\therefore\quad dx = \left(-\frac{2}{t^2} - \frac{1}{2}\right)dt = -\frac{4 + t^2}{2\,t^2}\,dt.$$

$$I = \int\left(\frac{4 - t^2}{2\,t} + t\right)\left(-\frac{4 + t^2}{2\,t^2}\right)dt = -\int \frac{16 + 8\,t^2 + t^4}{4\,t^3}\,dt =$$

$$= -\int\left(\frac{4}{t^3} + \frac{2}{t} + \frac{t}{4}\right)dt = \frac{2}{t^2} - 2\ln t - \frac{t^2}{8} + C =$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{x^2 + 4} - x)^2} - 2\ln(\sqrt{x^2 + 4} - x) - \frac{1}{8}\,[\sqrt{x^2 + 4} - x]^2 + C.$$

Nota 2: Así como en § 51-4, *c*, calculamos la integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ mediante la sustitución $x = a \operatorname{sen} t$, ahora podemos calcular también la del ejemplo anterior mediante la sustitución $x = 2 \operatorname{sh} t$, o bien $x = 2 \operatorname{tg} t$.

Si en cambio tuviéramos $\sqrt{x^2 - a^2}$, haríamos $x = a \operatorname{ch} t$, o bien: $x = a \sec t$. Análogamente pueden tratarse otros casos (irracionales o no), mediante funciones hiperbólicas o circulares inversas.

Ejemplos: 5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 + (x/a)^2}} = \operatorname{arg\,sh}(x/a) + C.$$

6. $$\int \frac{d\,x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{d\,x/a}{\sqrt{[x/a]^2 - 1}} = \text{arg ch}(x/a) + C.$$

7. $$\int \frac{d\,x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\,x/a}{1 - [x/a]^2} = \frac{1}{a} \text{arg tgh}(x/a) + C.$$

b_2) *Caso* $a < 0$. El radical puede llevarse a la forma

$$\sqrt{-x^2 + p\,x + q}.$$

Ahora no se logra nada igualando a $x + t$, pues al elevar al cuadrado no se simplifican los términos en x^2 como en [52-6]. Observemos que para que la integral tenga sentido, deberá ser en el intervalo de integración:

$$-x^2 + p\,x + q > 0,$$

pero para valores grand ; de x predomina el primer término, y por consiguiente:

$$-x^2 + p\,x + q < 0.$$

Entonces, el trinomio cambia de signo, y en consecuencia tiene raíces *reales* x_1 y x_2, es decir:

$$-x^2 + p\,x + q = -(x - x_1)\ (x - x_2)\,.$$

Poniendo ahora

[52-7]

$$\sqrt{-x^2 + p\,x + q} = \sqrt{-(x - x_1)\ (x - x_2)} = (x - x_1)\ t$$

resulta:

$$-(x - x_1)\ (x - x_2) = (x - x_1)^2\, t^2$$

$$\therefore\ x_2 - x = (x - x_1)\ t^2$$

$$x = \frac{t^2\, x_1 + x_2}{t^2 + 1},$$

con lo cual la sustitución [52-7] racionaliza el integrando.

NOTA 3: Este procedimiento conduce a cálculos largos, y con frecuencia puede calcularse la integral en forma más sencilla.

EJEMPLOS: 8. $\int \sqrt{9 - x^2}\, d\,x$; sustitución: $x = 3$ sen t.

9. $\int \sqrt{-x^2 + 2\,x + 3}\, d\,x = \int \sqrt{4 - (x - 1)^2}\, d\,x$; sustitución: $x - 1 = 2$ sen t.

10.

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{d\,(x/3)}{\sqrt{1 - (x/3)^2}} = \text{arc sen}\ (x/3) + C.$$

11.

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{-x^2 + 2\,x + 3}} = \int \frac{d\,x}{\sqrt{4 - (x - 1)^2}} = \int \frac{d\,\dfrac{x - 1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x - 1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \text{arc sen}\ \frac{x - 1}{2} + C.$$

EJERCICIO: Calcular

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}; \quad J = \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}.$$

NOTA 3: Si es además $q > 0$, se puede hacer la sustitución:

[52-8] $$\sqrt{-x^2+px+q} = tx + \sqrt{q},$$

pues $x = (p - 2\sqrt{q}\,.\,t)/(t^2+1)$, y se racionaliza el integrando.

c) *Integrales algebraicas en general.* — Los procedimientos de racionalización expuestos en *b*) son casos particulares de un método más general, que pasamos a exponer. Si y es una función algebraica de x (§ 23-8, *a*) definida por la relación $P(x, y) = 0$ (P polinomio) y $R(x, y)$ una función racional de x y de y, diremos que:

[52-9] $$\int R(x, y)\,dx$$

es una ***integral algebraica***, también llamada ***abeliana***.

Si la curva $P(x, y) = 0$ es *unicursal*, es decir, si admite una representación paramétrica:

[52-10] $$x = f(t), \quad y = g(t),$$

donde f y g sean funciones *racionales* de t; entonces la sustitución [52-10] racionaliza el integrando de [52-9], pues se obtiene:

$$\int R(f, g)\,.\,f'(t)\,dt.$$

Las cónicas son unicursales. Porque cada recta del haz $y - y_0 = t(x - x_0)$ con centro en un punto (x_0, y_0) de la cónica, corta a ésta en un único punto ulterior, que depende del parámetro t, y cuyas coordenadas se expresan, por consiguiente, como funciones racionales de t. Si la cónica es una hipérbola, puede tomarse para (x_0, y_0) la dirección asintótica m (§ 37-6, *b*), y se tiene el haz: $y = mx + t$.

Las sustituciones [52-5], [52-7] y [52-8] son casos particulares de las precedentes:

En la primera, la cónica $y^2 = x^2 + px + q$ es una hipérbola donde $m = 1$ es dirección asintótica, y hemos considerado el haz $y = x + t$.

En la segunda, la cónica es $y^2 = -(x - x_1)(x - x_2)$, y eligiendo el punto $(x_1, 0)$ de ella, resulta el haz $y = t(x - x_1)$.

En la tercera elegimos el punto $(0, \sqrt{q})$, resultando el haz $y = tx + \sqrt{q}$.

d) *Diferenciales binomias. Casos de integrabilidad.* — Se llama integral de diferencial binomia a una integral de la forma:

[52-11] $$\int x^m (a x^n + b)^p\,dx \quad (m, n \text{ y } p \text{ racionales}).$$

Mediante la sustitución $x^n = t$, esta integral se lleva (salvo el factor $1/n$) a la ***forma simplificada***

[52-12] $$I(p, q) = \int (at + b)^p t^q\,dt, \quad \text{con} \quad q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

TEOR.: ***La integral** $I(p, q)$ **se puede reducir a la de una función racional, si uno de los tres números**: p, q, $p + q$, **es entero.***

En efecto, indicando con R una función racional, tendremos los tres casos racionalizables por *b*):

Si p es entero: $I(p, q) = \int R(t, t^q)\,dt.$

Si q es entero: $I(p, q) = \int R[(at + b)^p, t]\,dt.$

Si $p + q$ es entero: $$I(p, q) = \int \left(\frac{at+b}{t}\right)^p t^{p+q}\,dt = \int R\left[\left(\frac{at+b}{t}\right)^p, t\right] dt.$$

P. CHEBICHEV demostró en 1853 que fuera de estos tres casos, la integral no puede expresarse mediante las funciones elementales, representando por lo tanto trascendentes nuevas.

3. Funciones racionales de las funciones circulares. — Estas funciones son racionales en sen x y cos x (¿por qué?). Su integración se logra *a veces* en forma muy sencilla, por sustitución inmediata (§ 51-4, *a*), transformando eventualmente a ángulo múltiplo de x (§ 51-4, *b*), pero el método general consiste en racionalizar el integrando, lo que se logra mediante la sustitución:

[52-13] $$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \therefore \quad x = 2 \operatorname{arc\,tg} t,$$

pues tanto

[52-14] $$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

como:

[52-15] $$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

y

[52-16] $$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

son funciones racionales de la nueva variable.

EJEMPLOS: 1.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + C = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

2.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \mathrm{d}t = t + C = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

3. Fundamento de las cartas de MERCATOR es la expresión:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

cuya integral es $\ln(1+t) - \ln(1-t)$, que puede expresarse

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\frac{1+\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}(x/2)} + C = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C.$$

NOTA: En las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,\mathrm{d}x$, siendo R una función racional, puede aplicarse la sustitución $t = \operatorname{tgh}(x/2)$, análoga a

[52-13], pero observando que $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ es racional en $u = e^x$, el integrando se racionaliza con la sustitución:

$$x = \ln u \quad \therefore \quad dx = du/u.$$

EJEMPLO 4:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int \frac{du/u}{u + u^{-1}} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 1} =$$
$$= 2 \operatorname{arc\,tg} e^x + C.$$

EJERCICIOS

1. Calcular:

$$I = \int \frac{3x\,dx}{x^2 - 6x + 8}; \qquad J = \int \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 - 3x + 2}\,dx; \qquad K = \int \frac{x^4\,dx}{x^2 - 1};$$
$$L = \int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)}; \qquad M = \int \frac{5x + 1}{x^3 - x}\,dx;$$
$$N = \int \frac{x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}\,dx.$$

2. Calcular:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}; \qquad J = \int \frac{x^3 - 3x + 3}{x^2 - 3x + 2}\,dx;$$
$$K = \int \frac{x^2 + 3x}{(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 2)}\,dx.$$

3. Calcular:

$$I = \int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + x}; \qquad J = \int \frac{x + 3}{x^3 + 4x^2}\,dx;$$
$$K = \int \frac{4x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2(4x^2 + 1)}\,dx; \qquad L = \int \frac{3x - 3}{(x^2 + 6x + 10)^2}\,dx;$$
$$M = \int \frac{3x^3 - 12x^2 + 16x - 4}{x^4 - 4x^3 + 4x^2}\,dx.$$

4. Calcular (cfr. ejercicio 10 de § 46):

$$I = \int \frac{dx}{1 + x^4}; \qquad J = \int \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \right)^2 dx.$$

5. Calcular:

$$I = \int \frac{x^2 + 4}{2x^3(x^2 + 1)^2}\,dx; \qquad J = \int \frac{x^5 + 2x^3 + 5x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 1)^2}\,dx.$$

6. Calcular:

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(a + bx)^n}}; \qquad J = \int x^2 \sqrt{a + bx}\,dx; \qquad K = \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

7. Integrar completando cuadrados: *a*) $1/\sqrt{x^2 + 2x + 2}$;
b) $1/\sqrt{4x^2 - 4x - 35}$. *c*) $1/\sqrt{1 - 4x^2}$.
d) $1/\sqrt{4 - x^2 - 4x}$; *e*) $x/\sqrt{2 - x^2 - x^4}$.

8. Calcular

$$I = \int \sqrt{x^2 + 3x - 2}\, dx; \qquad J = \int \frac{dx}{3x + \sqrt{-3 + 8x - 4x^2}};$$

$$K = \int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 + x - x^2}}.$$

9. Mediante sustituciones circulares integrar:

$a)$ $\sqrt{4 - x^2}/x^2$; $b)$ $x^{-1}(16 - x^2)^{-1/2}$;
$c)$ $x^3/\sqrt{x^2 + a^2}$; $d)$ $x^{-1}(x^2 - a^2)^{-1/2}$.

10. Mediante sustituciones hiperbólicas integrar:

$a)$ $x^2/\sqrt{x^2 + a^2}$; $b)$ $x^2\sqrt{x^2 - 4}$;
$c)$ $\sqrt{4 + 9x^2}$; $d)$ $x^{-1}(x^2 - 9)^{-1/2}$;

¿cuál ha de ser la relación que ligue las constantes de integración de las integrales $d)$ de este ejercicio y el anterior para $a = 3$?

11. Probar que para la integral de diferencial binomia [52-12] se tienen las *fórmulas de reducción*:

$$\begin{cases} (p + 1)\, b\, I(p, q) = -(at + b)^{p+1} t^{q+1} + (p + q + 2)\, I(p + 1, q), \\ (q + 1)\, b\, I(p, q) = (at + b)^{p+1} t^{q+1} - a\,(p + q + 2)\, I(p, q + 1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p + q + 1)\, I(p, q) = (at + b)^{p} t^{q+1} + b\, p\, I(p - 1, q), \\ (p + q + 1)\, a\, I(p, q) = (at + b)^{p+1} t^{q} - b\, q\, I(p, q - 1), \end{cases}$$

que permiten reducir $I(p, q)$ a funciones algebraicas, y a otra integral de la misma forma donde cada exponente p, q queda aumentado o disminuido en tantas unidades como se quiera.

12. Mediante la sustitución $t = \operatorname{sen} x$, convertir en integral binomia la integral $I(m, n) = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ y deducir fórmulas de reducción para ésta.

13. Integrar $1/(a \cos x + b \operatorname{sen} x)$.

14. Mediante la sustitución [52-13], probar que:

$$I = \int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C,$$

$$\text{si } -a < b < a;$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\operatorname{sen} x}{a + b\cos x} + C, \quad \text{si } b > |a|.$$

15. Demostrar que si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es función racional impar de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$, su primitiva se racionaliza mediante la sustitución $t = \operatorname{tg} x$.

16. Aplicar el resultado anterior a la integración de $\operatorname{tg}^5 x$.

17. Integrar:

$a)$ $(e^x + 1)/(e^x + 1)$; $b)$ $1/\operatorname{sh} x$;
$c)$ $1/(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)$; $d)$ $(2 - \operatorname{sh} x)/(2 + \operatorname{ch} x)$.

§ 53. Cálculo de algunas integrales definidas

1. Integrales calculables mediante primitivas. — La regla de Barrow, muy útil en los problemas elementales, exige el conocimiento de una primitiva, y ya hemos visto cuán pobre es el cuadro de funciones así integrables mediante funciones elementales. Nos limitaremos en este apartado, a dar dos ejemplos de integrales definidas calculables de este modo, muy importantes en la teoría de las series trigonométricas (vol. III, § 98).

Ejemplos: 1. Si es $a \neq 0$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \cos a x \, d x = \left[\frac{\operatorname{sen} a x}{a}\right]_0^{2\pi} = \frac{\operatorname{sen} 2\pi a}{a},$$

y si a es un *entero* distinto de cero:

$$\int_0^{2\pi} \cos a x \, d x = 0.$$

Sigue de aquí que si m y n son enteros *diferentes*:

[53-1]

$$\int_0^{2\pi} \cos m x \cdot \cos n x \cdot d x = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos (m+n) x + \cos (m-n) x] \, d x = 0,$$

mientras que si $m = n \neq 0$.

[53-2] $$\int_0^{2\pi} \cos^2 m x \, d x = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2 m x) \, d x = \pi.$$

2. Análogamente resulta, si m y n son enteros *diferentes*:

[53-3]

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} m x \cdot \operatorname{sen} n x \cdot d x = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos (m-n) x - \cos (m+n) x] \, d x = 0.$$

mientras que si $m = n \neq 0$:

[53-4] $$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 m x \, d x = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2 m x) \, d x = \pi,$$

y finalmente, para enteros m y n cualesquiera:

[53-5]

$$\int_0^{2\pi} \cos m x \operatorname{sen} n x \, d x = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen} (m+n) x - \operatorname{sen} (m-n) x] \, d x = 0.$$

2. Algunas integrales calculables por partes. — Hay multitud de integrales definidas, cuyos valores son calculables en ciertos intervalos por artificios diversos. Como muchas de ellas se presentan en cuestiones varias, es preciso obtener siquiera

las más frecuentes, exponiendo aquí métodos sencillos y dando otros posteriormente. La integración por partes, que permite la reducción de una integral a otra más sencilla, tiene el inconveniente de dar fórmulas complicadas cuando se aplica reiteradamente, pues además de la nueva integral aparece cada vez un nuevo término. Sin embargo, cuando la integral está definida entre extremos que anulan estos términos, resulta una expresión monomia para la integral, como se ve en los siguientes ejemplos, que se presentan en multitud de cuestiones.

EJEMPLOS: 1. Calculemos por partes esta integral, que permite expresar $n!$ en forma de integral, como conviene algunas veces:

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = \Big[-e^{-x} x^n \Big]_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \, dx = n \, . \, I_{n-1},$$

por anularse el término integrado para $x = 0$, $x \to \infty$. Rebajando sucesivamente el índice, se llega a $I_0 = 1$; luego, resulta:

[53-6] $$I_n = n(n-1) \dots 2 \, . \, 1 = n!$$

2. La relación que liga el seno y coseno de x permite simplificar la diferencial de las expresiones $\operatorname{sen}^m x \, . \cos^n x$, obteniéndose fórmulas de recurrencia para las integrales de § 51-4, *a*. Deduzcamos solamente la más importante (cfr. ejercicio 16 de § 51):

$$\begin{aligned} D \operatorname{sen}^{m-1} x \cos x &= (m-1) \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^m x = \\ &= (m-1) \operatorname{sen}^{m-2} x - m \operatorname{sen}^m x, \end{aligned}$$

e integrando en $(0, \pi/2)$ a fin de que se anule el seno o el coseno en uno y otro extremo, resulta la fórmula de recurrenci

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \, dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{m-2} x \, dx.$$

Si m es impar, se llega al exponente 1, y la integral final vale 1; si m es par, se llega al exponente 0, y la integral vale $\pi/2$: luego, resulta:

[53-7] $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & (m \text{ impar}) \\[2ex] \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \, \dfrac{\pi}{2} & (m \text{ par}) \end{cases}$$

representando por el símbolo $m!!$ el producto de factores decrecientes de dos en dos unidades. En cuanto a la integral del coseno, es igual a la del seno, como se ve pasando al arco complementario.

3. Mediante las sustituciones $x = \operatorname{sen} t$, $x = \operatorname{tg} t$, se reducen a las anteriores estas integrales (cfr. ejercicio 17 de § 51):

[53-8] $$\int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!};$$

[53-9] $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \, \frac{\pi}{2}.$$

4. Partiendo de la expresión general D $\operatorname{sen}^m x \cos^n x$, resulta por el mismo procedimiento:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, d x = \frac{m-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x \, d x,$$

y disminuyendo de dos en dos el exponente del seno si m es par, se llega a la integral anterior; luego, en definitiva resulta:

[53-10]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, d x = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & \text{(algún exponente impar).} \\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (m \text{ y } n \text{ pares).} \end{cases}$$

La primera ha resultado suponiendo m par y n impar; si m es impar, no se llega a la integral de $\cos^n x$, sino a la de $\operatorname{sen} x \cos^n x$, que es inmediata y conduce al mismo resultado, cualquiera sea la paridad de n.

3. **Fórmula de Wallis.** — Es una aplicación importante de la integral de $\operatorname{sen}^n x$ calculada en § 53-2, ej. 2. Puesto que el número π viene expresado por la integral de una potencia de exponente par, tratemos de acotarla entre dos de exponente impar, y por lo tanto, calculables mediante la primera fórmula [53-7]. Por ser en el interior del primer cuadrante $\operatorname{sen} x < 1$ se verifica:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, d x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x \, d x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1} x \, d x,$$

y sustituyendo los valores ya calculados de estas integrales:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad \frac{(2n-1)!!\,\pi}{(2n)!!\,2}, \quad \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

resulta la acotación buscada para el número π:

[53-11] $$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n},$$

y designando por θ un número positivo menor que1, tenemos:

[53-12] $$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+\theta},$$

de donde, despejando el cuadrado dividido por n, como:

$$\frac{2n}{2n+\theta} \to 1,$$

resulta:

[53-13] $$\pi = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Esta fórmula de WALLIS fue dada por él en forma de producto infinito (Cap. XI, **nota III**):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

$$\frac{(2n-2)}{(2n-1)} \cdot \frac{2n}{(2n-1)} \cdot \frac{2n}{(2n+1)} \cdots$$

que converge hacia el mismo límite de la expresión anterior; porque si se toma un número par de factores, resulta el primer término de la acotación [53-11], y si se toma un número impar, resulta el segundo, y ambos tienen el mismo límite que la expresión equivalente [53-12].

4. **Fórmula de Stirling.** — La fórmula de WALLIS puede escribirse extrayendo la raíz cuadrada y pasando a factoriales ordinarios:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} = \frac{(2n)!!^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n)!\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{\pi}.$$

Por otra parte, existe el límite (cfr. § 57, ejerc. 3):

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\,e^{2n}}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}},$$

por ser monótona decreciente la sucesión $\alpha_n = n!\,e^n/n^{n+1/2}$, pues:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+1/2}} : \frac{n!\,e^n}{n^{n+1/2}} = \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1/2}},$$

y este cociente es < 1, por ser decreciente la función

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1/2} \quad \text{para} \quad x > 2,$$

como se comprueba si se estudia la derivada de su logaritmo:

$$D \ln f(x) = -\frac{2x+1}{2x(x+1)} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2x(x+1)} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \cdots$$

desarrollo válido (§ 45-4) para $|1/x| < 1$, ó sea: $|x| > 1$

Es $D \ln f(x) < 0$, si $x > 2$, lo que prueba lo dicho.

Eliminando la exponencial, para lo cual basta elevar al cuadrado la primera expresión de α y dividir por la segunda, resulta esta otra:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{n!^2\,2^{2n}\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Obtenemos así la famosa fórmula de STIRLING

[53-14] $$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

indispensable en todo cálculo en que se deban manejar factoriales de números muy grandes, como acontece en Cálculo de probabilidades.

5. **Integral de Poisson.** — Una integral muy importante en Cálculo de probabilidades es la integral convergente:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

que obtendremos acotando el integrando.

Evidentemente, recordando el desarrollo en serie de TAYLOR, es:

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2},$$

y elevando a n:

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Efectuando el cambio de variable $x = x'\sqrt{n}$, pero conservando el mismo nombre a la variable, es:

$$I = \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx < \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

$$I > \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx > \sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx,$$

y recordando los valores de estas integrales ya calculadas en [53-8] y [53-9], resulta:

$$\sqrt{n}\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < I < \sqrt{n}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2},$$

o bien cuadrando, para mayor comodidad:

$$\frac{n}{(2n+1)^2}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < I^2 < n\left(\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right)^2 \frac{\pi^2}{4},$$

y sustituyendo los cocientes de factoriales por sus expresiones [53-12]:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{n}{(2n+1)^2}\,(2n+\theta) < I^2 < \frac{\pi}{2}\,\frac{n}{2(n-1)+\theta}.$$

Para $n \to \infty$ resultan como límites extremos $\frac{\pi}{4}$; luego, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Es decir:

[53-15] $$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

NOTA: Además de [53-15] son muy útiles en Cálculo de probabilidades las siguientes:

[53-16] $$\int_0^\infty x\,e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}, \qquad \int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

La primera es inmediata, pues el integrando es la derivada de $\frac{1}{2}e^{-x^2}$; la segunda se reduce a [53-15], por partes.

Dedúzcanse, como ejercicio, las integrales sucesivas en que la potencia de x es x^3, x^4, etc. En la misma forma se calcula la integral siguiente:

[53-17] $$\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{t}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

pues haciendo $\sqrt{t} = x$ se reduce a la segunda.

EJERCICIOS

1. Probar:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}; \qquad \int_0^\infty \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sg} a;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+1}{a-1}.$$

2.
$$\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} b x \, \mathrm{d} x = \frac{b}{a^2 + b^2};$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos b x \, \mathrm{d} x = \frac{a}{a^2 + b^2}; \quad (a > 0).$$

3. Probar que
$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d} x}{a + b \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \text{si} \quad -a < b < a.$$

4. Probar que $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d} x}{\sqrt{(b - x)(x - a)}} = \pi.$

5. Explicar por qué $\displaystyle\int_1^3 \operatorname{tg} x \, \mathrm{d} x \neq - \ln |\cos 3| + \ln \cos 1.$

6. Probar $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax} \, \mathrm{d} x = n!/a^{n+1}; \quad \int_0^1 (\ln 1/x)^n \, \mathrm{d} x = n!;$

$\displaystyle\int_0^1 x^{a-1} (\ln 1/x)^n \, \mathrm{d} x = n!/a^{n+1};$ siendo n un número natural y $a > 0$.

7. Calcular
$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^n \, \mathrm{d} x}{\sqrt{1 - x^2}}; \qquad \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{x^{n-1} \, \mathrm{d} x}{\sqrt{x - x^2}}.$$

8. La integral definida de diferencial binomia
$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} \, \mathrm{d} x$$
se llama *integral euleriana de primera especie* o *función Beta*. Demostrar que es función simétrica de p y q. La integral
$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \, \mathrm{d} x$$
se llama *integral euleriana de segunda especie* o *función Gamma*. Demostrar, mediante [53-10] y [53-6], que para p y q naturales es
$$\mathrm{B}(p, q) = \Gamma(p) \Gamma(q) / \Gamma(p + q).$$

9. Deducir la siguiente fórmula de reducción, y con ella la expresión anterior de $\mathrm{B}(p, q)$: $(p + q) \, \mathrm{B}(p, q + 1) = q \, \mathrm{B}(p, q)$. Obtener la que [illegible] $\mathrm{B}(p + 1, q)$ y $\mathrm{B}(p, q)$.

10. Probar: $$\int_0^a x^{p-1}\,(a-x)^{q-1}\,dx = a^{p+q-1}\,B(p,q).$$

11. Probar la fórmula de reducción:

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\,(n-1)I_{n-2},\quad (n \geqslant 2),$$

y con ella:

$$I_n = (n-1)!!\;2^{-(n+2)/2}\sqrt{\pi},\quad (n > 0 \text{ par}),$$
$$I_n = (n-1)!!\;2^{-(n+1)/2},\quad (n \geqslant 1 \text{ impar}).$$

12. De $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$ deducir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = \sqrt{\pi/a}\;e^{b^2/4a},\quad (a > 0,\ b \text{ real}).$$

Notas al capítulo XIV

I. **Tablas de integrales.** — *a*) Algunos libros de Análisis, como GRANVILLE y SMITH (citado en Cap. VI, nota VI, 3) traen breves tablas de integrales. Otras, más completas entre las breves, se hallan en algunos formularios generales, como el de DWIGHT (citado en Cap. VII, nota II, *d*).

b) Entre las tablas de extensión moderada, está muy bien estructurada y con tablas auxiliares la clásica de:

B. O. PEIRCE: *A short table of integrals.* (3ª ed., Ginn, Boston, 1929).

Otra muy indicada es:

G. PETIT-BOIS: *Tables d'intégrales indéfinies.* (Béranger, París, 1906; edición alemana, Teubner, Leipzig, 1906).

También sobre integrales indefinidas, es mucho más completa y con bibliografía:

W. MEYER ZUR CAPELLEN: *Integraltafeln. Sammlung unbestimmter Integrale elementarer Funktionen.* (Springer, Berlín, 1950).

c) Conteniendo integrales indefinidas y definidas y con indicaciones para la evaluación de estas últimas, que no pueden verificarse por derivación, está la obra reciente:

W. GRÖBNER y N. HOFREITER. *Integraltafeln.* I: *Unbestimmte Integrale*; II: *Bestimmte Integrale.* (Springer, Viena, 1949 y 1950).

Sobre integrales definidas está la monumental obra de:

D. BIERENS DE HAHN: *Nouvelles tables d'intégrales définies.* (Engels, Leyden, 1867; reimpreso con correcciones por Stechert, Nueva York, 1939).

Acerca de esta obra debe mencionarse:

C. F. LINDMAN: *Examen des nouvelles tables d'intégrales définies de* M. BIERENS DE HAHN. (K. Svenska Vetenskaps-Akad., Handlingar, vol. 24, nº 5, Estocolmo, 1891. Reimpreso por Stechert, Nueva York, 1944).

CAPÍTULO XV

APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS

§ 54. ÁREAS Y VOLÚMENES

1. Áreas en coordenadas cartesianas. — a) El concepto de área plana fue nuestro punto de partida para la definición de integral (§ 48), pero en la interpretación geométrica de ésta hemos supuesto $f(x) > 0$ en el intervalo de integración, es decir, que ninguna porción del diagrama está debajo del eje x. No obstante, en la definición analítica de la integral definida como límite de sumas, esta restricción es superflua y no debe hacerse. Veamos, entonces, cómo se interpreta geométricamente, mediante áreas, el caso general: la integral será la *suma algebraica* de las áreas limitadas por la curva y el eje x, considerando positivas las que están arriba de dicho eje, y negativas las situadas debajo del mismo (fig. 150).

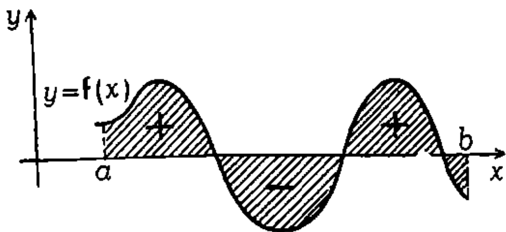


Fig. 150.

En muchos problemas interesa calcular un área como la sombreada, pero sin la distinción anterior, es decir, considerando todas como positivas (área absoluta). En este caso habrá que hallar los puntos de intersección de la curva con el eje x, resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, y luego calcular cada parte del área como valor absoluto de una integral definida. De otro modo, supuesta $f(x)$ integrable (ver nota 2), el área absoluta en cuestión es:

$$[54\text{-}1] \qquad A = \int_a^b |\, f(x)\,|\, dx, \qquad (a < b).$$

EJEMPLOS: 1. Área de la superficie finita limitada por la parábola cúbica $y = x^3 - 3x^2 - 4x$.

Las intersecciones con el eje x son: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$. Como:

$$\int_{-1}^{0} y \, \mathrm{d}x = \frac{3}{4}, \quad \int_{0}^{4} y \, \mathrm{d}x = -32,$$

el área (absoluta) vale: $A = \frac{3}{4} + |-32| = 32{,}75$.
En cambio,

$$\int_{-1}^{4} y \, \mathrm{d}x = \tfrac{3}{4} - 32 = -31{,}25.$$

2. *Segmento de cicloide.* — Siendo, (§ 34-6), $y\,\mathrm{d}x = r^2(1 - \cos t)^2 \, \mathrm{d}t$, la integral se calcula inmediatamente pasando al arco doble. En particular, para la onda completa, resulta el área $3\pi r^2$.

NOTAS: 1. Si la función $f(x)$ se representa en ejes oblicuos de ángulo ϑ, la integral ya no representa el área; para obtener el área de cada paralelogramo habrá que multiplicar $f(x)\Delta x$ por sen ϑ, y por lo tanto:

$$A = \operatorname{sen} \vartheta \int_{a}^{b} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x.$$

2. Puede existir la integral de RIEMANN de $|f(x)|$ sin que $f(x)$ sea integrable (R). Por ejemplo, si $g(x)$ es la función de DIRICHLET no integrable RIEMANN según § 49-2, ej., tampoco lo será $f(x) = g(x) - 1/2$, mientras que $|f(x)| \equiv 1/2$ es integrable RIEMANN, de área rectangular.

3. La integral

[54-2] $$\ln x = \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

representa el área bajo un arco de hipérbola, a partir de $x = 1$; de ahí que el logaritmo natural se llame también *hiperbólico*. Puede tomarse [54-2] como *definición* de $\ln x$, y deducir de allí sus propiedades; por ejemplo, para el logaritmo de un produtco resulta:

$$\ln(a \cdot b) = \int_{1}^{ab} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{1}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{a}^{ab} \frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$= \int_{1}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{1}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (t = ax),$$

o sea: $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$.

Sin salir del campo real no podemos definir así el logaritmo de un número negativo, pues al pasar por $x = 0$ se hace infinito el integrando, y la integral resulta divergente (§ 50-4, *b*). Definida la integración en el campo complejo (vol. III, § 115), podremos tomar [54-2] como definición general del logaritmo.

En particular podemos definir el número e mediante:

[54-3] $$\int_{1}^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 1.$$

b) *Área entre dos curvas.* — Si las curvas se cortan en dos puntos de abscisas x_1 y x_2, el área (absoluta) que delimitan se calcula como diferencia de las áreas bajo cada una de ellas luego (fig. 151):

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, d\, x - \int_{x_1}^{x_2} g\,(x)\, d\, x =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\, d\, x.$$

suponiendo que $f(x) \geqq g(x)$ para $x_1 < x < x_2$, y en general:

[54-4] $$A = \int_{x_1}^{x_2} | f(x) - g(x) |\, d\, x, \quad (x_1 < x_2),$$

suponiendo además que $f(x) - g(x)$ es integrable. Entonces, si las curvas se cortan en puntos intermedios, habrá que calcular varias integrales y sumar sus valores absolutos.

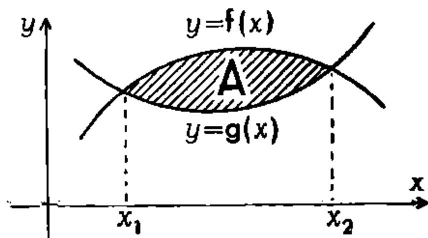


Fig. 151.

EJEMPLOS: 3. Área entre las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$. Como la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$ tiene las únicas raíces reales $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, y en (0.1) es $\sqrt{x} \geqslant x^2$ se tiene:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, d\, x = \frac{1}{3}.$$

4. *Segmento circular.* — El área del segmento de círculo de centro O y radio a limitado por las rectas $x = x_1$, $x = x_2$, es:

$$2\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2}\, d\, x = \left[x\, \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{ arc sen } \frac{x}{a} \right]_{x_1}^{x_2}.$$

5. *Segmento elíptico.* — Si sus semiejes son a y b, como las ordenadas son las de la circunferencia de radio a, multiplicadas por b/a, basta multiplicar por este coeficiente el resultado anterior. Para $x_1 = -a$, $x_2 = a$ resulta, respectivamente, como área del círculo y de la elipse πa^2 y $\pi a b$.

6. *Segmento parabólico.* — El segmento de parábola $y = \sqrt{2 p x}$, desde el vértice a la abscisa a, tiene el área

$$\frac{4}{3} \sqrt{2 p a^3} = \frac{4}{3}\, a \sqrt{2 p a},$$

es decir, 2/3 del rectángulo cuya base es la cuerda y su altura la flecha.

c) *Área limitada por una curva cerrada.* — Hasta ahora sólo hemos considerado curvas dadas por funciones uniformes, pero si una curva cerrada tiene la propiedad de que toda recta paralela al eje y la corte a lo más en dos puntos, su área se determina por *b*), descomponiéndola en dos arcos.

d) *Areas orientadas.* — La distinción entre los casos *a*) y *c*) radica en el papel del eje x como parte del contorno, pues todas las áreas que estamos considerando están limitadas por una curva cerrada C. Así como

fijamos un sentido de recorrido a la circunferencia unidad (§ 28-1), diremos que el contorno C se recorre en *sentido positivo* cuando al hacerlo queda el interior del recinto a la izquierda (o sea: el ángulo orientado desde la tangente en el sentido de recorrido hasta la normal interior, es igual al que lleva el eje x a coincidir con el eje y). Interesa en muchos casos considerar, en lugar del área absoluta A, el *área orientada* o *relativa* A de un recinto, positiva o negativa según el sentido en que se recorra su contorno C. En la figura 150, los signos indicados de las integrales coincidirán con los del área orientada cuando el contorno se recorre *desde a hasta b a lo largo del eje x, regresando sobre la curva.*

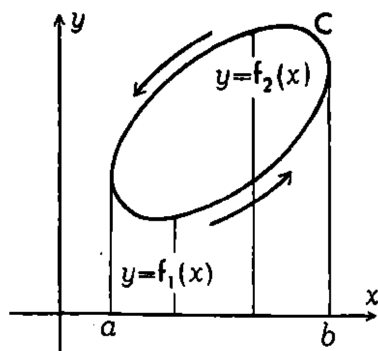


Fig. 152.

En la curva cerrada C de la figura 152, el área orientada correspondiente al sentido indicado sobre el contorno (y por lo tanto positiva) vale:

$$A = A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, d x.$$

Si definimos $\int_C y \, . \, d x$, integral "a lo largo del contorno orientado C" por:

[54-5] $$\int_C y \, . \, d x = \int_a^b f_1(x) d x + \int_b^a f_2(x) d x,$$

tendremos:

[54-6] $$A = - \int_C y \, . \, d x.$$

Considerando el otro sentido sobre C, cambian de signo ambos miembros y subsiste [54-6].

Análogamente se demuestra que:

[54-7] $$A = \int_C x \, . \, d y.$$

y la semisuma:

[54-8] $$A = \tfrac{1}{2} \int_C x \, . \, d y - y \, . \, d x$$

ofrece la ventaja de que el integrando es invariante respecto a toda rotación de ejes (§ 54-2, nota).

NOTA 4: Estas integrales a lo largo de una curva son casos especiales de integrales llamadas *curvilíneas*, que definiremos en el volumen II (§ 88). Aquí pueden considerarse demostradas las fórmulas [54-6] a [54-8] para el caso en que el contorno C no se corte a sí mismo, y esté formado por un número finito de arcos sobre cada uno de los cuales x ó y varíe en forma monótona, pudiendo también comprender un número finito de segmentos paralelos a los ejes de coordenadas.

e) Caso de representación paramétrica. — Si el contorno C viene dado paramétricamente:

$$x = \mathrm{x}(t), \quad y = \mathrm{y}(t), \quad [t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad \mathrm{x}(t_0) = \mathrm{x}(t_1), \quad \mathrm{y}(t_0) = \mathrm{y}(t_1)],$$

bajo la hipótesis *d*) subsisten las fórmulas [54-6] a [54-8], considerando efectuada en ellas la sustitución mediante la nueva variable t (§ 51-3, *b*). En virtud de las condiciones que permitían la sustitución, supondremos que las funciones que definen paramétricamente C tienen derivadas *acotadas*, y continuas salvo un número finito de puntos de discontinuidad en los que pueden presentarse los llamados puntos angulosos, de tangentes laterales distintas (§ 30-5).

Aun puede extenderse la validez de las fórmulas anteriores para el caso en que la curva C se corte a sí misma en un número finito de puntos, determinando así en el plano un número finito de distintas regiones R_1, R_2, ... Entonces se define el *índice topológico* μ_i de cada región R_i como igual al número (positivo o negativo) de vueltas completas del vector que, partiendo de un punto fijo Q en R_i, termina en un punto que recorre la curva C en el sentido adoptado para ésta como positivo (por ejemplo, t creciente). Dicho índice μ_i resulta independiente de la elección del punto $Q \in R_i$. En la figura 153 se han señalado los índices correspondientes a distintos casos. (Cfr. ejercicio 5 de § 54).

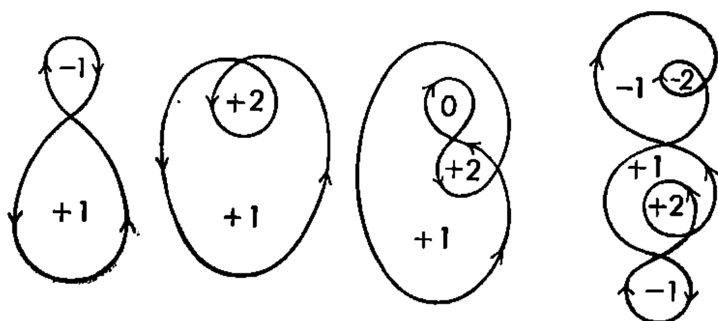


Fig. 153.

Si designamos por $|R_i|$ el área *absoluta* de la correspondiente región, es inmediatamente demostrable por descomposición que resulta:

$$-\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{y}(t)\mathrm{x}'(t)\,\mathrm{d}\,t = \Sigma_i\, \mu_i\, |R_i|,$$

y análogamente para las fórmulas correspondientes a [54-7] y [54-8].

Ejemplo 7: Para la elipse

$$x = a \cos t, \; y = b \operatorname{sen} t, \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

resulta:

$$\mathrm{A} = -\int_0^{2\pi} b \operatorname{sen} t(-a \operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}\,t = \tfrac{1}{2}\, a\, b \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\,t)\,\mathrm{d}\,t = +\pi\, a\, b.$$

Véase, también, el ejemplo 4 de § 54-2.

2. **Áreas en coordenadas polares.** — Para calcular el área limitada por la curva $r = f(\varphi)$ y los radios de argumentos $\varphi_0\ \varphi_1$, dividamos el ángulo que éstos comprenden por radios intermedios cualesquiera. El área limitada por cada dos radios consecutivos que forman ángulo $\Delta\varphi$ (fig. 154) está comprendida entre los sectores circulares cuyos radios son el máximo M_i y el mínimo m_i de los valores de r en el intervalo $\Delta\varphi$, puesto que el sector curvilíneo está contenido en uno de estos sectores circulares y contiene al otro, y como la función es continua, también será igual al área de un sector circular del mismo ángulo y radio intermedio $f(\xi)$, siendo ξ un cierto ángulo comprendido en el intervalo $\Delta\varphi$. Por lo tanto, el área tiene por expresión:

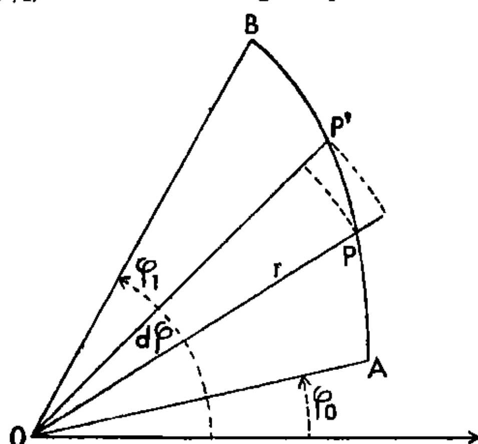


Fig. 154.

$$[54\text{-}9] \qquad A = \lim \Sigma \tfrac{1}{2} f(\xi)^2 \Delta\varphi = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\varphi)^2 d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 d\varphi.$$

El área limitada por una curva cerrada (fig. 155) se calcula por diferencia de expresiones como [54-9]. Si hay radios que cortan la curva en más de dos puntos (fig. 155), se debe integrar más de una diferencia.

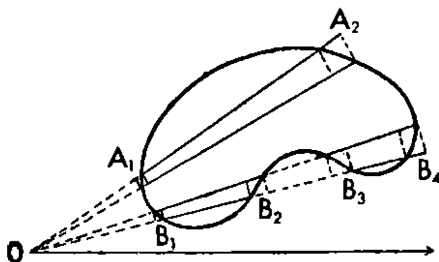


Fig. 155.

Cuando el intervalo angular es mayor que 2π, puede ocurrir que el área se recubra a sí misma, y en tal caso hay regiones computadas varias veces.

EJEMPLO: 1. *Espiral de* ARQUÍMEDES: $r = a\varphi$.

El área comprendida desde el rayo origen $\varphi = 0$ hasta el rayo de argumento φ_1 es:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_1} a^2\varphi^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\, a^2 \int_0^{\varphi_1} \varphi^2\, d\varphi = \frac{1}{6}\, a^2 \varphi_1^3,$$

o también: $A = r_1^3/6\,a$.

El área limitada por la primera espira vale $A = (4/3)\pi^3 a^2$;
El área limitada por la segunda espira vale $A = (28/3)\pi^3 a^2$;
es decir, siete veces la primera. El área de la tercera espira vale 19 veces la primera, y el área de la m-ésima espira es $[m^3 - (m-1)^3] \frac{4}{3} \pi^3 a^2$.

2. *Espiral logarítmica* $r = k e^{b\varphi} = k a^{\varphi}$.

Como área del sector correspondiente al intervalo angular $[\varphi_0, \varphi_1]$, $(\varphi_1 - \varphi_0 \leqslant 2\pi)$, resulta: $(k^2/4b)(e^{2b\varphi_1} - e^{2b\varphi_0}) = (r_1^2 - r_0^2)/(4b)$.

En particular, para la espiral $r = e^{\varphi}$, el área limitada por dos radios es el producto de su semisuma por su semidiferencia.

Nótese que si $\varphi_1 - \varphi_0 > 2\pi$ resulta el área superpuesta a sí misma. Al tender φ_0 hacia $-\infty$ resulta $(r_1^2/4b)(1 - e^{-4b\pi})$. Ésta es la suma de las áreas de las infinitas regiones entre cada dos espiras que tienden hacia el origen.

3. *Lemniscata de* Bernoulli: $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

La curva está contenida en dos de los ángulos opuestos por el vértice que forman las bisectrices a los ejes, pues sólo para $\cos 2\varphi \geqslant 0$ se tienen valores reales de r. Como además es simétrica respecto a los ejes x e y, calculando la parte sombreada (fig. 156) se tiene:

Fig. 156.

$$A = 4 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = 2a^2.$$

Saliendo del ángulo en que existe curva, se obtienen resultados erróneos; por ejemplo, integrando entre 0 y $\pi/2$ se obtiene 0. Obsérvese que si el contorno se recorre en el sentido indicado en la figura 156, o en el sentido contrario, el área relativa (§ 54-1, d) es nula.

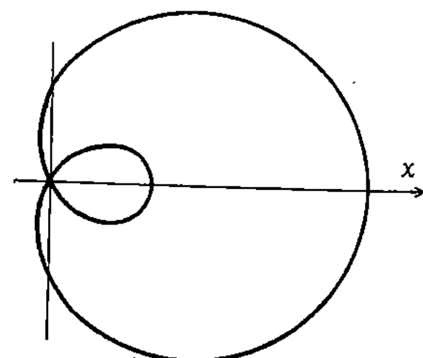


Fig. 157.

4. Para el *caracol de* Pascal (fig. 157): $r = 1 + 2\cos\varphi$, la fórmula [54-9], aplicada entre 0 y 2π, da 3π, un valor mayor que el del área encerrada por el contorno exterior, por contarse dos veces la encerrada por el lazo interior (§ 54-1, e).

Nota: La fórmula [54-9] se puede transformar, para hacerla aplicable en coordenadas cartesianas. Puesto que:

$$r^2 \, d\varphi = (x^2 + y^2) \, d \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = x \, dy - y \, dx,$$

se reencuentra [54-8]. Obsérvese que en el primer miembro, r y $d\varphi$ son invariantes respecto a rotaciones de los ejes coordenados, y en consecuencia, lo es la expresión [54-8].

3. **Volumen de un sólido de revolución.** — Sea $y = f(x)$ la **función que representa la sección meridiana de una superficie de revolución respecto del eje x ($a \leqq x \leqq b$).**

Al girar en torno de ese eje el trapezoide que tal curva limita, engendra un cuerpo *redondo*, o *cuerpo de revolución.*

Dividido el intervalo $[a\,b]$ en n partes, el trapezoide está contenido en la suma de rectángulos de bases Δx_i y alturas M_i; y a su vez contiene los de alturas m_i.

Estos rectángulos, al **girar** la meridiana, engendran cilin**dros cuyas sumas de volúmenes:**

$$s = \pi \Sigma m_i^2 \Delta x_i, \quad S = \pi \Sigma M_i^2 \Delta x_i,$$

comprenden al volumen V del sólido de revolución, y entonces:

[54-10] $$V = \pi \int_a^b y^2 \, d\,x = \pi \int_a^b f^2(x) \, d\,x.$$

EJEMPLOS: 1. *Volumen de una esfera de radio r.* — La esfera se puede considerar engendrada por la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \therefore \quad y^2 = r^2 - x^2,$$

al girar alrededor del eje x. Entonces:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 \, d\,x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \; d\,x = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

2. Análogamente, se obtiene para el volumen de un elipsoide de revolución:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad :$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

3. *Volumen de un paraboloide.* — Sea su meridiana: $y^2 = 2\,p\,x.$

$$V = \pi \int_0^a 2\,p\,x\,d\,x = \left(\pi \; p\,x^2 \right)_0^a = \pi\,p\,a^2.$$

En cambio, el cilindro de igual base y altura tiene el volumen: $\pi \;\, y^2 \;\, a = 2\,\pi\,p\,a^2$, es decir, el paraboloide tiene como volumen la mitad del cilindro que lo comprende.

4. **Volumen por secciones.** — Se podrá calcular, por una **integral simple,** el volumen limitado por una superficie, siem**pre que** se **pueda** calcular el **área** de cualquier sección paralela a uno de los **planos** coordenados.

En efecto; **trazando un** sistema de planos paralelos, **por** ejemplo, al plano $y\,z$, si sumamos los cilindros que tienen como bases las secciones de la superficie, y como alturas las distancias entre cada dos planos consecutivos, el límite de esa suma es el volumen; como el área es función de la distancia x, si es: Área $= \alpha(x)$, resulta

$$V = \lim \Sigma\, \alpha(x)\, \Delta\, x = \int_a^b \alpha(x)\; d\,x.$$

EJEMPLO: *Volumen del elipsoide:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

El área de la elipse sección con el plano $y z$ es: $\pi b c$. Las secciones con planos paralelos al $y z$ dan elipses semejantes a la anterior, cuyos semiejes son:

$$\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}, \quad \frac{c\sqrt{a^2-x^2}}{a};$$

luego, el área de cualquier sección paralela al plano $y z$ en función de su distancia x al mismo es:

$$\alpha(x)=\frac{\pi b c(a^2-x^2)}{a^2};$$

luego:

$$V=\int_{-a}^{a}\alpha(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi a b c.$$

5. **Área de una superficie de revolución.** — Consideremos una sección meridiana de la superficie de revolución entre los límites $x=a$, $x=b$. Se trata de calcular el área de la superficie que engendra ese arco alrededor del eje x.

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en un cierto número de partes, y tracemos tangentes a la curva en los puntos de abscisa media (fig. 158).

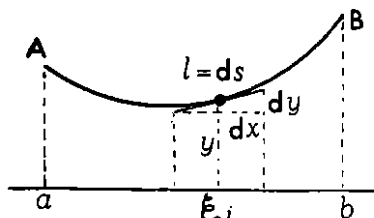


Fig. 158.

La superficie engendrada por cada lado es un tronco de cono de área: $2\pi y l$, siendo $2\pi y$ la longitud de la circunferencia media y l la apotema, cuya expresión es $\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=$ $=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$; luego, el límite de esta suma, que se llama (cfr. vol. II, § 84-4) *área de la superficie de revolución,* es:

$$A=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,.\,\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b y\,.\,\mathrm{d}s,$$

representando brevemente por $\mathrm{d}s$ el infinitésimo $\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$, cuyo significado geométrico es el trozo de tangente limitado por las ordenadas que distan $\mathrm{d}x$ (§ 55-1, *b*).

EJEMPLOS: 1. Calcular el área de una esfera.

Está engendrada por una semicircunferencia, de ecuación

$$x^2+y^2=r^2,$$

de donde:

$$y=\sqrt{r^2-x^2}.$$

Aplicando la fórmula anterior, resulta la conocida expresión $4\pi r^2$.

2. Área de un paraboloide de revolución: Sea la ecuación de la meridiana

$$y^2=2px, \quad \text{de donde:} \quad y=\sqrt{2px}.$$

Se tiene para el área entre $x=0$ y $x=a$:

$$A=(2/3)\,\pi\sqrt{p}\,[(2a+p)^{3/2}-p^{3/2}].$$

EJERCICIOS

1. Área del lazo encerrado por la curva $a(y^2 - x^2) + x^3 = 0$.
2. Área bajo una onda de cicloide (§ 34-6).
3. Área de la *cardioide* $r = a(1 + \cos\varphi)$.
4. Área limitada por la curva $r = 8\,a\cos\varphi\,\operatorname{sen}^2\varphi$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$.
5. Sea la curva cerrada

$$x = \sqrt{2}\,a\cos\tfrac{1}{2}t\operatorname{sen}t; \quad y = \sqrt{2}\,a\cos\tfrac{1}{2}t\cos t, \quad (0 \leqslant t \leqslant 4\pi).$$

Obtener, mediante [54-8], el área A encerrada por la curva recorrida *positivamente*. Obsérvese que así resultan dos lazos contados doblemente. Obtener también el área *simple* A_0 del plano limitada por el contorno exterior de la curva, así como el área A_1 que resulta de agujerear A_0 por ambos lazos.

6. Volumen del sólido engendrado por un círculo de radio r al girar alrededor de un eje de su plano, a distancia $a > r$ de su centro (*toro*).

7. Volumen limitado por el paraboloide elíptico $z = (x^2/a^2) + (y^2/b^2)$ y el plano $z = z_0$.

8. Volumen del conoide recto de altura a y base circular de radio r. (Considérense secciones planas formadas por triángulos isósceles de altura a y bases que son cuerdas perpendiculares al diámetro paralelo a la arista superior del conoide).

9. Volumen y área engendrados por una onda de cicloide (§ 34-6) al girar alrededor de su recta base.

10. Área de la superficie del elipsoide de revolución, alargado $(a > r = b)$ y achatado $(a < r = b)$. Hallar en ambos casos el área de la superficie esférica como caso límite.

§ 55. RECTIFICACIÓN DE CURVAS PLANAS

1. Longitud de un arco. — *a) Curva plana uniforme.* — Dado el arco de curva plana uniforme:

[55-1] $$y = f(x), \quad (a \leqq x \leqq b);$$

a cada partición del intervalo $[a, b]$:

[55-2] $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

corresponde una poligonal o quebrada inscrita de vértices $P_i\ (x_i, y_i = f(x_i))$, considerados en el orden de abscisas crecientes.

DEF.: *Longitud* de un arco es el extremo superior (§ 23-14) de los perímetros de todas las quebradas inscritas en él. Cuando este extremo es finito, el arco se llama *rectificable;* cuando el extremo es $+\infty$, o sea, cuando hay perímetros arbitrariamente grandes, se dice que el arco *no es rectificable,* o mejor, que tiene longitud *infinita.*

La operación de calcular la longitud de un arco se llama *rectificación.*

Admitiendo por ahora que $f(x)$ tiene derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, probaremos que existe, y que es igual a una integral definida, el límite de los perímetros cuan-

do tienden a cero las normas de las particiones [55-2]. Como al intercalar nuevos vértices el perímetro no puede decrecer, dicho límite será la longitud s del arco (Cfr. nota I). La longitud de cada lado es:

$$c_i = \mathrm{P}_{i-1}\,\mathrm{P}_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

y como por el teorema de los incrementos finitos (§ 35-1),

$$y_i - y_{i-1} = \mathrm{f}'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}), \quad (x_{i-1} < \xi_i < x_i),$$

resulta:

$$c_i = \sqrt{1 + \mathrm{f}'(\xi_i)^2}\,(x_i - x_{i-1}).$$

Cuando tiende a cero la norma de la partición [55-2], el límite:

$$s = \lim \Sigma\, c_i = \lim \Sigma \sqrt{1 + \mathrm{f}'(\xi_i)^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

existe, y es (§ 48-3) la integral definida de la función continua $\sqrt{1 + \mathrm{f}'(x)^2}$:

[55-3] $$s = \int_a^b \sqrt{1 + \mathrm{f}'(x)^2}\,.\mathrm{d}\,x.$$

EJEMPLOS: 1. Rectificar un arco de la parábola: $x^2 = 2\,p\,y$.

La fórmula [55-3] es:

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\,.\,\mathrm{d}\,x = \int_0^a \sqrt{1 + (x/p)^2}\,.\,\mathrm{d}\,x;$$

calculada la primitiva (§ 52-2, b_1) y sustituyendo los límites resulta, teniendo en cuenta que $(\sqrt{p^2 + x^2} + x)(\sqrt{p^2 + x^2} - x) = p^2$:

$$\frac{a}{2\,p}\sqrt{p^2 + a^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2 + a^2} + a}{p}.$$

2. **Rectifíquese la curva catenaria, cuya ecuación es:**

$$y = \tfrac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}).$$

Aplicando la fórmula resulta:

$$y' = \tfrac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}), \quad 1 + y'^2 = \tfrac{1}{4}\,(e^{2x} + 2 + e^{-2x}),$$

que es un cuadrado perfecto; luego,

$$\int \tfrac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})\,\mathrm{d}\,x = \tfrac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}),$$

expresión que limitada entre las abscisas extremas, da la longitud del arco.

Utilizando las funciones hiperbólicas, tenemos:

$$y = \mathrm{ch}\,x \qquad y' = \mathrm{sh}\,x \qquad 1 + y'^2 = \mathrm{ch}^2\,x;$$

luego,

$$\int \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \mathrm{ch}\,x\,.\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{sh}\,x.$$

3. **La curva continua** $y = x \cos \dfrac{\pi}{x}$, $y(0) = 0$, **en** $0 \leqslant x \leqslant 1$, no es rectificable, porque $y(1/n) = (-1)^n/n$, y entonces la longitud de la quebrada, cuyos vértices tienen abscisa $1/n$, es: $\Sigma\, c_i > \Sigma\,|\,y(1/n)\,| = \Sigma\, 1/n$, tan grande como se quiera, por ser la suma parcial de la serie armónica, que es divergente (§ 22-1, d). Esta curva tiene derivada continua en $[0;\,1]$, pero no acotada, y la integral generalizada [55-3] resulta aquí divergente (§ 50-4, b).

4. La función de CANTOR (Cap. IX, nota VI - b) tiene derivada

$f'(x)$ nula, salvo en el conjunto ternario de CANTOR, que es de medida nula, (§ 50-2, nota 3), y en consecuencia.

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, d x = 1.$$

En cambio, la longitud de la curva es 2, pues toda quebrada tiene longitud menor que 2, pero aquellas cuyos vértices son los extremos de los segmentos donde $f(x)$ es constante, tienen longitud tan próxima a 2 como se quiera.

Obsérvese que no se cumplen las condiciones dadas para la validez de [55-3].

NOTA 1: La validez de [55-3] subsiste (§ 48-3, *d*) si $f'(x)$, *conservándose acotada*, deja de ser continua o existente en un número finito de puntos de $[a, b]$. La acotación de $f'(x)$ se asegura si suponemos que los puntos de $[a, b]$ en los que $f'(x)$ deja de ser continua, son puntos angulosos (§ 30-5) con derivada lateral continua.

b) *Diferencial de arco.* — Si en la curva $y = f(x)$ consideramos un origen fijo $A(a, f(a))$, éste, conjuntamente con el punto $M(x, f(x))$, variable sobre la curva, determinarán un arco A M, cuya longitud, llamada *abscisa curvilínea*, es, bajo la hipótesis hecha en *a*):

[55-4] $$s = s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(t)^2}\, d t.$$

Su derivada es, en los puntos de continuidad del integrando, igual a su valor en el extremo superior variable (§ 50-1), y entonces su diferencial, que llamaremos *diferencial de arco*, es:

[55-5] $$d s = \sqrt{1 + f'(x)^2}\ d x = \sqrt{d x^2 + d y^2}.$$

Por consiguiente, $d s$ está representada por la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $d x$ y $d y$, y recordando el significado geométrico de $d y$ (§ 34-2), resulta: $d s$ es el *segmento de tangente a la curva*, comprendido entre las abscisas x y $x + d x$.

c) *Curva plana general.* — La definición geométrica dada en *a*) subsiste para un arco de curva plana cualquiera; si ésta se da en forma paramétrica,

[55-6] $$x = x(t), \quad y = y(t); \quad (\tau_0 \leqq t \leqq \tau_1);$$

a cada partición del intervalo $[\tau_0, \tau_1]$:

[55-7] $$\tau_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \tau_1$$

corresponde una quebrada inscrita, cuyos vértices deben considerarse en el orden indicado por [55-7].

Admitiendo también ahora que las funciones [55-6] tienen derivadas continuas en $[\tau_0, \tau_1]$, probaremos que el arco es rectificable, subsistiendo la segunda expresión [55-5] de la diferencial de arco, que podrá escribirse también:

[55-8] $$d s = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, d t,$$

y por lo tanto:

[55-9] $$s = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, d\,t.$$

En efecto, comparemos el infinitésimo $\sqrt{x'^2 + y'^2}\,.\,\Delta t$ con la cuerda, formando su diferencia:

$$\delta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} - \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2},$$

que puede considerarse como diferencia de longitudes de dos vectores, la cual no supera a la longitud del segmento que une sus extremos, ni ésta a la suma de las diferencias de coordenadas, es decir,

$$|\,\delta\,| \leqslant |\,\Delta x - d\,x\,| + |\,\Delta y - d\,y\,| =$$
$$= |\,x'(\tau_i) - x'(t)\,|\; d\,t + |\,y'(\tau_i) - y'(t)\,|\; d\,t.$$

Siendo continuas las derivadas, y por lo tanto (§ 26-6) uniformemente continuas, estos incrementos son $< \varepsilon$ para todos los incrementos $d\,t$ suficientemente pequeños; luego, resulta $|\,\delta\,| < 2\,\varepsilon\, d\,t$

El perímetro de cada poligonal inscrita es:

$$\Sigma \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Sigma \sqrt{x'^2 + y'^2}\,.\,\Delta t + \Sigma\,\delta,$$

donde:

$$|\,\Sigma\,\delta\,| < 2\,\varepsilon\,(\tau_1 - \tau_0),$$

y como este segundo sumando es arbitrariamente pequeño, el límite de la suma de cuerdas es igual al límite de la segunda suma, es decir, la integral [55-9], de donde resulta [55-8].

NOTA 2: La validez de [55-9] subsiste (§ 48-3, *d*) si las derivadas $x'(t)$ é $y'(t)$, *conservándose acotadas*, dejan de ser continuas y aun existentes en un número finito de puntos de $[\tau_0, \tau_1]$. Caso particular es el de los puntos angulosos (nota 1).

EJEMPLO 5: *Cicloide.* — La fórmula [55-8] aplicada a las ecuaciones de la cicloide (§ 34-6), da:

$$d\,s = r\sqrt{2(1 - \cos t)}\;.\,d\,t = 2\,r\,.\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\,d\,t,$$

cuya primitiva es $-4\,r\,.\cos t/2$. Por ejemplo, la longitud de una onda es $8\,r$.

NOTAS: 3. *Criterio práctico para las curvas uniformes.* — Si la función uniforme $y = f(x)$ es creciente en (a, b), como la longitud de cada cuerda es menor que la suma de catetos $|\,\Delta x\,| + |\,\Delta y\,|$, el perímetro de la poligonal es inferior a la suma de todos estos incrementos, que vale $(b - a) + [f(b) - f(a)]$. La curva es, por lo tanto, rectificable, y su longitud es menor que esta cota. Lo mismo si la función es decreciente. Si se compone de un número finito de arcos monótonos, es por lo tanto rectificable; y para acotar la longitud, basta aplicar a cada uno la acotación anterior, y resulta como suma de incrementos (fig. 159):

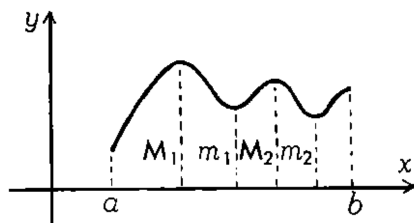


Fig. 159.

$$\Sigma\,\Delta x = b - a; \quad \Sigma\,|\,\Delta y\,| = [M_1 - f(a)] + (M_1 - m_1) + (M_2 - m_1) +$$
$$+ (M_2 - m_2) + \ldots + [f(b) - m_n] = f(b) - f(a) + 2\,\Sigma(M_r - m_r),$$

suponiendo, por ejemplo, igual número de máximos y de mínimos. Cada perímetro es mayor que esta suma de ordenadas, y menor que la misma sumada con $b - a$; luego, resulta este criterio sencillo:

Cuando un arco uniforme en $[a, b]$ se descompone en infinitos arcos

monótonos, la condición necesaria y suficiente para que sea rectificable es que se conserven acotadas las sumas

$$\Sigma (M_r - m_r).$$

En particular, si los máximos son positivos y los mínimos negativos, resulta como condición necesaria y suficiente la acotación de las sumas ΣM_r, Σm_r, o sea, la convergencia de las series. En el ejemplo 3, estas series son divergentes, y por eso el arco no es rectificable. En cambio lo es $y = x^2 \cos \pi/x$ en cualquier intervalo, pues las series de máximos y de mínimos son convergentes.

4. No se confundan los infinitésimos

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}; \quad \Delta s; \quad \mathrm{d} s = \sqrt{\mathrm{d} x^2 + \mathrm{d} y^2};$$

cuerda, arco, y trozo de tangente (b). Los tres son equivalentes (c y $\mathrm{d} s$ por la demostración de (c); Δs y $\mathrm{d} s$ por § 34-3); en especial, con las hipótesis hechas queda demostrado el teorema: *La razón de un arco infinitésimo a su cuerda, tiene por límite* 1.

2. **Vector ds. Cosenos directores de la tangente.** — Llamaremos *vector diferencial de arco* **d s**, al vector de módulo $\mathrm{d} s$ (§ 55-1, b), dirección tangencial a la curva, y sentido el de recorrido sobre ésta (arcos crecientes). Sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas serán, llamando φ a la inclinación de la tangente:

$$\mathrm{d} x = \mathrm{d} s \cos \varphi, \quad \mathrm{d} y = \mathrm{d} s \operatorname{sen} \varphi.$$

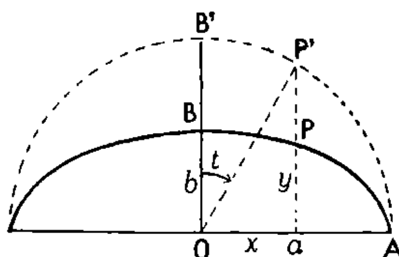


Fig. 160.

Las expresiones:

$$[55\text{-}10] \qquad \cos \varphi = \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} s}, \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} s}$$

se llaman *cosenos directores* de la tangente (el segundo es el coseno del ángulo que la tangente forma con el eje O y).

3. **Rectificación de la elipse. Integrales elípticas.** — a) Sea la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Podemos hacer (fig. 160):

$$x = a \operatorname{sen} t, \quad y = b \cos t.$$

El valor $\mathrm{d} s^2 = \mathrm{d} x^2 + \mathrm{d} y^2$ se calcula así:

$$\mathrm{d} x = a \cos t . \mathrm{d} t \quad \mathrm{d} y = - b \operatorname{sen} t . \mathrm{d} t,$$

$$[55\text{-}11] \qquad \mathrm{d} s^2 = [a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t] \, \mathrm{d} t^2.$$

Llamando k a la excentricidad, $k = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, resulta:

$$a^2 - b^2 = k^2 . a^2, \qquad b^2 = a^2 (1 - k^2),$$

y reemplazando en [55-11]:

$$d s^2 = [a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t - a^2 k^2 \operatorname{sen}^2 t]\, d t^2 = \\ = a^2 [1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t]\, d t^2.$$

[55-12] $$s = a \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\,.\,d t,$$

integral que da la longitud de un arco de elipse.

b) ***Integrales elípticas de primera y segunda especie.*** — En Análisis superior se demuestra que no existe ninguna combinación de funciones elementales que sea primitiva de la función $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}$, pero la función primitiva existe, y se puede calcular numérica y gráficamente. Un buen método es desarrollar la función $(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t)^{\frac{1}{2}}$ en serie binómica (§ 45-5), que resulta uniformemente convergente, e integrar término a término (cfr. vol. II, § 85), acotando fácilmente el error cometido.

La integral [55-12] se llama *elíptica*, y es una combinación lineal de las llamadas integrales elípticas de primera y segunda especie (según la clase de singularidades de las funciones integrales correspondientes). A. LEGENDRE estudió y tabuló las integrales siguientes:

$$u = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}; \qquad u = \int_0^z \frac{\zeta^2\, d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}.$$

1ª especie 2ª especie

La función inversa de la primera es la llamada *función elíptica de* JACOBI, $z = \operatorname{sn} u$ (seno elíptico), que ABEL demostró es doblemente periódica en el plano complejo; para $k = 0$ se convierte en la circular $z = \operatorname{sen} u$. Así, pues, una función elíptica es *inversa* de una integral elíptica, y no deben confundirse.

Para $\zeta = \operatorname{sen} t$, $d\zeta = \cos t\, d t$, se obtienen:

$$K(t, k) = \int_0^t \frac{d t}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}}; \qquad E(t, k) = \int_0^t \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\; d t,$$

en que E es combinación lineal de las anteriores (cfr. ejercicio 4 de § 55). Se consideran en $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ y $0 < k < 1$; la excentricidad k suele expresarse mediante $k = \operatorname{sen} \alpha$. Se llama ***integrales completas*** a los valores $K(\pi/2, k)$, $E(\pi/2, k)$, dando la segunda la longitud del cuarto de elipse para $a = 1$.

EJEMPLO: Sea la elipse de semiejes $a = 2$, $b = 1$ $\therefore$ $c = \sqrt{3}$.

Su excentricidad es $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; luego, $\alpha = 60°$.

Para rectificar el arco limitado por las abscisas $x = 0$, $x = 1$, calcularemos t por la fórmula:

$$1 = 2 \operatorname{sen} t, \qquad \text{de donde:} \qquad t = 30°.$$

El valor dado por las tablas es: 0,506; luego, la longitud del arco es $2 .\, 0{,}506 = 1{,}012$.

La longitud del cuadrante se obtendrá para $t = 90°$; las tablas dan 1,211; luego, la longitud del cuadrante es 2,422.

4. **Curvas planas en coordenadas polares.** — Si las coordenadas polares, r, φ, son funciones de un parámetro (en particular. si r es función de φ), también lo son las coordenadas cartesianas:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi,$$

y sus derivadas son continuas si lo son las de r y φ; luego, la curva es rectificable, y su longitud se calcula así:

$$d\,x = \cos\varphi\, d\,r - r \operatorname{sen}\varphi\, d\,\varphi, \qquad d\,y = \operatorname{sen}\varphi\, d\,r + r\cos\varphi\, d\,\varphi;$$

$$d\,s^2 = d\,r^2 + r^2\, d\,\varphi^2 = (r^2 + r'^2)\,.\,d\,\varphi^2;$$

[55-13] $$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\,\varphi.$$

Obsérvese que $d\,s$ puede considerarse como la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos infinitésimos sean $d\,r$ y $r\,d\,\varphi$ (hágase la figura).

EJEMPLOS: 1. *Cardioide*: $r = 2\,a(1 + \cos\varphi)$. Longitud total: $16\,a$.
2. *Espiral logarítmica*: $r = a\,.\,e^{m\varphi}$. Longitud:

$$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\,(r_2 - r_1).$$

5. **Curvatura de curvas planas.** — Llamaremos *curvatura media* C_m, de un arco A B (fig. 161), al cociente del ángulo $\Delta\varphi$ girado por la tangente desde A hasta B, por la longitud del arco A B:

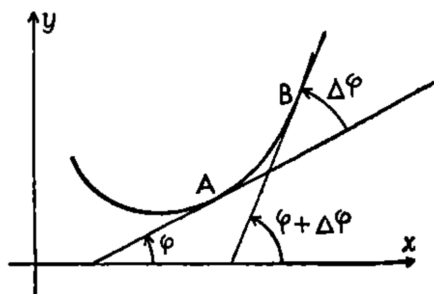


Fig. 161.

$$C_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

y *curvatura* C en el punto A, al límite de la curvatura media del arco A B cuando B tiende hacia A, o sea $\Delta s \to 0$:

[55-14] $$C = \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\,\varphi}{d\,s}.$$

Como por el significado geométrico de la derivada (§ 30-4) es $\varphi = \operatorname{arc\,tg} y'$ se tiene:

$$d\,\varphi = d \operatorname{arc\,tg} y' = \frac{1}{1+y'^2}\,d\,y' = \frac{y''}{1+y'^2}\,d\,x.$$

Reemplazando en [55-14] esta expresión y la de $d\,s$ [55-5], resulta:

[55-15] $$C = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

que expresa la curvatura a partir de la ecuación de la curva.

En la circunferencia, el ángulo de las tangentes en A y B es igual al ángulo central α (fig. 162), y como el arco es R α, resulta:

$$C_m = \frac{\alpha}{R\,.\,\alpha} = \frac{1}{R} \;\therefore\; C = \frac{1}{R}.$$

Por esta razón se llama *radio de curvatura* ρ de una curva en un punto a 1/C, por ser el radio de la circunferencia que tiene en el punto igual curvatura. Es decir:

[55-16] $$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Entonces (§ 40-6): *el radio de curvatura es igual al radio de la circunferencia osculatriz a la curva en el mismo punto.*

NOTAS: 1. La definición de curvatura puede darse para curvas (no necesariamente uniformes) representadas en forma paramétrica: $x = \mathrm{x}(t)$, $y = \mathrm{y}(t)$. Debe hallarse el límite para $\Delta t \rightarrow 0$ (y no para B → A, pues la curva puede cortarse a sí misma en A). Se halla así, como radio de curvatura, el de la circunferencia osculatriz, en forma paramétrica (§ 40-6).

2. En los puntos de tangente paralela al eje x, es $y' = 0$, pero $\rho = 1/y''$; es decir, la derivada segunda mide la curvatura.

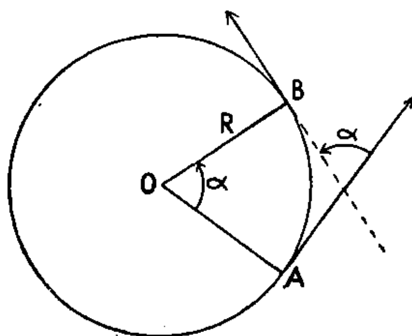


Fig. 162.

EJEMPLOS: 1. *Curvatura de la parábola $x^2 = 2py$, en el vértice.* La curvatura es (nota 2):

$$y'' = 1/p; \qquad \text{luego,} \qquad \rho = p.$$

El radio de curvatura en el vértice es igual al parámetro p.

Dibujada una parábola (fig. 163) tenemos, pues, el diámetro de la circunferencia osculatriz, buscando la ordenada igual a la abscisa $x = y$, para lo que basta trazar la bisectriz. El punto medio del radio es el foco.

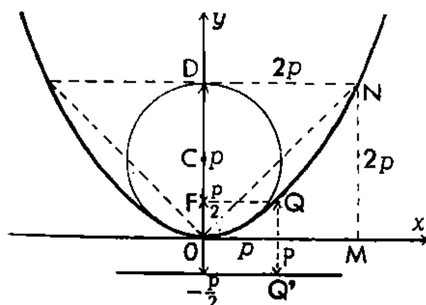


Fig. 163

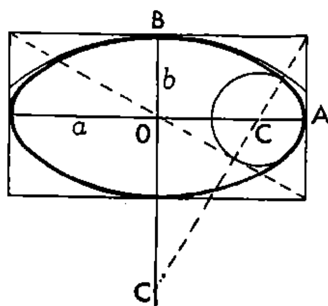


Fig. 164.

La abscisa x de la curva correspondiente al foco, es decir, la perpendicular al eje limitada por el foco y la curva es precisamente el radio $p = \rho$.

2. *Curvatura de la elipse.* Las ordenadas de la elipse son las de la circunferencia de radio a, multiplicadas por b/a; y la derivada y'' queda multiplicada por b/a; como la curvatura de la circunferencia es $1 : a$, la curvatura de la elipse en el vértice B (fig. 164) es, por lo tanto, b/a^2; luego, el radio de curvatura es a^2/b.

Cambiando las letras, el radio de curvatura en A es b^2/a.

Construcción: Desde uno de los vértices del rectángulo circunscripto se traza la perpendicular a la diagonal; sus intersecciones con los ejes son los centros de curvatura, como fácilmente se demuestra por semejanza de triángulos.

Puesto que la construcción de las cuatro circunferencias osculatrices es tan sencilla, y la curva tiene con cada una un arco que coincide sensiblemente, basta completar estos cuatro arcos con una regla flexible de acero para tener la elipse, mientras que las construcciones compuestas de arcos de circunferencias tangentes dan un óvalo nada parecido a la elipse, pues su curvatura es función discontinua.

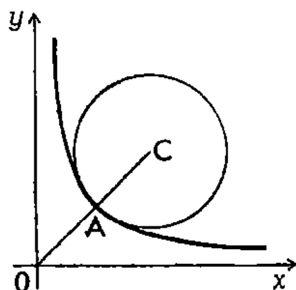


Fig. 165.

3. *Hipérbola*. Para calcular el radio de curvatura en los vértices (§ 55-7) de una hipérbola, adóptese y como variable independiente, y derivando dos veces, resulta: $\rho = b^2/a$.

Basta, pues, trazar desde el punto (a, b), que determina una asíntota, la perpendicular a ésta, y corta al eje x en el centro C de curvatura.

Para el vértice de la hipérbola equilátera $x\,y = k^2$, resulta

$$\rho = k\sqrt{2} = \text{O A} \qquad \text{(fig. 165)}.$$

4. ***Sinusoide*** $y = \operatorname{sen} x$. **La derivada segunda es** $y'' = -\operatorname{sen} x$; la curvatura en los vértices (§ 55-7) vale 1 y el radio de curvatura $\rho = 1$. Como el contacto con la circunferencia osculatriz es de tercer orden, hay un arco de sinusoide que sensiblemente coincide con la circunferencia (fig. 166). Además, la tangente en cada punto de intersección con el eje x

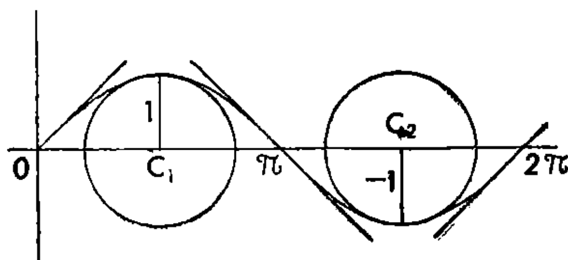


Fig. 166.

forma ángulo $\pm$ 45°, y como tiene contacto de segundo orden, también hay un trozo de sinusoide que sensiblemente coincide con la tangente.

5. La *cicloide* tiene las ecuaciones (§ 34-6):

$$x = r(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = r(1 - \cos t).$$

En el vértice (§ 55-7) $t = \pi$ resulta:

$$x' = 2\,r, \quad y' = 0, \quad x'' = 0, \quad y'' = -r;$$

luego, $\rho = -4\,r$.

6. Curvatura en coordenadas polares.

— Dada la curva $r = r(\varphi)$ en coordenadas polares, basta sustituir:

$$x = r\,.\,\cos\varphi; \qquad x' = -r\,.\,\operatorname{sen}\varphi + r'\,.\,\cos\varphi;$$
$$y = r\,.\,\operatorname{sen}\varphi; \qquad y' = \quad r\,.\,\cos\varphi + r'\,.\,\operatorname{sen}\varphi;$$

y análogamente x'', y''. Simplificando, resulta:

[55-17] $$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\,r'^2 - r\,r''}.$$

EJEMPLO: Espiral logarítmica: $r = a\,e^{m\varphi}$. Simplificando, resulta: $\rho = r\sqrt{1+m^2}$.

El radio de curvatura es proporcional al radio vector.

7. Vértices de las curvas en general. — Al moverse un punto sobre la curva $y = f(x)$, la curvatura varía con x; los puntos en que alcanza valores máximos y mínimos sin anularse, se llaman *vértices* de la curva.

Si el radio es máximo o mínimo, también lo es su cuadrado; obtendremos sus máximos y mínimos resolviendo la ecuación:

$$y''^2 \cdot 3(1+y'^2)^2 \cdot 2\,y'\,y'' - (1+y'^2)^3 \cdot 2\,y''\,y''' = 0,$$

$$\text{o sea: } 3\,y'\,y''^2 = (1+y'^2)\,y'''.$$

El factor suprimido, y'', igualado a cero, representa los puntos de inflexión, donde la curvatura alcanza su mínimo *cero*; pero éstos no se consideran como vértices.

Si la curva es simétrica respecto del eje y, toda intersección con dicho eje es un vértice, y siendo además $y' = 0$, resulta $y''' = 0$ lo mismo que en la circunferencia osculatriz, que también es simétrica; por lo tanto, el contacto es de tercer orden.

Más general, consideremos la circunferencia osculatriz en un vértice de la curva. Derivando por tercera vez la ecuación de la circunferencia (§ 40-6), resulta:

$$(y-\beta)\,y''' + y'\,y'' + 2\,y'\,y'' = 0,$$

y sustituyendo el valor de $y - \beta$, resulta para y''' el valor:

$$\frac{3\,y'\,y''^2}{1+y'^2},$$

que es el mismo valor que resulta en el vértice de la curva; luego: *En los vértices de una curva el contacto con su circunferencia osculatriz es de orden superior al segundo* (§ 38-8, *b*).

8. **Evoluta.** — *a*) Se llama *evoluta* de una curva C, al lugar Γ de los centros de sus circunferencias osculatrices. La curva dada se llama *evolvente* de Γ. Tomando x como parámetro, las ecuaciones [40-16] dan paramétricamente las coordenadas, α, β, de los puntos de la evoluta. Dividiendo la primera por la segunda resulta $(y-\beta)/(x-\alpha) = -1/y'$, es decir, el punto (α, β) está sobre la normal a la curva, como ya sabíamos, por tener ésta y su circunferencia osculatriz la misma tangente, a la que es normal el radio que determina su punto de contacto. El coeficiente angular de la tangente a la evoluta viene dado por:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{y' + D_x\dfrac{1+y'^2}{y''}}{1 - y''\dfrac{1+y'^2}{y''} - y'\,D_x\dfrac{1+y'^2}{y''}} =$$

$$= \frac{y' + D_x\dfrac{1+y'^2}{y''}}{-y'\left(y' + D_x\dfrac{1+y'^2}{y''}\right)} = -\frac{1}{y'},$$

que coincide con el de la normal a la curva. Por lo tanto, *las normales a la evolvente son las tangentes a la evoluta.* Veremos en el volumen II (§ 74-1, *b*) que dada una familia de líneas dependientes de un parámetro, si existe una curva tal que en cada uno de sus puntos es tangente a una línea de la familia, dicha curva se llama *envolvente* de la familia.

Así, pues, acabamos de probar que la *evoluta* es *envolvente* de la familia de normales trazadas en cada uno de los puntos de su *evolvente*.

b) Si la curva está dada en forma paramétrica, sustituyendo en [40-16] las expresiones [40-18] y [40-19] de y' e y'' resultan las ecuaciones paramétricas de la evoluta en la forma:

$$[55\text{-}18] \qquad \alpha = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, \qquad \beta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''},$$

que también pueden escribirse, haciendo figurar el radio de curvatura:

$$[55\text{-}19] \qquad \alpha = x - \rho\, y'(x'^2 + y'^2)^{1/2} \qquad \beta = y + \rho\, x'(x'^2 + y'^2)^{-1/2}.$$

Ejemplo: En la cicloide

$$x = t - \operatorname{sen} t, \qquad y = 1 - \cos t,$$

las ecuaciones de la evoluta son, por [55-18]:

$$\alpha = t + \operatorname{sen} t, \qquad \beta = -1 + \cos t.$$

Con el cambio de parámetro $\tau = t - \pi$, se obtienen las ecuaciones:

$$\alpha - \pi = \tau - \operatorname{sen} \tau, \qquad \beta + 2 = 1 - \cos \tau,$$

que prueban que la evoluta es también una cicloide, obtenida de la cicloide dada por traslación.

c) Usando como parámetro la abscisa curvilínea s, se tiene:

$$[55\text{-}20] \qquad x'^2 + y'^2 = 1, \qquad x'x'' + y'y'' = 0,$$

y entonces [55-19] se escribe:

$$[55\text{-}21] \qquad \alpha = x - \rho\, y', \qquad \beta = y + \rho\, x'.$$

Como en virtud de [55-20], la expresión de la curvatura (§ 40-6) se reduce a $1/\rho = y''/x' = -x''/y'$, de donde $\rho\, y'' = x'$, $\rho\, x'' = -y'$, resulta de [55-21]:

$$[55\text{-}22] \qquad \alpha' = -\rho' y', \qquad \beta' = \rho' x'.$$

Si ahora indicamos con σ la *abscisa curvilínea sobre la evoluta*, tendremos:

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \sigma'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2,$$

y por [55-22] y [55-20]:

$$[55\text{-}23] \qquad \sigma'^2 = \rho'^2;$$

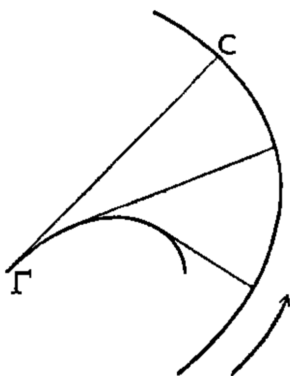


Fig. 167.

de modo que si ρ' no cambia de signo y elegimos convenientemente el sentido en la abscisa curvilínea σ, tendremos $\sigma' = \rho'$, e integrando, $\sigma_2 - \sigma_1 = \rho_2 - \rho_1$: *la longitud de un arco de evoluta entre dos puntos es igual al valor absoluto de la diferencia entre los correspondientes radios de curvatura, siempre que ρ' no cambie de signo en el arco.*

Esta propiedad permite efectuar una construcción mecánica de evolventes de una línea Γ: si imaginamos un hilo inextensible, arrollado sobre la curva Γ y prolongado tangencialmente a ella, entonces al desarrollar el hilo, un punto de su prolongación describe una curva C (fig. 167) evolvente (lat. *evolvere*: desarrollar). Tomando diferentes puntos del hilo, se obtienen las infinitas evolventes de una curva Γ, considerada como evoluta.

9. Variación total y longitud. — *a) Variación total.* — a_1) Íntimamente ligado con el concepto de longitud de un arco está el de *variacion total* de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Dividido éste por los puntos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

llamemos $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., a los valores correspondientes.

DEF.: Variación total de $f(x)$ en $[a, b]$ es el extremo superior de las sumas $\Sigma\,|\,\Delta y\,|$ correspondientes a las diversas particiones de $[a, b]$ por puntos intermedios. Cuando estas sumas están acotadas, la variación es finita, y en caso contrario es infinita. En el primer caso diremos también: *función de variación acotada.*

Obsérvese que:

[55-24]
$$\Sigma\,\Delta y = (y_1 - y_0) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) = f(b) - f(a),$$

pues los incrementos se suman con sus signos.

En cambio, por la regla del valor absoluto:

[55-25] $$|\,f(b) - f(a)\,| \leqq \Sigma\,|\,\Delta y\,|$$

y solamente vale el signo = cuando la función es monótona. Estas sumas $\Sigma\,|\,\Delta y\,|$, están acotadas inferiormente, pues son positivas; y su extremo superior finito ó $+\infty$, que hemos llamado *variación total,* se designa así:

$$V_a^b\,f(x)$$

EJEMPLO: La misma demostración dada en § 55-1, ej. 3, prueba que para la función $x \cos \pi/x$ es infinita la variación en [0, 2] y en todo intervalo que contenga el origen. Lo mismo ocurre para $x^2 \cos(\pi/x^2)$ que es continua y derivable en $x = 0$, supuesta nula en este punto. Sin embargo, la derivada no es continua ni acotada (nota 1).

a_2) Si en la suma $\Sigma\,|\,\Delta y\,|$, cuyo extremo superior es V_a^b, se consideran solamente los intervalos en que es $\Delta y > 0$ y es P_n su suma, o solamente aquellos donde $\Delta y < 0$, y es N_n su suma, resulta:

[55-26] $$\Sigma\,\Delta y = P_n - N_n = f(b) - f(a), \quad \Sigma\,|\,\Delta y\,| = P_n + N_n.$$

Los extremos superiores P y N de las sumas P_n y N_n se llaman *variación positiva* y *variación negativa.* Veremos en nota I, que tanto éstas como la variación total son los límites de las respectivas sumas, al tender a cero la norma δ de la partición; resulta entonces de [55-26]:

[55-27] $$f(b) - f(a) = P - N, \quad V_a^b\,f(x) = P + N.$$

b) Criterio de JORDAN. — Con objeto de ver la íntima conexión entre longitud y variación total, vamos a referirnos, para fijar las ideas, a curvas planas, y utilizando afijos complejos $z = x + i\,y$ para los puntos de la curva, se tiene esta acotación:

$$|\,\Delta x\,| \leqq |\,\Delta z\,| \leqq |\,\Delta x\,| + |\,\Delta y\,|.$$
$$\Sigma\,|\,\Delta x\,| \leqq \Sigma\,|\,\Delta z\,| \leqq \Sigma\,|\,\Delta x\,| + \Sigma\,|\,\Delta y\,|;$$

análogamente si en el primer miembro se pone $\Sigma \mid \Delta y \mid$; luego, $\Sigma \mid \Delta z \mid$ está acotada si lo están $\Sigma \mid \Delta x \mid$, $\Sigma \mid \Delta y \mid$, y recíprocamente, es decir:

TEOR.: *Son rectificables las curvas definidas por funciones continuas de variación acotada, y sólo ellas.*

En particular, son rectificables las curvas definidas por una función monótona (por ejemplo, la curva de CANTOR, Cap. IX, nota VI-b), o por dos funciones que son monótonas en intervalos parciales del $[a, b]$ en número finito.

NOTAS: 1. Las curvas con tangente continua en el intervalo *cerrado* $[a, b]$ cumplen el criterio de JORDAN, pues puede aplicarse el teorema del incremento finito (§ 35-1) para establecer, por ejemplo:

$$\Sigma \mid \Delta y \mid \leqslant \{\text{Máx} \mid y'(t) \mid\} \cdot (b - a), \quad \text{para} \quad t \in [a, b],$$

existiendo el máximo de $y'(t)$ en $[a, b]$, según vimos (§ 26-5).

2. El criterio de JORDAN, aplicable a clases de curvas más amplias que las estudiadas en § 55-1, *c*, justifica se amplíe el concepto de integral como ha realizado LEBESGUE (ver Cap. XXIV), y es ésta una de sus importantes aplicaciones.

c) Propiedades de la variación y de la longitud. — Son inmediatas las siguientes:

1ª *La variación total es positiva, excepto si* $f(x) = \text{const.}$, *en cuyo caso es nula.*

2ª Si $a < b < c$, es $V_a^b f(x) + V_b^c f(x) = V_a^c f(x)$.

Porque adoptando b como punto de división, la suma $\Sigma \mid \Delta y \mid$ sobre $[a, c]$ es la suma de las correspondientes a $[a, b]$ y $[b, c]$, y su extremo superior, con b por punto de subdivisión, es la suma de los extremos de éstas; por lo tanto, $V_a^c \geqslant V_a^b + V_b^c$. Por otra parte, a cada partición de $[a, c]$ corresponden otras dos de $[a, b]$ y $[b, c]$, obtenidas agregando el punto b, de manera que $\Sigma \mid \Delta y \mid$ sobre $[a, c]$ no es superior a la suma de las correspondientes a $[a, b]$ y $[b, c]$, y por lo tanto, $V_a^c \leqslant V_a^b + V_b^c$. De ambas relaciones opuestas se deduce la igualdad que queríamos demostrar.

3ª *Si el intervalo* $[c, d]$ *forma parte del* $[a, b]$, *es:*

$$V_c^d f(x) \leqq V_a^b f(x).$$

Todas estas relaciones subsisten para la longitud $L_a^b f(x)$, pues las propiedades del valor absoluto valen en el campo complejo, y es $L_a^b f(x) = \text{extr sup} \Sigma \mid \Delta z \mid = V_a^b z(x)$ para la función compleja de variable real $z(x) = x + i f(x)$. La longitud sólo es nula cuando la curva se reduce a un punto pues sólo entonces es $z(x) = x + i f(x) = \text{cte.}$, al no variar x, y se aplica 1ª.

No sucede lo mismo con la siguiente:

4ª $\qquad V_a^b [f(x) + g(x)] \leqq V_a^b f(x) + V_a^b g(x)$,

porque siendo $\Delta [f + g] = \Delta f + \Delta g$, es:

$$\mid \Delta [f + g] \mid \leqq \mid \Delta f \mid + \mid \Delta g \mid,$$

y la misma relación subsiste entre los extremos superiores de sus sumas.

De $\mid \Delta(z_1 + z_2) \mid \leqslant \mid \Delta z_1 \mid + \mid \Delta z_2 \mid$ resulta la desigualdad análoga (STEINER):

[55-28]
$$V_a^b[z_1 + z_2] \leqslant V_a^b z_1 + V_a^b z_2$$
$$L_a^b(z_1 + z_2) \leqslant L_a^b z_1 + L_a^b z_2,$$

donde z_1 y z_2 son los afijos complejos de las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, correspondientes a un mismo x:

[55-29]
$$z_1(x) = x + i\,f(x), \; z_2(x) = x + i\,g(x).$$

La desigualdad [55-28] implica que la curva "promedio", $y = \frac{1}{2}[f(x) + g(x)]$, tiene una longitud que no supera a la media aritmética de las longitudes de las curvas dadas, por lo que se dice que la longitud goza de la propiedad de *convexidad*. En efecto, $V_a^b(z_1 + z_2) = V_a^b\{2x + i[f(x) + g(x)]\} = 2V_a^b\{x + i\,\frac{f+g}{2}\} = 2L_a^b\,\frac{f+g}{2} \leqslant V_a^b z_1 + V_a^b z_2 = L_a^b f(x) + L_a^b g(x)$. La desigualdad de Steiner tiene implicaciones notables e interesantes; además, una de las causas de las dificultades que se presentan en el caso del área de las superficies alabeadas, se debe a que en ella no subsiste dicha propiedad.

d) *Descomposición de* Jordan. — Si se fija a haciendo variar el extremo x, resultan para la longitud y las variaciones positiva, negativa y total, funciones de x que designamos así:
$$L(x), \quad P(x), \quad N(x), \quad V(x),$$
respecto de una misma función $f(x)$. Como las cuatro son mayores o iguales que cero, resulta, de la aditividad respecto del intervalo *, que son crecientes en sentido amplio.

Las descomposiciones [55-27] adoptan ahora esta forma:
$$f(x) = f(a) + P(x) - N(x), \quad V(x) = P(x) + N(x),$$
y resulta:

Teor.: *Toda función de variación acotada es diferencia de dos funciones crecientes.*

Recíprocamente, si es $f(x)$ diferencia de dos funciones crecientes, como éstas son de variación acotada:
$$\Sigma\,|\Delta\varphi| = \Sigma\,\Delta\varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$$
$$\Sigma\,|\Delta\psi| = \Sigma\,\Delta\psi = \psi(b) - \psi(a),$$
lo es aquélla según *c*, 4ª.

Los dos conceptos: *función de variación acotada* y *diferencia de funciones crecientes* son, por lo tanto, idénticos.

Si se quiere que éstas sean crecientes en sentido estricto, basta sumar a las anteriores $P(x) + f(a)$ y $N(x)$ una misma función de este tipo; por ejemplo: x, $2x$, etc.

Ejercicios

1. Diferencial de arco y longitud de arco para $0 \leqslant x \leqslant a$, en la parábola semicúbica $y^2 = x^3$.

2. Diferencial de arco y longitud de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (§ 23-9 y fig. 45).

3. Ecuaciones paramétricas y longitud de arco de la curva llamada *epicicloide*, engendrada por un punto de una circunferencia de radio b que rueda sobre otra de radio B de su plano, siendo tangente exterior a

* No son, en cambio, aditivas *respecto de la función*, por ejemplo, si es $f(x) = g(x) + h(x)$, la longitud no es la suma de longitudes. Basta fijarse en un caso simple: $g = h = x$; el segmento de recta $y = 2x$ no es el doble del $y = x$ para el mismo intervalo $[a, b]$.

ella. Verificar que para $B = b = \frac{1}{2} a$ se obtiene la cardioide (cfr. ejercicio 3 de § 54).

4. Probar que (§ 55-3, b): $$E(\text{arc sen } z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 \zeta^2}{1 - \zeta^2}} d\zeta,$$

y que en consecuencia es combinación lineal de las integrales primeramente dadas por LEGENDRE, con coeficientes 1, $-k^2$.

5. Expresar, mediante una integral elíptica completa $K(\pi/2, k)$, la duración periódica T de una oscilación pendular de amplitud $2\theta_0$:

$$T = 2\sqrt{2\,l/g} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

6. Poniendo la ecuación de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ en la forma paramétrica $x = a/\text{sen}\, t$, $y = b/\text{tg}\, t$, hallar para la longitud de un arco entre un vértice ($t = \pi/2$; $x = a$, $y = 0$) y un punto de parámetro $t = \theta$:

$$s = \int_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2} \frac{dt}{\text{sen}^2 t},$$

y expresarla, mediante una integración por partes, en términos de las integrales K y E (§ 55-3, b).

7. Comprobar que la integral elíptica de primera especie (§ 55-3, b) es finita y determinada para todo valor de z, incluso para $z = \infty$, $z = \pm 1$, $z = \pm 1/k$, y obsérvese que en consecuencia define una trascendente nueva. ¿Se conserva también finita la integral elíptica de segunda especie para $z = \infty$?

8. Longitud de la espiral de ARQUÍMEDES $r = a\varphi$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0)$.

9. En la parábola $y^2 = 4px$: a) Calcular el radio de curvatura y probar que es igual al doble del segmento de normal entre el punto y la directriz $x = -p$; b) Hallar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de la evoluta.

10. Radio de curvatura, y basándose en él, puntos de inflexión de la curva *versiera* $y = (1 + x^2)^{-1}$.

11. Expresar el radio de curvatura y la evoluta de la elipse [hipérbola] $(x^2/a^2) \pm (y^2/b^2) = 1$ en términos del semieje mayor [transverso] a y la excentricidad $e = c/a = \sqrt{a^2 \mp b^2}/a$.

12. Probar que para una curva en coordenadas polares, las ecuaciones paramétricas (cartesianas) de la evoluta son:

$$\alpha = \frac{r(r'^2 - r r'')\cos\varphi - r'(r^2 + r'^2)\,\text{sen}\,\varphi}{r^2 + 2r'^2 - r r''}$$

$$\beta = \frac{r(r'^2 - r r'')\,\text{sen}\,\varphi + r'(r^2 + r'^2)\cos\varphi}{r^2 + 2r'^2 - r r''}.$$

13. a) Aplicando el ejercicio anterior, hallar la evoluta de la espiral logarítmica $r = a e^{m\varphi}$; b) hallar su ecuación en coordenadas polares, y probar así que es una espiral igual a la dada y con el mismo polo.

14. Probar que las ecuaciones paramétricas de una evolvente a una curva $\{\alpha(t), \beta(t)\}$ son:

$$x = \alpha - \rho\,\alpha'/\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} \qquad y = \beta - \rho\,\beta'/\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} \quad \text{con}$$

$$\rho = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}\, d\tau + C.$$

15. Del resultado anterior: *a*) Obtener la evolvente a la circunferencia $\alpha = a \cos t$, $\beta = a \operatorname{sen} t$; trazada a partir del punto $(a, 0)$; *b*) encontrar la longitud de arco de dicha evolvente para $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

16. Aplicando el teorema de § 55-9, *d*, probar que la suma, diferencia y producto de dos funciones de variación acotada son también de variación acotada.

17. Probar que si $|f(x)| \geqslant \mu > 0$, y es V la variación total de $f(x)$, la de $1/f(x)$ es $\leqslant V/\mu^2$.

18. Probar que toda función continua de variación acotada es diferencia de dos funciones continuas crecientes.

19. Hallar las variaciones positiva P, negativa N, y total V, de $\operatorname{sen} 2\pi x + \cos 2\pi x$, y de $x \operatorname{sen} 1/x$ en $[0; 1]$.

20. Si $f(x)$ es de variación acotada en $[a, b]$, también lo es $|f(x)|$. ¿Es cierto el recíproco? Cfr. § 54-1, nota 2.

21. La función $f(x)$ satisface la condición de Lipschitz (Lip α) cuando $|f(x+h) - f(x)| = O(|h|^{\alpha})$, para $h \to 0$, $(0 < \alpha \leqslant 1)$.
Probar que si $f(x)$ satisface (Lip 1), es de variación acotada. Obsérvese que si $f(x)$ satisface (Lip α) con $\alpha > 1$, se reduce a una constante (cfr. § 35-3).

22. Probar que la función integral $f(x) = \int_a^x g(x)\, dx$ de una función integrable $g(x)$, es de variación acotada, y $V_a^b f(x) = \int_a^b |g(x)|\, dx$,

$$P = \int_a^b g_1(x)\, dx, \quad N = \int_a^b g_2(x)\, dx, \quad \text{siendo:}$$

$$g_1(x) = \text{máx}\,[g(x); 0] = \tfrac{1}{2}\,(|g(x)| + g(x));$$
$$g_2(x) = -\min\,[g(x); 0] = \tfrac{1}{2}\,(|g(x)| - g(x)).$$

§ 56. Aplicaciones físicas

1. **Trabajo en un desplazamiento rectilíneo.** — *a*) *Fuerza constante.* — Si un punto sobre el cual actúa una fuerza constante, representada por el vector **F**, se desplaza sobre un eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$, y llamamos F al módulo de **F**, φ al ángulo con el *eje* x, y $F_1 = F \cos \varphi$ a la proyección de la fuerza sobre el *eje* x, el *trabajo de la fuerza* es, en valor y signo:

[56-1] $$T = (b - a) . F_1 = (b - a) F \cos \varphi,$$

y puede representarse geométricamente por el área orientada de un rectángulo $a\, b$ B A (fig. 168). ¿Cuándo es T nulo?

b) *Fuerza variable.* — Si la fuerza varía de modo que su proyección $F_1 = f(x)$ es una función continua (o por lo menos integrable) de la abscisa x, el trabajo se define por un paso al límite en la siguiente forma: Si consideramos una partición del intervalo $[a, b]$, y en cada subintervalo δ_i un punto ξ_i, e

imaginamos que en δ_i la proyección de la fuerza es constante e igual a $f(\xi_i)$, el trabajo estará dado por:

[56-2] $$\Sigma f(\xi_i)\, \delta_i;$$

geométricamente, como suma de rectángulos. Entonces es ade-

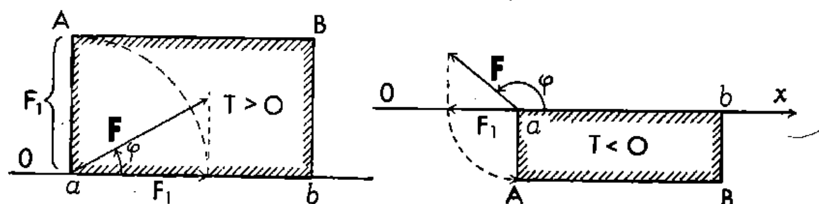


Fig. 168.

cuado llamar *trabajo de la fuerza variable* **F** al límite de [56-2], es decir, a la integral

[56-3] $$T = \int_a^b f(x)\, d\, x,$$

representada geométricamente por el área *orientada* $a\, b$ B A (figura 169).

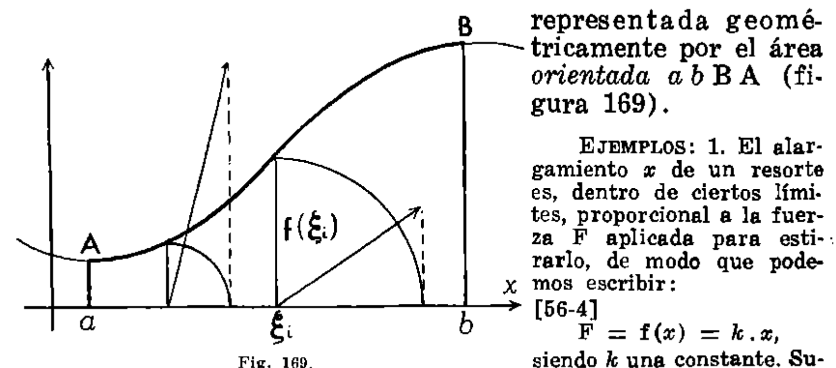


Fig. 169.

Ejemplos: 1. El alargamiento x de un resorte es, dentro de ciertos límites, proporcional a la fuerza F aplicada para estirarlo, de modo que podemos escribir:

[56-4] $$F = f(x) = k\,.\,x,$$

siendo k una constante. Supongamos que el resorte se ha estirado gradualmente hasta ser $x = 5$ cm para F = 20 Kg. Queremos calcular el trabajo realizado.

Ante todo, reemplazando en [56-4], se calcula la constante k:

$$20 = k\,.\,5 \quad \therefore \quad k = 4,$$

y entonces:

$$T = \int_0^5 f(x) d\, x = \int_0^5 4\, x\; d\, x = 50 \text{ kg . cm} = \tfrac{1}{2} \textbf{ kilográmetro.}$$

Demuéstrese que en las condiciones supuestas de proporcionalidad, si a la fuerza final F corresponde el alargamiento total a, el trabajo realizado vale $\frac{1}{2}$ F . a.

2. De acuerdo con la ley de gravitación de Newton, la atracción de una partícula fija en $x = 0$ sobre otra en x es:

$$F = f(x) = -\, k^2/x^2, \qquad (k = \text{const.}).$$

El trabajo de esta fuerza, cuando la segunda partícula se mueve desde $x = r$ hasta $x = r_1 > r$, es negativo e igual a:

[56-5] $$-\, k^2 \int_r^{r_1} \frac{d\, x}{x^2} = -\, k^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right),$$

de modo que será positivo el trabajo de la fuerza que ocasiona el desplazamiento. Su límite, para $r_1 \to \infty$, es k^2/r, y se llama *potencial mutuo* de las dos partículas: representa el trabajo necesario para separar las dos masas por completo, por ejemplo, el trabajo necesario para "arrancar" un electrón de un átomo (potencial de ionización) bajo la hipótesis newtoniana.

2. Trabajo de expansión de un gas. — Consideremos una masa de gas en un cilindro cerrado por un pistón de superficie S (fig. 170). Si llamamos p a la presión del gas (fuerza por unidad de superficie), la fuerza que actúa sobre el pistón es $F = p \cdot S$.

Si el pistón sufre un desplazamiento dx, el trabajo del gas al expandirse vale:

$$dT = F \cdot dx = p\,S\,dx = p\,dv,$$

pues el aumento del volumen es: $dv = S \cdot dx$.

Si el volumen aumenta desde v_0 hasta v_1, el trabajo del gas es:

$$T = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv.$$

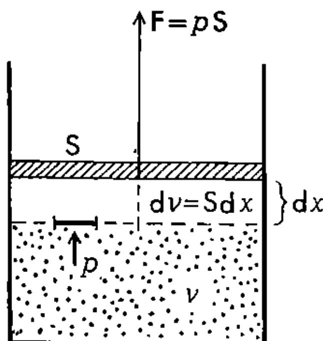


Fig. 170.

Si la expansión se ha realizado en determinadas condiciones físicas ideales, las leyes de los gases permiten expresar p en función de v, y calcular la integral.

EJEMPLOS: 1. *Expansión isotérmica.* Si se trata de un gas ideal y se expande a temperatura constante (es decir, muy lentamente, para evitar que se enfríe), vale la ley de BOYLE - MARIOTTE:

$$p \cdot v = C \text{ (constante)},$$

y entonces:

$$T = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv = \int_{v_0}^{v_1} \frac{C}{v}\,dv = C\left(\ln v\right)_{v_0}^{v_1} = C \ln \frac{v_1}{v_0} = 2{,}30 \cdot C \cdot \lg \frac{v_1}{v_0}.$$

2. *Expansión isobárica.* Si el gas se expande a presión constante (por ej., colocando un peso fijo sobre el émbolo y un mechero encendido debajo del cilindro), es:

$$p = p_0 \text{ (constante)}$$

y entonces:

$$T = \int_{v_0}^{v_1} p_0\,dv = p_0(v_1 - v_0).$$

3. *Expansión adiabática.* Si el gas se expande sin intercambio de calor con el exterior (es decir, muy rápidamente) vale la ley de POISSON:

$$p \cdot v^k = c \text{ (constante)},$$

siendo $k = c_p/c_v > 1$, una constante. Entonces:

$$T = c\int_{v_0}^{v_1} \frac{d\,v}{v^k} = c\left(\frac{v^{1-k}}{1-k}\right)_{v_0}^{v_1} = \frac{c}{k-1}\left(\frac{1}{v_0^{k-1}} - \frac{1}{v_1^{k-1}}\right),$$

y como $c = p_0 v_0 . v_0^{k-1}$, se tiene:

$$T = \frac{p_0 v_0}{k-1}\left(1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}\right).$$

3. Medias cuadráticas. — De igual modo que el promedio de n números se generaliza para infinitos mediante la expresión cartesiana del área (§ 48-6, *b*), el promedio de cuadrados (importante en teoría de errores) se interpreta en coordenadas polares.

Puesto que por la expresión del área en coordenadas polares (§ 54-2) es:

$$2\,A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2\, d\,\varphi = \lim \Sigma\, f(\xi)^2 \Delta\,\varphi,$$

si los radios se toman equidistantes, es decir, si el intervalo $\varphi_1 - \varphi_0$ se divide en n partes *iguales*: $\Delta\varphi = (\varphi_1 - \varphi_0) : n$, la suma anterior es el producto de la amplitud $\varphi_1 - \varphi_0$ del intervalo angular por la fracción $\Sigma(f(\xi))^2 : n$, que es la media aritmética de los cuadrados de los radios elegidos arbitrariamente en cada intervalo, y la raíz cuadrada de su límite se llama *media cuadrática* de la función $f(\varphi)$. Por lo tanto: llamando σ a la media cuadrática, tendremos, independientemente de las coordenadas en que se la interprete:

[56-6] $$\sigma^2 = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} f(t)^2\, d\,t,$$

es decir: la media cuadrática de una función es la raíz del cociente de la integral de su cuadrado por el intervalo.

Gráficamente se determinará, pues, fácilmente, la media cuadrática de cualquier función, representándola en coordenadas polares, y midiendo con un planímetro o gráficamente el área del sector obtenido. Su duplo, dividido por el ángulo o intervalo, es el cuadrado del valor medio cuadrático en el intervalo considerado.

EJEMPLOS: 1. En Electrotécnica, sobre todo, tiene interés capital la determinación de la media cuadrática de las intensidades de una corriente en toda una onda; su valor se llama también *valor eficaz* de la corriente.

Sea, por ejemplo, la corriente alterna dada por esta tabla (ROSE):

$t'' = 0$	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008
$i = 5$	8	12	7	0	-6	$-8{,}3$	-3	5

Dibujada la gráfica polar tomando t como ángulo, con unidad adecuada (p. ej., $20° = 0{,}001''$), y para i un centímetro por unidad, el área de la gráfica resulta ser 67,7 cm², y como el intervalo medido en radios vale $160° = 2{,}79$, resulta:

$$\text{Valor eficaz} = \sqrt{2 \times 67{,}7/2{,}79} = 6{,}97$$

El cociente del valor eficaz por el valor máximo se llama *eficacia*.

2. La potencia luminosa de una lámpara de arco varía según la inclinación del rayo respecto de la horizontal, es decir, es función de la altura angular φ, pero no depende del azimut λ. Basta, pues, construir la gráfica polar de la potencia en su plano vertical, y hacerla girar alrededor de la vertical, para tener la superficie de revolución que representa la potencia en cualquier dirección, mediante el radio vector correspondiente.

Constrúyase, por ejemplo, el diagrama polar con los datos siguientes (ROSE), llamando φ a la altura angular:

$\varphi = 8°$ 10° 20° 30° 40° 50° 60° 70° 80° 90°,

potencia en bujías:

1000 1470 1800 1720 1200 960 800 720 600 480.

Siendo la iluminación que recibe una superficie el producto de ésta por la potencia, si trazamos una superficie esférica de radio r, con centro en la lámpara, cada elemento superficial d S recibe una iluminación P . d S, y siendo constante φ, y por lo tanto también P en cada zona esférica, podemos efectuar la integración por zonas esféricas de área $2\pi\, r \cos\varphi\, \mathrm{d}s = 2\pi\, r\, \mathrm{d}z$. Entonces, la iluminación total es:

[56-7] $$2\pi\, r \int_{-r}^{r} \mathrm{P}\, \mathrm{d}z$$

efectuando la integración por zonas esféricas.

El cálculo práctico puede hacerse reduciendo la gráfica polar a cartesiana, es decir: dibujada una semicircunferencia de centro O en la lámpara, limitada por el diámetro vertical, los puntos que en ella determinan los radios vectores se proyectan sobre dicho diámetro (o sobre una paralela) y se llevan como ordenadas los valores P dados. El área de la curva así obtenida es:

$$\int_{-r}^{r} \mathrm{P}\, \mathrm{d}z.$$

La altura media P_0 de esta curva resulta de dividir esta área por la base $2r$, y este valor medio, P_0, se llama potencia luminosa media, es decir:

$$2r\, \mathrm{P}_0 = \int_{-r}^{r} \mathrm{P}\, \mathrm{d}z.$$

Una lámpara colocada en el mismo punto, cuya potencia fuera P_0 en todas direcciones, proyectaría sobre la superficie esférica de radio r una iluminación igual a:

$$4\pi\, r^2 . \mathrm{P}_0 = 2r\, \mathrm{P}_0 . 2\pi\, r,$$

expresión idéntica a la iluminación total [56-7] recibida de la lámpara estudiada.

Este método, que nada nuevo contiene respecto del modo de calcular valores medios (§ 48-6), suele llamarse ampulosamente *diagrama de* ROUSSEAU.

EJERCICIOS

1. En el intervalo (1 m, 3 m) del eje x, un punto móvil ha cumplido un ciclo actuando una fuerza paralela al eje x de $(30\,x)$ kg al desplazarse en sentido positivo, y otra de $(15\,x^2 - 30\,x + 45)$ kg al hacerlo en sentido contrario. Calcular el trabajo y hacer un diagrama del ciclo.

2. Probar que el trabajo necesario para desalojar por arriba un líquido de peso específico p, del recipiente engendrado al girar alrededor del eje x (vertical hacia arriba), por el arco $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, siendo

$f(x) > 0$ y continua, es $T = p\pi \int_a^b (b-x)\, f^2(x)\, dx$.

3. Con el resultado anterior, calcular el trabajo necesario para bombear el agua ($p = 1\,000$ kg/m³) que llena un tanque hemisférico de 10 m de radio.

4. Expresar el trabajo de un gas que cumple la ecuación de VAN DER WAALS $(p + (a/v^2)) \cdot (v - b) = n\,R\,T$, en una dilatación isotérmica.

5. Calcúlense los valores medio (§ 48-6, *b*) y eficaz de una función sinusoidal $y = \operatorname{sen} t$ en la semionda $0 \leqq t \leqq \pi$.

6. Calcular la media cuadrática de la función periódica:

$$y = a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t + a_2 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt \text{ en el período } 2\pi.$$

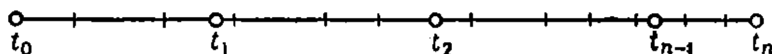
NOTAS AL CAPÍTULO XV

I. **Convergencia según la norma.** — *a*) Sea L la longitud finita de un arco, es decir, $L = \text{extr sup } s_n$, siendo s_n los perímetros de las quebradas inscritas, y elijamos una que dé (indicando con z_i los afijos complejos de los vértices):

$$s_n = |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \ldots + |z_n - z_{n-1}| > L - \varepsilon;$$

tal partición π_n del intervalo $[a, b]$ por los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, existe por definición de extremo superior. Consideremos ahora particiones π, tales que las quebradas inscritas correspondientes tengan sus lados inferiores al número $\varepsilon/2n$; esto es posible en virtud del teorema de HEINE-CANTOR sobre la continuidad (§ 26-6), pues siendo $|\Delta z| < |\Delta x| + |\Delta y|$, basta adoptar la norma de la partición suficientemente pequeña para que sea $|\Delta z| < \varepsilon/2n$.

Si π_m es una de esas particiones, y suponemos que contiene todos los puntos de π_n (partición *posterior*, § 48-3, *a*), es decir, si la nueva quebrada conserva los vértices de la anterior, será $s_m \geqslant s_n$, pues cada cuerda de aquélla es menor o igual que la suma de cuerdas que la reemplazan; y por lo tanto será: $s_m > L - \varepsilon$; pero, en general, no sucederá esto, sino que los $n - 1$ puntos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ quedarán contenidos en sendos inter· los de π_m *.



Ahora bien: si a los puntos de π_m agregamos los de π_n, se obtiene una partición π'_p posterior a ambas, y resulta una suma $s'_p > s_m$, pues cada uno de los $n - 1$ sumandos, correspondientes a los intervalos en que están $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, se ha sustituído por la suma de dos; pero como estos sumandos son menores que $\varepsilon/2n$, este aumento es inferior a $2n\,\varepsilon/2n = \varepsilon$; es decir, s_m difiere de s'_p en menos de ε; y como s'_p (suma posterior a s_n) difiere de L en menos de ε, la diferencia entre s_m y L es menor que 2ε. Por lo tanto:

TEOR.: *La longitud de un arco definido en el intervalo* $[a, b]$ *es el límite de los perímetros de las quebradas inscriptas correspondientes a las particiones del intervalo* $[a, b]$ *al tender a 0 su norma.*

Es decir, dado $\varepsilon > 0$, es $L - s < \varepsilon$ para todas las particiones de norma $\delta < \delta_0$, siendo δ_0 un número que depende de ε.

* En la figura es $n = 4$, y los puntos de la partición π_n están destacados respecto de los de π_m.

Observaciones: 1. Conviene interpretar geométricamente el razonamiento, dibujando un arco y las tres quebradas, como indica la figura 171 (donde se omiten las dos cuerdas que sustituyen a la que corresponde a cada vértice A_i), y siguiendo en ella toda la demostración.

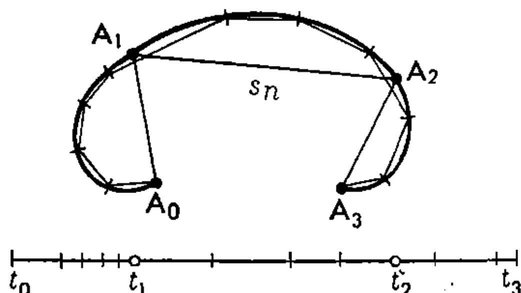


Fig. 171.

2. Si solamente se impone la condición de que los lados o cuerdas tiendan a cero, puede resultar un límite distinto de la longitud L. Basta fijarse en el ejemplo de la figura 172, donde a t_1 y a $t_2 > t_1$ corresponde un mismo punto. Los perímetros de las poligonales inscritas con vértice en ese punto indicadas en la figura 172, no convergen hacia L, por ser $(t_3 - t_0)/3$ la norma de las particiones.

Se puede completar esa condición insuficiente exigiendo que los *diámetros* de los arcos tiendan a 0; se llama diámetro d al extremo superior de las distancias entre cada par de puntos. Resulta, entonces, el teorema de Scheeffer:

$$s_n \to L \quad \text{para} \quad d \to 0.$$

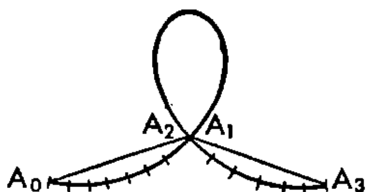


Fig. 172.

b) *Generalización y lema de* Darboux. — Lo esencial del teorema *a*) es esto:

1º A cada intervalo $[x_r, x_{r+1}]$ corresponde un número.

2º Esta *función de intervalo* F(I) *es sub-aditiva*, es decir: si:

$$I = I_1 + I_2, \quad \text{es} \quad F(I) \leqslant F(I_1) + F(I_2).$$

3º Si el intervalo I tiende a 0. también F(I).

De estas hipótesis resulta: Si es $L = \text{extr sup} \, \Sigma \, F(I_r)$ y L_δ una suma cualquiera correspondiente a una partición de norma δ, se verifica:

$$\lim. L_\delta = L \qquad \text{para} \qquad \delta \to 0.$$

Como corolario inmediato resulta el lema de Darboux:

La integral de $f(x)$ *en* $[a, b]$ *es el límite de las sumas* $\Sigma f(\dot{x}_r) \Delta x$, *cualquiera sea la partición adoptada y el punto elegido en cada intervalo, al tender a* 0 *la norma de la partición.*

Es decir, elegido un número $\varepsilon > 0$, la diferencia entre dichas sumas y la integral es menor que ε para todas las particiones de norma menor que un cierto número δ.

c) *Continuidad de la longitud.* — La longitud es una función creciente de t, pues el incremento correspondiente al intervalo $[t, t + h]$ es la longitud del arco correspondiente, que es positiva. Veamos ahora que eligiendo h suficientemente pequeño, este incremento del arco es menor que cualquier número positivo; es decir:

La longitud del arco es función continua del parámetro t.

Hemos visto que eligiendo la norma de la partición inferior a un

cierto número δ, se logra que la diferencia entre el perímetro de la poligonal y la longitud L del arco definido en $[t, t_1]$ sea menor que ε. Es decir: $L - s_n < \varepsilon$.

Además, se consigue que todos los lados de dicha poligonal sean menores que ε; luego, llamando s'_{n-1} al perímetro que corresponde a la poligonal, excepto el primer lado, cuyos vértices corresponden a los valores t y $t+h$, como ambos perímetros difieren solamente en ese primer lado, será $s_n - s'_{n-1} < \varepsilon$.

Sumando ambas desigualdades, resulta: $L - s'_{n-1} < 2\,\varepsilon$, y con mayor razón $L - L' < 2\,\varepsilon$, siendo L' la longitud del arco que corresponde al intervalo $(t+h, t_1)$, o sea: la longitud del arco que corresponde al intervalo $(t, t+h)$ es $< 2\,\varepsilon$.

Llamando s a la longitud del arco cuyo origen corresponde a un origen fijo, t_0, y un extremo variable, t, resulta, por lo tanto, una función $s(t)$ creciente y continua. Habrá, pues, un valor t tal, que $s(t) = L/n$; es decir, se puede dividir el arco en n partes iguales.

d) *Variación positiva, negativa y total.* — Obsérvese que el concepto de variación total sólo difiere del concepto de longitud en que se suman las distancias $|\Delta y|$ entre los puntos del eje y, mientras que allí se sumaban las distancias $|\Delta z|$ entre los puntos de la gráfica cartesiana. Por lo tanto, si se adopta como representación de $y = f(x)$ la escala y en correspondencia con la escala x (equivalente a una gráfica cartesiana aplastada sobre el eje y), la variación total es la longitud del camino recorrido por el punto y al describir x el intervalo $[a, b]$.

El teorema (*a*) se enuncia así:

TEOR.: *La variación total* $V_a^b f(x)$ *es el límite de las variaciones correspondientes a las diversas particiones de* $[a, b]$, *al tender a cero su norma.*

La suma P_n (§ 55-9, a_2) resulta de asignar a cada intervalo $[x_r, x_{r+1}]$ el valor $\Delta y_r = y_{r+1} - y_r > 0$, o bien el valor 0 cuando el incremento sea negativo. Es ésta una función *subaditiva*, pues al intercalar otro punto x' entre x_r y x_{r+1}, si el valor $y' = f(x')$ es intermedio, resulta:

$$(y_{r+1} - y') + (y' - y_r) = y_{r+1} - y_r,$$

y si es y' mayor que ambos o menor que ambos, aparece una diferencia positiva mayor que $y_{r+1} - y_r$. Es entonces aplicable el teorema de *a*), y resulta:

TEOR.: *Las sumas* P_n *y* N_n (§ 55-9, a_2) *tienden hacia sus extremos superiores* P *y* N *al tender a cero la norma.*

II. **Principio de semicontinuidad inferior.** — La definición de longitud como extremo superior, dada en § 55-1, o como límite según la norma (nota I, *a*), son los procedimientos más conocidos para introducirla, haciéndolo *por abajo*, es decir, por las *cotas inferiores* $\Sigma|\Delta z|$, perímetros de las quebradas inscritas. Sin embargo, ninguna de estas dos definiciones es apta para ser generalizada directamente al concepto de área de una superficie alabeada mediante poliedrales inscritas, como probó, con un famoso ejemplo, H. A. SCHWARZ, según veremos en el volumen II (Cap. XXI, nota I).

Menos conocida es otra definición de longitud *por arriba*, es decir, por *cotas superiores*, que aplicada a superficies alabeadas ha servido a H. LEBESGUE para introducir rigurosamente el concepto de área de dichas superficies correlativamente al caso de las curvas.

La correspondencia entre las curvas $z = z(t)$ (z afijo complejo), definidas en el intervalo $a \leqslant t \leqslant b$, y los números $L_a^b z(t)$, determina una *funcional* (o función de línea) que es *semicontinua inferiormente* (Cap. VI, nota V), es decir, para toda sucesión de curvas, $z_n(t)$, que converja uniformemente a $z(t)$, lo que indicaremos con flecha y punto encima, así:

$$z_n(t) \dot{\to} z(t) \qquad \text{para} \qquad t \in [a, b];$$

se cumple:

[XV-1] $L_a^b z(t) \leqslant \liminf_m L_a^b z_m(t)$.

La propiedad [XV-1] se deduce al considerar que una vez *fijada* cualquier partición π, con quebrada $q(t)$ inscrita a $z(t)$ y $q_m(t)$ inscrita a $z_m(t)$, por ser $L_a^b q_m(t) \leqslant L_a^b z_m(t)$, se cumple:

$$L_a^b q(t) = \lim_{m \to \infty} L_a^b q_m(t) \leqslant \liminf_m L_a^b z_m(t).$$

Por ser π una partición fija, aunque arbitrariamente dada, de la anterior y la definición de § 55-1, se obtiene [XV-1], que establece el *principio de semicontinuidad inferior*, básico en la generalización de la teoría a las superficies. De ahí el teorema:

TEOR.: *La longitud de un arco definido en el intervalo* $[a, b]$ *viene dada por*:

[XV-2] $L_a^b z(t) = \operatorname{extr\,inf}_{q_m} \{ \liminf_m L_a^b q_m(t) \}$,

donde el extremo inferior se toma respecto a todas las sucesiones de quebradas $q_m(t)$ *no necesariamente inscritas, que tienden uniformemente a* $z(t)$ *en el intervalo* $[a, b]$:

[XV-3] $q_m(t) \to z(t)$ para $t \in [a, b]$.

En efecto, llamemos G al segundo miembro de [XV-2]; para una sucesión de quebradas inscritas con norma tendiendo a cero (nota I, *a*), se cumple [XV-3], y por la definición de § 55-1 queda $L_a^b z(t) \geqslant G$. Por otra parte, [XV-1] da $L_a^b z(t) \leqslant G$, que junto con la anterior demuestra [XV-2].

Esta fórmula [XV-2] nos dice que una quebrada *no necesariamente inscrita* que se adapte (con posibles superposiciones) a la curva $z(t)$, tiene una longitud límite que no puede ser inferior a la de la curva, es decir, los límites (inferiores) de dichas quebradas son *cotas superiores* de la longitud buscada.

III. **Bibliografía.** — 1. Casi todos los libros generales de Análisis tratan, con mayor o menor extensión, las aplicaciones geométricas, y algunos las aplicaciones físicas. En forma elemental tratan unas y otras GRANVILLE - SMITH, U. CISOTTI (citados en Cap. VI, nota VI-3) y J. REY PASTOR, *Cálculo infinitesimal* (citado en Cap. VI, nota VI-2). Una exposición muy adecuada, que constituye uno de los aspectos que la distinguen, trae la obra de R. COURANT citada en Capítulo VI, nota VI-2. Estas obras incluyen otras aplicaciones, tales como determinación de centros de gravedad, momentos de inercia, etc., que nosotros dejamos para tratar con más amplitud en el volumen II (§ 84).

2. Para rectificación de curvas, las obras anteriores se limitan a los aspectos más elementales; pueden verse, además, CH. - J. DE LA VALLÉE - POUSSIN (citado en Cap. VI, nota VI-4), J. REY PASTOR: *Elementos de la Teoría de funciones* (citado en Cap. VI, nota VI-2), y para un estudio más detenido, H. LEBESGUE (citado en Cap. XIII, nota V-3), así como las memorias monográficas a que su libro citado se refiere.

Una exposición moderna de carácter superior, basada en el principio de semicontinuidad inferior (nota II), trae la siguiente obra:

T. RADÓ: *Length and area.* (Amer. Math. Soc., Nueva York, 1948), cuyos resultados, conjuntamente con los recientes de la escuela italiana de L. CESARI, están resumidos en:

P. PI CALLEJA: *Longitud y área.* (Revista de la Fac. de C. Exactas de Tucumán, Serie A, 7, págs. 157-242, 1950).

3. Sobre integrales elípticas puede consultarse WHITTAKER y WATSON (citado en Cap. XI, nota IV-2), cuya segunda parte se ha completado y puesto al día en la obra siguiente, basada en parte en notas de-

jadas por H. BATEMAN y compiladas por el "*Staff of the* BATEMAN *manuscript project*":

A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER y F. G. TRICOMI: *Higher trascendental functions.* (Vol. I y II, 1953; vol. III, 1955; McGraw-Hill, Nueva York).

Esta obra se continúa, cubriendo un material inmenso, por las tablas:

A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER y F. G. TRICOMI: *Tables of integral transforms.* (2 vols., McGraw-Hill, Nueva York, 1954).

Una breve exposición sobre integrales elípticas y aplicaciones diversas da:

F. BOWMAN: *Introduction to elliptic functions with applications* (English Universities Press, Londres; Wiley, Nueva York, 1953).

Entre las muchas obras más elementales, dedicadas al tema, citemos la reciente:

P. BYRD y M. D. FRIEDMAN: *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists.* (Grundl. Math. Wiss., nº LXVII, Springer, Berlín, 1954).

El cálculo con esta clase de funciones se reduce al de las funciones elípticas de JACOBI, de las que faltaban tablas numéricas convenientes hasta la publicación del excelente manual:

L. M. MILNE-THOMSON: *Jacobian elliptic function tables. A guide to practical computation with elliptic functions and integrals together with tables of* $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $Z(u)$. (Dover, Nueva York, 1950).

Capítulo XVI

INTEGRACIÓN APROXIMADA

§ 57. Integración numérica

1. **Objeto del capítulo.** — No siempre una integral definida,

$$\text{[57-1]} \qquad A = \int_a^b f(x)\, dx,$$

se puede calcular por los métodos que hemos visto, es decir, directamente, como en § 48-4, o mejor, mediante la regla de Barrow (§ 50-2), cuando se puede hallar una primitiva (Cap. XIV). Puede ocurrir que la primitiva de $f(x)$ no exista o no figure entre las funciones que conocemos, o que sea difícil hallarla, o, finalmente, que el integrando $f(x)$ sea una función empírica (§ 23-2, d). Para estos casos existen métodos de *cálculo aproximado* del número [57-1], que serán tanto más ventajosos cuanto más simples sean los cálculos y cuanto menor sea el error que comporten, el que deberá acotarse en cada caso. Hay un gran número de métodos, de los cuales nos limitaremos a señalar los más útiles y elementales.

El número [57-1] mide un área orientada (§ 54-1, d), pero en § 58 veremos métodos gráficos para representarlo por un segmento, o más generalmente, para trazar la gráfica de una función integral (§ 50-1). Uno y otra se obtienen también mecánicamente, mediante ingeniosos aparatos, llamados planímetros e integradores (§ 59).

2. **Fórmula de los trapecios.** — Supondremos que en $[a, b]$ no cambia el sentido de la concavidad de la curva uniforme $y = f(x)$, que para fijar las ideas supondremos está dirigida *hacia abajo* (hacia $y < 0$).

Para una partición de $[a, b]$ en n intervalos iguales, de longitud $h = (b - a)/n$, las sumas (fig 173):

$$S_n = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$$
$$S_n' = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

dan valores aproximados de la integral [57-1], que representan sumas de rectángulos (contenidos y continentes, respectivamente, o al revés, si la función es monótona creciente o decreciente).

En general, se obtiene una aproximación mucho mejor considerando la semisuma:

[57-2] $$T_n = \frac{S_n + S_n'}{2} = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right),$$

que geométricamente representa la suma de trapecios inscritos señalada en la figura 173. En efecto, la semisuma de los dos

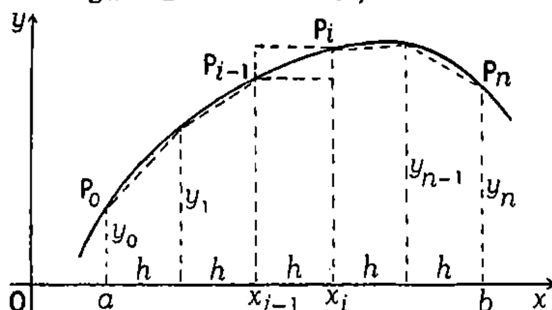


Fig. 173.

rectángulos correspondientes a cada intervalo parcial $[x_{i-1}, x_i]$ da el trapecio inscrito $x_{i-1}\, x_i\, P_i\, P_{i-1}$.

Obsérvese que si la concavidad se dirige hacia arriba, la suma de trapecios inscritos da área continente a la buscada.

EJEMPLO: Podemos calcular π evaluando la integral

[57-3] $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4},$$

por el método de los trapecios. Con $h = \frac{1}{4}$, de:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0{,}941 \quad y_2 = 0{,}8, \quad y_3 = 0{,}64, \quad y_4 = 0{,}5$$

exactos, salvo y_1, resulta:

$$\pi \sim 4 \,.\, 0{,}25\left(\frac{1{,}5}{2} + 2{,}381\right) = 3{,}131;$$

con $h = 0{,}1$ se obtendría $\pi \sim 3{,}139\,9$.

La fórmula de los trapecios [57-2] da poca aproximación, aun para h pequeño, pero es susceptible de un importante perfeccionamiento mediante la fórmula de EULER-MAC LAURIN (nota II).

Si $f(x)$ es monótona en $[a, b]$, el error cometido al aplicar [57-2] es (fig. 174) menor que la mitad de PQRS, con lo que se obtiene la cota *muy grosera*

$$\tfrac{1}{2} h\,[f(b) - f(a)].$$

En general, puede descomponerse el intervalo $[a, b]$ en varios, donde $f(x)$ es monótona.

3. **Método de Simpson.** — *a) Área bajo un arco de parábola.* — Para todo h menor que el radio de convergencia de

[57-4] $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

se tiene (§ 43-5, *b*):

$$\int_{-h}^{h} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots\right]_{-h}^{h} =$$

$$= 2\,a_0 h + \frac{2}{3}\,a_2 h^3 + \frac{2}{5}\,a_4 h^5 + \ldots$$

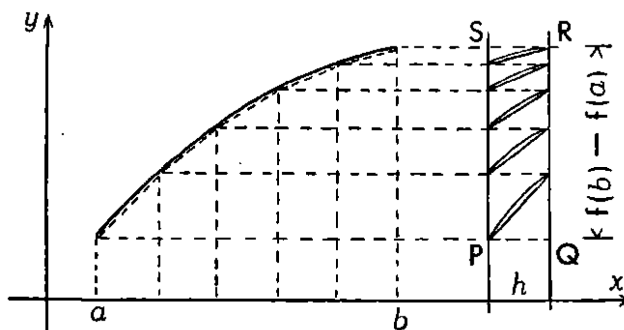


Fig. 174.

Si la curva $y = \mathrm{f}(x)$ fuese parábola de segundo grado, es decir, si el desarrollo sólo contuviese hasta el término de segundo grado, la expresión del área sería exactamente:

$$\mathrm{S} = \frac{h}{3}\,(6\,a_0 + 2\,a_2 h^2),$$

y poniendo:

$$\begin{aligned} y_0 &= \mathrm{f}(-h) &&= a_0 - a_1 h + a_2 h^2, \\ y_1 &= \mathrm{f}(0) &&= a_0, \\ y_2 &= \mathrm{f}(h) &&= a_0 + a_1 h + a_2 h^2, \end{aligned}$$

resulta:

[57-5] $$\mathrm{S} = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2).$$

que expresa el área bajo un arco de parábola en función de las ordenadas extremas y media, como producto de un promedio ponderado de éstas: $(y_0 + 4\,y_1 + y_2)/6$, por la amplitud $2\,h$ del intervalo de integración.

La expresión [57-5] es también aplicable a [57-4], con error del orden de h^5.

b) *Fórmula de* SIMPSON. — Dividamos ahora el intervalo de integración en un número *par* de partes *iguales* de longitud h, y consideremos los correspondientes puntos $\mathrm{P}_0\,\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2 \ldots$, sobre la curva (fig. 173). El arco de curva correspondiente a los dos primeros intervalos se puede aproximar, mediante la parábola de eje vertical que pasa por $\mathrm{P}_0\,\mathrm{P}_1$ y P_2. Esta parábola queda unívocamente determinada por la condición de pasar por los tres puntos, y el área bajo ella vale por [57-5]:

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4\,y_1 + y_2).$$

Análogamente podemos aproximar los arcos correspondientes a los demás *pares de intervalos* por otras tantas parábolas, que delimitan las áreas:

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4\,y_3 + y_4),$$

$$\frac{h}{3}(y_4 + 4\,y_5 + y_6),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{h}{3}(y_{n-2} + 4\,y_{n-1} + y_n).$$

La suma de las áreas bajo los arcos parabólicos es:

$$\frac{h}{3}\,[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\dots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\dots+y_{n-2})],$$

y como esta suma es un valor aproximado del área bajo la curva dada, tendremos la fórmula dada por TH. SIMPSON (1710-1761):

[57-6] $$\int_a^b y\,\mathrm{d}x \sim \frac{h}{3}(\mathrm{E} + 4\,\mathrm{I} + 2\,\mathrm{P}),$$

siendo

$\mathrm{E} = y_0 + y_n$ suma de ordenadas extremas;

$\mathrm{I} = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}$ suma de ordenadas de índ. impar;

$\mathrm{P} = y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}$ suma de ordenadas de índice par (excluyendo las extremas).

Obsérvese que para la referida paridad de los índices, hay que numerarlos desde 0 y no desde 1.

La fórmula de SIMPSON resulta muy inexacta si la tangente a la curva se acerca a la vertical. Conviene para esos trozos intercambiar los ejes, aproximando la curva por parábolas de eje horizontal.

EJEMPLO 1: Aplicando a [57-3] la fórmula de SIMPSON con $h = \frac{1}{4}$ y con $h = 1/10$, se obtiene, respectivamente:

$$\pi \sim 3{,}141\,568\,96; \qquad \pi \sim 3{,}141\,592\,60;$$

esta última, con sólo la última cifra inexacta. Las aproximaciones son muchísimo mejores que las obtenidas en § 57-2, ej., con el método de los trapecios.

c) *Expresión de* PEANO *para el resto.* — Calculemos el resto o diferencia entre el valor exacto de la integral y el dado por [57-6] en el caso en que $\mathrm{f}(x)$ tenga en $[a, b]$ derivada cuarta continua.

Comencemos para ello con el caso a) de un único arco de parábola, o sea $n = 2$ divisiones. Si $\mathrm{F}(x)$ es una primitiva de $\mathrm{f}(x)$, el resto considerado como función de h tendrá por expresión:

$$\mathrm{r}(h) = \mathrm{F}(h) - \mathrm{F}(-h) - \frac{h}{3}\,[\mathrm{f}(-h) + 4\,\mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(h)].$$

Es fácil verificar, haciendo el cálculo, que esta función se anula conjuntamente con sus dos primeras derivadas para $h = 0$, y que la derivada tercera vale:

$$r'''(h) = -\frac{h}{3}\,[f'''(h) - f'''(-h)],$$

y por el teorema del incremento finito (§ 35-1):

$$r'''(h) = -\frac{2\,h^2}{3}\,f^{IV}(\xi) \qquad (-h < \xi < h).$$

Integremos ahora tres veces consecutivas entre 0 y h, aplicando cada vez el primer teorema del valor medio (§ 48-6, c), lo que permite sacar de la integral el factor $f^{IV}(\xi)$, sin cambiar el significado de ξ como número comprendido entre $-h$ y h. Resulta así:

[57-7] $$r(h) = -\frac{h^5}{90}\,f^{IV}(\xi), \qquad (-h < \xi < h).$$

Si la curva es una parábola de segundo *o de tercer grado*, es $f^{IV}(x) \equiv 0$, y la fórmula de SIMPSON da el resultado exacto.

En el caso general, tendremos $k = n/2$ arcos de parábola; el resto, R, será suma de expresiones como [57-7], o sea:

$$R = -\frac{1}{90}\,h^5\,[f^{IV}(\xi_1) + \ldots + f^{IV}(\xi_k)],$$

y como el promedio de los $f^{IV}(\xi_i)$, por estar comprendido entre los extremos de la función *continua* $f^{IV}(x)$ en $[a, b]$, es (§ 26-4), igual a $f^{IV}(\xi)$ con $a < \xi < b$, resulta la expresión del resto:

[57-8] $$R = -\frac{h^4}{180}\,(b - a)\,f^{IV}(\xi), \qquad (a < \xi < b).$$

Si M es una cota superior de $f^{IV}(x)$ en $[a, b]$, tendremos la cota de error:

$$\frac{h^4}{180}\,(b - a)\,M.$$

NOTA: De más fácil deducción, pero con coeficiente algo mayor, es considerar en [57-4] el resto de la serie, que por ser igual al término complementario de TAYLOR se acota así:

$$|\,a_4 x^4 + \ldots\,| = \left|\frac{1}{4!}\,f^{IV}(\xi)\,x^4\right| < M\,\frac{x^4}{4!},$$

e integrando entre $-h$ y h, resulta como cota de error para dos intervalos $r(h) < M\,h^5/60$, y para todos ellos:

$$R < \frac{b - a}{2\,h} \cdot \frac{M\,h^5}{60} = \frac{h^4}{120}\,(b - a)\,M.$$

En nota I, c reencontraremos la fórmula de SIMPSON por otro camino, con otra acotación del resto, de más fácil aplicación. En la práctica, la aplicación de [57-8] conduce con frecuencia a acotaciones débiles, si se quieren evitar cálculos laboriosos en la acotación de $f^{IV}(x)$.

EJEMPLO 2: En el ejemplo 1 se tiene:

$$y' = -(1 + x^2)^{-2}\,.\,2\,x,$$
$$y'' = 8\,(1 + x^2)^{-3}\,.\,x^2 - 2\,(1 + x^2)^{-2},$$
$$y''' = -48\,(1 + x^2)^{-4}\,.\,x^3 + 24\,(1 + x^2)^{-3}\,.\,x,$$
$$y^{IV} = 24[16\,(1 + x^2)^{-5}\,.\,x^4 - 12\,(1 + x^2)^{-4}\,.\,x^2 + (1 + x^2)^{-3}],$$
$$|\,y^{IV}\,| \leqslant 24\left(16\left(\frac{x}{1 + x^2}\right)^4 + 12\left(\frac{x}{1 + x^2}\right)^2 + 1\right),$$

y como el máximo de $x/(1+x^2)$, en [0, 1], es $\frac{1}{2}$ (para $x=1$), resulta $|y^{IV}| < 24[1+3+1] = 120$, con lo cual el error de la fórmula en el cálculo de $\pi/4$ es:

$$< (\tfrac{1}{4})^4 \cdot \frac{120}{180} = \frac{2}{4^4 \cdot 3} = \frac{1}{384} < 0{,}003,$$

a él debe agregarse el de los redondeos.

4. **Integración por desarrollo en serie.** — Si la función $f(x)$ admite un desarrollo en serie de potencias,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

una función primitiva resulta, como se vió en § 43-5, integrando cada término, y el intervalo de convergencia es el mismo de la serie dada. Al efectuar la integración por este método, debe cuidarse ante todo de no aplicarlo más allá del intervalo de convergencia, pues esto conduciría a absurdos. Además, es necesario calcular el grado de aproximación alcanzado al tomar algunos términos, pues bien puede suceder que los infinitos despreciados (aun siendo insignificantes los primeros que siguen a los tomados) tengan suma considerable.

El desarrollo en serie de la función puede hacerse combinando las propiedades ya expuestas en § 44, esto es, operando por suma, resta, multiplicación, etc., con las series que representan las funciones elementales que componen $f(x)$, o bien con la fórmula de MAC-LAURIN. Si no hay desarrollo según potencias de x, o el intervalo de convergencia no comprende al intervalo dado, convendrá trasladar el origen, poniendo $x = x' + a$, o bien desarrollar en fórmula de TAYLOR, según las potencias de $x - a$.

EJEMPLOS: 1. De importancia fundamental en Cálculo de probabilidades es la llamada *función error* (Fehlerintegral) $\Phi(x)$, definida por GAUSS así:

[57-9] $$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Del desarrollo de e^x resulta el siguiente, convergente para todo t:

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \ldots,$$

y de aquí, para cualquier x:

[57-10] $$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!\,.\,3} + \frac{x^5}{2!\,.\,5} - \frac{x^7}{3!\,.\,7} + \cdots \right).$$

Para cada x, la serie cumple, desde un término en adelante, las condiciones del criterio de series alternadas (§ 22-3), lo que permite acotar cómodamente el resto. Para $x \to \infty$, la función $\Phi(x)$ crece, por ser positivo el integrando, y tiende a 1 (§ 53-5).

2. *Función integral-seno.*

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots \right) dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!\,.\,3} + \frac{x^5}{5!\,.\,5} - \dots$$

3. La integral $F(x) = \int \frac{e^x}{x} \, dx$ no puede expresarse por funciones elementales, y tampoco puede desarrollarse en serie de potencias de x el integrando; pero sí se transforma así:

$$\int \frac{e^x}{x} \, dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{e^x - 1}{x} \, dx = \ln x + \int \frac{e^x - 1}{x} \, dx,$$

siendo:

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)!} + \dots$$

convergente para todo x, se tiene:

$$F(x) = \ln x + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Esta función se llama *exponencial-integral*, Ei x. Poniendo $x = \ln t$ se expresa la integral indefinida, así:

$$\int \frac{dt}{\ln t}$$

forma en que fue estudiada por BESSEL y GAUSS. Este último halló que el número de números primos menores que n está próximo a

$$\int_2^n \frac{dt}{\ln t};$$

la cota de error sería menor que A $\sqrt{n}\,.\ln n$, con A constante, según probó H. VON KOCH (1901) basándose en una famosa hipótesis de RIEMANN, aun no probada ni refutada, sobre la posición de los ceros de la función

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

que prolonga al campo complejo la serie armónica generalizada (§ 22-2, *b*). Bajo esta hipótesis, resultaría que la distribución de números primos alrededor de una ley media de crecimiento se hace al azar, es decir, según los resultados del cálculo de probabilidades.

Se llama *logaritmo-integral* a la función

$$\text{li}\, x = \int_0^x \frac{dt}{\ln t},$$

obtenible de la exponencial-integral mediante Ei$(\ln x)$.

5. **Fórmula de integración de Gauss.** — *a*) El área bajo un arco de parábola está expresada en [57-5] mediante tres ordenadas *equidistantes*: y_0, y_1, y_2. Ahora bien, vamos a ver que es posible elegir las tres ordenadas no equidistantes, de modo que el área venga expresada más exactamente por una expresión también lineal, de la forma:

[57-11] $$S = R_0\, y_0 + R_1\, y_1 + R_2\, y_2 .$$

Adoptando como origen el punto medio del intervalo, y tomando como unidad a la semiamplitud del mismo, tenemos (§ 57-3, *a*) para la integral entre -1 y $+1$ de [57-4]:

$$2\,a_0 + \frac{2}{3}\,a_2 + \frac{2}{5}\,a_4 + \ldots .$$

Ensayemos ahora la determinación de tres valores x_0, x_1, x_2, y tres coeficientes, R_0, R_1, R_2, tales que la expresión [57-11] coincida idénticamente en $a_0, a_1, a_2, \ldots$, es decir para *cualquier* función, con este desarrollo, o sea:

$$\begin{aligned} & R_0(a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \ldots) + \\ & + R_1(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots) + \\ & + R_2(a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \ldots) = \\ & = 2\,a_0 + \frac{2}{3}\,a_2 + \frac{2}{5}\,a_4 + \ldots . \end{aligned}$$

Las incógnitas R_i, x_i se calculan ahora por el método de coeficientes indeterminados (§ 44-4); igualando los coeficientes de $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ (y despreciando los siguientes), resultan las condiciones:

$$\begin{aligned} R_0 \quad + R_1 \quad + R_2 \quad &= 2\,, \\ R_0 x_0 + R_1 x_1 + R_2 x_2 &= 0\,, \\ R_0 x_0^2 + R_1 x_1^2 + R_2 x_2^2 &= 2/3, \\ R_0 x_0^3 + R_1 x_1^3 + R_2 x_2^3 &= 0\,, \\ R_0 x_0^4 + R_1 x_1^4 + R_2 x_2^4 &= 2/5, \\ R_0 x_0^5 + R_1 x_1^5 + R_2 x_2^5 &= 0\,, \end{aligned}$$

de donde se despeja:

$$\begin{aligned} R_0 &= 5/9, & x_0 &= -\sqrt{3/5} = -0{,}774\ldots, \\ R_1 &= 8/9, & x_1 &= 0, \\ R_2 &= 5/9, & x_2 &= +\sqrt{3/5} = 0{,}774\ldots; \end{aligned}$$

si la semiamplitud del intervalo es h, basta multiplicar por h las abscisas, y resulta:

Adoptando como valor del área la expresión:

[57-12] $$h(5\,y_0 + 8\,y_1 + 5\,y_2) : 9,$$

siendo y_0, y_1, y_2 *las ordenadas en los puntos de abscisas:*

$$-h\sqrt{3/5}, \quad 0, \quad +h\sqrt{3/5},$$

resulta un valor del área cuyo error es del orden de h^7.

Comparada esta fórmula de GAUSS con la de SIMPSON, se ve que el mayor trabajo del cálculo queda compensado con la mejor aproximación obtenida.

Así, por ejemplo, si se desea calcular con sólo tres datos la temperatura media de un día (es decir, la integral de la temperatura, dividida por el intervalo), deberían tomarse estas tres temperaturas a las horas siguientes:

$$2^h\,24^m \text{ a/m}, \quad 12^h \text{ m}, \quad 9^h\,18^m \text{ p/m}.$$

b) La fórmula de GAUSS [57-12] puede generalizarse para n ordenadas. Por ejemplo, para $n = 4$, la expresión del área es:

$$S \sim R_0 y_0 + R_1 y_1 + R_2 y_2 + R_3 y_3,$$

siendo:

$$R_0 = R_3 = 0{,}347855 \qquad R_1 = R_2 = 0{,}652145$$
$$-x_0 = +x_3 = 0{,}8611 \qquad -x_1 = +x_2 = 0{,}3400.$$

Puede desarrollarse el método general utilizando las propiedades de los polinomios de LEGENDRE (nota III). Teniendo $2n$ constantes a determinar (n abscisas $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ y n coeficientes $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$), podemos elegirlas de modo que la fórmula sea exacta cuando $f(x)$ es un polinomio *arbitrario* de grado $2n-1$:

[57-13] $$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n-1} x^{2n-1}.$$

Si la fórmula se expresa con las ordenadas y_i, en los puntos x_i antedichos, deberá dar igual valor para $f(x)$ y para un polinomio $\varphi(x)$ que coincida con $f(x)$ en $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Un tal $\varphi(x)$ está dado por la fórmula de LAGRANGE (§ 46-2, *a*) en la forma:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi_i(x), \qquad \text{con: } \operatorname{gr} \varphi_i(x) \leqq n-1$$

Como $f(x) - \varphi(x)$ es divisible por

$$P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}),$$

tendremos:

$$f(x) - \varphi(x) = P_n(x) Q(x), \qquad (\operatorname{gr} Q \leqq n-1),$$

y deberá ser:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) Q(x) \, dx = 0.$$

Esto se logra para todo polinomio $Q(x)$ de grado $\leqq n-1$, si $P_n(x)$ es el polinomio de LEGENDRE de grado n (nota III, *a*), y entonces $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ deben elegirse como los ceros de dicho polinomio. Con ello se determinan fácilmente los coeficientes R_i, como veremos en [57-14] del apartado siguiente.

6. **Aplicación de los métodos de interpolación.** — Todo método de interpolación mediante polinomios (Cap. XII) da lugar a un método de integración aproximada al reemplazar la integral de la función por la integral del polinomio de interpolación. En esta idea se basan también los métodos de los trapecios y de SIMPSON, pero en ellos se descompone primero el arco en trozos, aproximando luego cada uno por un polinomio de 1º y 2º grado, respectivamente.

Si $F(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, todo polinomio $f(x)$ de grado $\leqq n$ se expresa por la fórmula de LAGRANGE escrita en la forma (§ 46-4, *a*):

$$f(x) = \sum_i \frac{F(x)}{(x - x_i) F'(x_i)} f(x_i).$$

Integrando entre -1 y $+1$ resulta:

[57-14] $$\int_{-1}^{+1} f(x) \, dx = \sum_i R_i y_i, \qquad \text{con: } R_i = \frac{1}{F'(x_i)} \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{x - x_i} \, dx.$$

Si $f(x)$ no es un polinomio de grado $\leqq n$, la primera igualdad es sólo aproximada.

Para abscisas equidistantes:

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + \frac{2}{n}, \quad \ldots, \quad x_n = 1,$$

se tiene:

$$\frac{F(x)}{x-x_j}=(x+1)\dots\left(x+1-\frac{2(j-1)}{n}\right)\cdot\left(x+1-\frac{2(j+1)}{n}\right)\dots(x-1)=$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)^n[t(t-1)\dots(t-j+1)(t-j-1)\dots(t-n)],$$

siendo $t=n(x+1)/2$. Además:

$$F'(x_j)=(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)=$$

$$=(-1)^{n-j}\left(\frac{2}{n}\right)^n j!(n-j)!\ .$$

Tenemos, entonces:

$$\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=R_0f(-1)+R_1f\left(-1+\frac{2}{n}\right)+\dots+R_nf(1),$$

siendo:

$$R_j=\frac{(-1)^{n-j}\,.\,(2/n)}{j!(n-j)!}\int_0^n t(t-1)\dots(t-j+1)(t-j-1)\dots(t-n)\,dt.$$

Para un intervalo $[a,b]$, si $h=(b-a)/n$:

$$\int_a^b f(x)\,dx=R_0f(a)+R_1f(a+h)+\dots+R_nf(b),$$

con igual expresión de R_j, reemplazando $2/n$ por h.

Ésta es la fórmula de NEWTON - COTES, una de las más antiguas de integración numérica (I. NEWTON, carta a G. G. LEIBNIZ, de fecha 24 de octubre de 1676; R. COTES, *Harmonia mensurarum*, 1722). Esta fórmula de abscisas equidistantes es poco recomendable, debiendo preferirse el método de GAUSS (§ 57-5) de modificar convenientemente las abscisas, porque entonces aumenta considerablemente la aproximación.

EJERCICIOS

1. Calcular con la fórmula de los trapecios, con $h=1/10$ y 5 decimales $\int_1^2 \frac{dx}{x}=\ln 2$, explicando por qué el resultado es por exceso.

2. Si para $x>0$ es $y=f(x)$ creciente y cóncava hacia $y<0$, probar que la diferencia

$$D_n=\int_0^n f(x)\,dx-[\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)+\tfrac{1}{2}f(n)]$$

tiende a un límite positivo finito cuando $n\to\infty$.

3. Aplicando el resultado anterior a $y=\ln(1+x)$, probar que $n!=n^n e^{-n}\sqrt{n}\,\alpha_n$ con $\alpha_n\to\alpha$ finito (STIRLING). Cfr. [53-14].

4. Calcular por la fórmula de SIMPSON [57-6], la integral del ejercicio 1 con la misma subdivisión e igual número de cifras, verificando que resultan todas exactas.

5. Llamando P_r al punto de $y=f(x)$ de abscisa $a+hr$ y Q_r a su proyección sobre el eje x, interpretar geométricamente la fórmula de SIMPSON [57-6] como suma de rectángulos de bases $Q_{2r}Q_{2r+2}$ y alturas

$Q_{2r+1} H_r$, de modo que sea $P_{2r+1} H_r = P_{2r+1} I_r/3$ si I_r es la intersección del segmento $P_{2r+1} Q_{2r+1}$ con la cuerda correspondiente. (Cfr. nota I, *c*).

6. Siendo $\Phi(x) = \operatorname{erf} x$ la función error [57-9], calcular con dos decimales $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\operatorname{erf} 1 = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$, probando que si se toman 4 términos, cada uno al milésimo, el error es menor que 1/100.

7. *a*) Expresar por una serie la integral (elíptica) $f(t) = \int_0^t dx/\sqrt{1+x^5}$; *b*) Calcular $f(\frac{1}{2})$ con tres decimales exactos.

8. Con el método indicado en § 55-3, *b*, desarrollar en series de potencias de k las integrales elípticas completas $K(\frac{1}{2}\pi, k)$ y $E(\frac{1}{2}\pi, k)$.

9. Calcular la longitud de la elipse $x^2 + (4y^2)/3 = 1$ (§ 55-3) con 4 cifras exactas con la fórmula de SIMPSON dividiendo $(0, \pi/2)$ en 6 partes. Comprobar con el desarrollo en serie de la integral elíptica completa $E(\frac{1}{2}\pi, k)$ (ejercicio 8), averiguando cuántos términos son necesarios para asegurar cuatro cifras exactas.

10. Probar que $\int_0^1 \ln(1-x)^{-1}\,dx = 1$ desarrollando en serie de potencias el integrando.

11. Probar que $I_n = \int x^{-n} e^x\,dx$ (n natural), se expresa mediante funciones elementales y la exponencial-integral (§ 57-4, ej. 3).

12. Calcular la integral de los ejercicios 1 y 4 por la fórmula de GAUSS [57-12], con cinco cifras, siendo $\sqrt{3/5} = 0{,}774\,60$.

13. Verificar los siguientes valores de R_j para la fórmula de NEWTON-COTES (§ 57-6) para intervalo $(-1, 1)$:

$n = 1$: $R_0 = R_1 = 1$; $n = 2$: $R_0 = R_2 = 1/3$, $R_1 = 4/3$:
$n = 3$: $R_0 = R_3 = 1/4$, $R_1 = R_2 = 3/4$;
$n = 4$: $R_0 = R_4 = 7/45$, $R_1 = R_3 = 32/45$, $R_2 = 4/15$;
$n = 5$: $R_0 = R_5 = 19/144$, $R_1 = R_4 = 25/48$, $R_2 = R_3 = 25/72$.

§ 58. INTEGRACIÓN GRÁFICA

1. Integración gráfica de funciones escalonadas. — *a*) *Función constante* $f(x) \equiv k$. — En este caso, la función integral

$$\int_a^x k\,dx = k\,(x-a)$$

está representada por una recta que corta al eje x en $x = a$. Su inclinación φ se determina uniendo el punto P $(-1;\ 0)$, que llamaremos *polo* con H $(0;\ k)$, determinándose así el ángulo $OPH = \varphi$ (fig. 175), tal que $\operatorname{tg}\varphi = \frac{OH}{PO} = \frac{k}{1} = k$. La gráfica de la función integral será entonces la recta r, trazada

por el punto $x = a$ del eje x, paralelamente a PH, y el área **orientada** $a\,b$ **B A está representada numéricamente en valor y signo por el segmento orientado** b **C, es decir, por la ordenada de C. Esto último puede probarse también considerando los triángulos semejantes** P **O H y** $a\,b$ **C (hágase). Constrúyase otra figura para el caso** $k < 0$**, y otras dos para** $b < a$**. El segmento** P **O = 1 se llama** ***base de integración*** **o** ***distancia polar.***

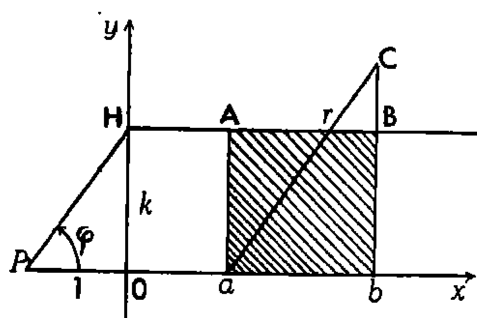


Fig. 175.

b) Si f(x) tiene un número finito de discontinuidades, siendo constante entre cada dos consecutivas (fig. 176), se dice es una *función escalonada,* y la función integral

$$\int_a^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}\,x$$

estará representada por la quebrada a B C D, cuyos lados son

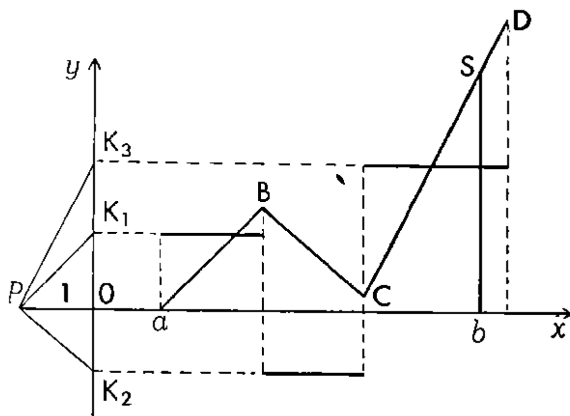


Fig. 176.

respectivamente paralelos a los *radios polares* $P\,K_1$, $P\,K_2$, $P\,K_3$. La integral entre a y b se representa por el segmento orientado b S.

NOTA: A veces conviene tomar la distancia polar $P\,O = p$, con lo cual las ordenadas de la quebrada integral quedarán reducidas a la p-ésima parte de su altura, y el área buscada vendrá dada por $p\,.\,b\,S$. Suelen también usarse perfiles en los cuales las escalas horizontal y ver-

tical son distintas, dando el área orientada el valor de b S a la escala de alturas, supuesto determinado P O $= 1$ a la escala horizontal.

EJEMPLO: Consideremos un perfil tal que sea 1/200 la escala de alturas y 1/5 000 la escala horizontal. Si es cómodo elegir P O $= 20$ cm, y resulta b S $= + 15$ cm, el área buscada medirá $+ 3$ hectáreas (porque si, por ejemplo, tomamos el metro como unidad, es P O $= 20.50$; b S $= 15.2$, dando el área $p \,.\, b$ S $= 1\,000.30 = 30\,000$ m²).

2. Integración gráfica de funciones cualesquiera. — Fuera de los casos anteriores, la curva integral se puede dibujar con bastante exactitud, de la siguiente manera.

Efectuando la *compensación por verticales*, se sustituye la curva por una poligonal, haciendo que se vayan compensando

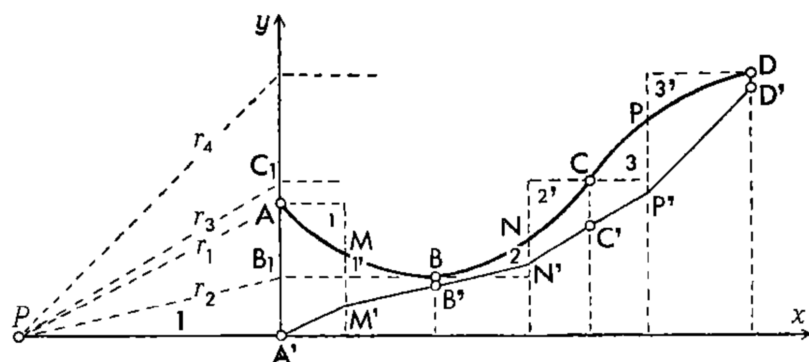


Fig. 177.

los errores, para lo cual tendrán que ser iguales los triángulos 1 = 1′, 2 = 2′, 3 = 3′, etc., lo cual se consigue en el dibujo con suficiente exáctitud (fig. 177), y luego se procede como en § 58-1, *b*.

Si queremos construir la curva integral de la dada, observamos que los puntos A′, B′, C′ ..., pertenecen a dicha curva integral, puesto que para las ordenadas de estos puntos, las áreas de la poligonal y de la curva son iguales. Además, las pendientes de los radios polares $r_1, r_2, r_3, \ldots$ (fig. 177) vienen medidas por las ordenadas de la curva dada en A, B, C, ..., por lo cual los lados de la quebrada obtenida son tangentes a la curva integral en A′, B′, C′, ..., dando así el método de compensación por verticales una *quebrada circunscrita* a la curva integral buscada.

Para obtener, pues, la curva integral, basta trazar una curva que pase por dichos puntos A′, B′, C′, ..., y que sea tangente en los mismos a los lados de la poligonal.

NOTA: Si hacemos la *compensación por horizontales*, como en la figura 178, obtenemos también una integral poligonal, pero ya no resulta tangente a la curva integral, sino sólo una *quebrada inscrita* a ella, y de ésta sólo se tienen puntos, como el A′, B′, C′, D′.

Se ve, pues, que es preferible el método anterior, que da la curva integral por puntos y tangentes.

Si sólo interesa el área total encerrada por la curva, el eje O x y las ordenadas extremas, viene expresada por la diferencia de las ordena-

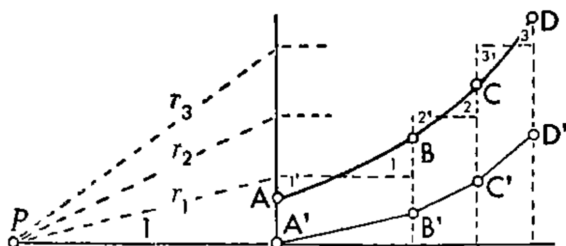


Fig. 178.

das extremas de la curva integral, que en ambos procedimientos coinciden con las de la poligonal integral.

Para la cuadratura de recintos, limitados por una curva cerrada, se descompone ésta en dos arcos.

Como dijimos en § 41-12, c, la principal utilidad de los métodos gráficos, que sólo son groseramente aproximados, es la de controlar los métodos numéricos, susceptibles de deslices importantes, no fácilmente advertibles.

Ejercicios

1. Probar que si u y v son las unidades en x e y, y w la unidad en y para la curva integral, la distancia polar $p = OP$ es $p = u\,v/w$, y construirla como cuarta proporcional. Análogamente es $w = u\,v/p$. ¿Cuánto valdrá w en el ejemplo de § 58-1, b, si se toma el metro como unidad?

2. Supongamos que en un diagrama de momentos para el cálculo de una viga conviene adoptar como escala de longitudes 1 cm = 2 m; como escala de fuerzas, 1 cm = 500 kg, y como escala de la curva integral de momentos, 1 cm = 5 000 kg × m. ¿Qué longitud en centímetros debe tener p?

3. Determinar el polo P de modo que una curva integral de f(x) pase por $A_0(a, 0)$ y S (b, b S), basándose en una estimación del valor medio μ de f(x) en (a, b).

4. Sean t la tangente en M a una curva C, t_1, y n_1 tangente y normal a una curva integral C_1 en el punto M_1 de igual abscisa. Probar que el centro de la circunferencia osculatriz (§ 40-6) de C_1 en M_1 se halla trazando por la intersección de t y x una paralela al eje y, hasta cortar a n_1 en P; por P, una paralela a t_1, hasta cortar a MM_1 en Q, y por Q, una paralela al eje x, hasta cortar a n_1 en R.

5. Considerando intervalos de longitud $h = 1/10$, trazar mediante compensación: a) por verticales, b) por horizontales, las curvas integrales:

$$\int_1^x x^{-1}\,d\,x,\ (1 \leqq x \leqq 2)\,;\ \int_0^x (1 + x^2)^{-1}\,d\,x,\ (0 \leqq x \leqq 1)\,;\text{ y hallar } \ln 2 = 0{,}693,$$

$\pi/4 = 0{,}785$.

6. Calcular gráficamente $\operatorname{li} 3 - \operatorname{li} 2 = \text{M}.\int_2^3 dx/\lg x$ (§ 57-4, ej. 3) dividiendo el intervalo en cinco partes.

7. En la interpretación geométrica dada en el ejercicio 5 de § 57 para la fórmula de SIMPSON basar un procedimiento de integración gráfica.

§ 59. INTEGRACIÓN MECÁNICA

1. **Intégrafo de Abdank Abakanowitz.** — Los aparatos llamados *intégrafos* dibujan la curva integral de una función dada por su gráfica. Los *planímetros*, de uso más frecuente, miden superficies planas, haciendo recorrer su contorno a un índice o punzón del instrumento. Expondremos los principios generales en que se basan unos y otros, sin entrar en detalles de diferentes modelos, que sólo pueden asimilarse con el manejo de los mismos. Los *integradores* son aparatos que, al mismo tiempo que el área, calculan el momento estático y el momento de inercia de un recinto, que consideraremos en el volumen II de esta obra (§ 84).

El intégrafo de ABDANK ABAKANOWITZ se basa en el mismo principio que la integración gráfica (§ 58), pero el trazado continuo del aparato permite obtener la curva integral sin pasar por poligonales intermedias.

Supongamos una curva dada por la función: $y = \mathrm{f}(x)$; sea $\mathrm{F}(x)$ una curva integral, es decir, tal que: $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$; los valores de $\mathrm{F}'(x)$ son las pendientes $\operatorname{tg}\alpha$ de las tangentes en los diferentes puntos de la curva integral, y coinciden con los valores de las ordenadas de la curva $\mathrm{f}(x)$ en los mismos puntos (fig. 179).

Adoptando como unidad un segmento QP (fig. 179), se tiene: $\mathrm{f}(x) = \operatorname{tg}\alpha$ para cada valor de x. A medida que $\mathrm{f}(x)$ toma distintos valores, según los de x, el ángulo α varía, puesto que $\text{QP} = 1$. Si se tiene, pues, un medio de ir dibujando una curva $y = \mathrm{F}(x)$, tal que la tangente en cada punto sea paralela a la correspondiente recta QM, dicha función cumplirá la condición: $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$, y por lo tanto, será una curva integral de $\mathrm{f}(x)$.

Una barra Q′AA′ se traslada conservándose perpendicular al eje x, arrastrando dos varillas AM y A′M′, perpendiculares a ella y que pueden deslizarse a lo largo de ella. El estilete M, destinado a describir la curva $y = \mathrm{f}(x)$, es origen de una varilla que pasa por Q, deslizándose por él según varía la hipotenusa QM al variar la ordenada $y = \text{PM}$. Sobre esta varilla QM se desliza, conservándose perpendicular, otra varilla c, que forma con otra igual c' un paralelogramo articulado, de modo tal que la ruedecilla r, situada en el centro de c'.

se conserva siempre paralela a Q M; y como está obligada a conservarse en la misma ordenada P M por la varilla m' que resbala sobre a, resulta que dicha ruedecilla r traza una huella tal, que la tangente en cada punto es paralela a Q M, es de-

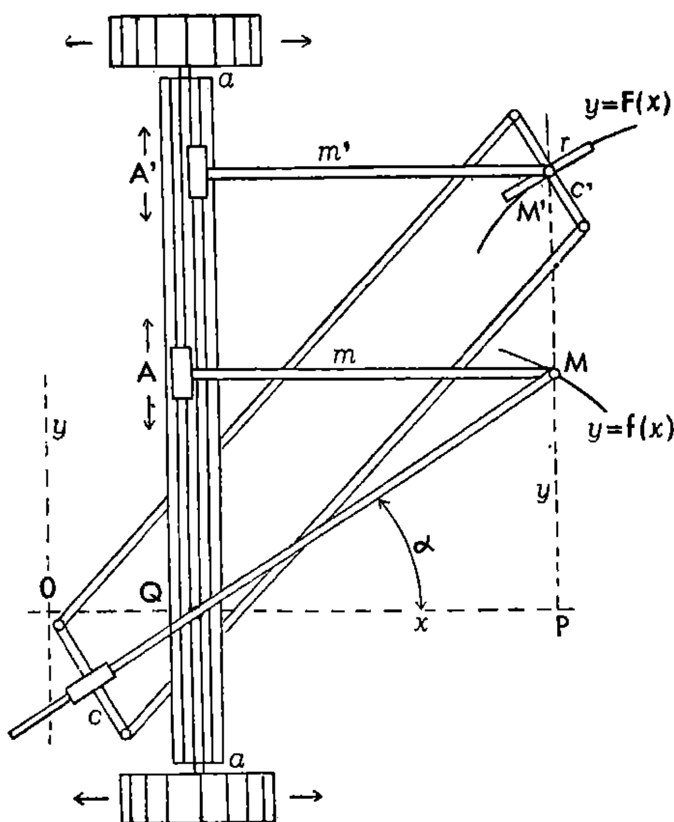


Fig. 179.

cir, una curva $y = \mathrm{F}(x)$ tal que en cada punto es $\mathrm{F}'(x) = y$, si se adopta como unidad el segmento m; luego, $\mathrm{F}(x)$ es una función integral de $f(x)$.

Al comenzar el trazado, puede deslizarse c sobre Q M arbitrariamente, pudiendo por lo tanto colocarse M′ arbitrariamente sobre la ordenada P M (naturalmente, dentro del límite que permiten las dimensiones del aparato), pero una vez fijada la posición inicial M′, es decir, elegida la constante de integración, la curva integral queda completamente determinada al recorrer M la curva dada.

El segmento de ordenada, limitado por los puntos inicial y final de la curva obtenida, representa el área con la unidad

P Q del aparato; es decir: el recinto es equivalente al rectángulo cuyos lados son P Q y aquel segmento.

Para obtener el área de un recinto limitado por una curva cerrada, basta descomponerla en dos arcos por los puntos de las abscisas extremas; y obtenidas las dos curvas integrales a partir de un mismo punto, la diferencia N′ N″ de las ordenadas finales mide el área (fig. 180). De igual manera, todo intégrafo puede usarse como planímetro.

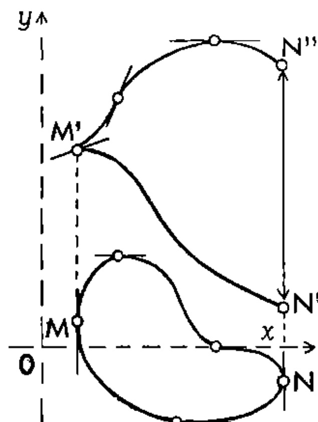


Fig. 180.

NOTA: En el modelo de ABDANK ABAKANOWITZ, que es el más conocido, el movimiento de traslación se logra mediante ruedas de ancha llanta y eje a, en los extremos de esta barra.

La curva derivada $y = f(x)$ no se describe con el mismo punto M, ni la integral con el M′, sino por otros puntos M_1 y M'_1 en la prolongación de m y m'. Esto equivale a trasladar paralelamente ambas curvas en el sentido del eje x, pero subsiste la misma relación entre ambas.

El movimiento de traslación de m y m' a lo largo de a, se efectúa mediante un carro de dos ruedecillas que cada varilla lleva en su extremo, y que ruedan sobre sendas ranuras de la varilla a. Estos carros, situados en A y A′, suelen llamarse *carro diferencial* y *carro integral*, respectivamente.

2. **Planímetros de ruedecilla integradora.** — *a*) *Teoría general.* — Consideremos una varilla A B, de longitud l, moviéndose de cualquier modo en un plano. Cada pequeño desplazamiento de la varilla puede considerarse (fig. 181) compuesto de una traslación (A B → A′ B′) y una rotación alrededor de

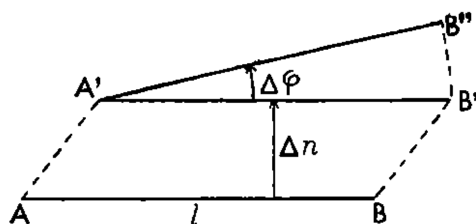


Fig. 181.

un extremo (A′ B′ → A′ B″). Llamando Δn al desplazamiento orientado en un determinado sentido, según la normal a la traslación, y $\Delta \varphi$ al ángulo girado, el área ΔS = A B B′ B″ A′ A barrida por la varilla es:

[59-1] $$\Delta S = l . \Delta n + \tfrac{1}{2} l^2 . \Delta \varphi,$$

dado en valor y signo, según el atribuído a Δn, con el de $\Delta \varphi$ que le corresponda.

La varilla lleva una rueda *R*, que llamaremos *ruedecilla integradora*, cuyo plano está a la distancia *c* del extremo A (fig. 182), y cuyo eje de giro es paralelo a la varilla *. En la traslación A B → A′ B′, la ruedecilla *R* rueda una longitud Δn pues no gira si la varilla se desliza paralelamente a sí misma. En la rotación A′ B′ → A′ B″, la ruedecilla rueda $c.\Delta \varphi$, de modo que al barrer la varilla el área ΔS, la ruedecilla *R* rueda una longitud.

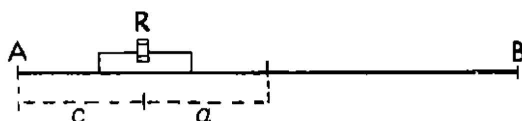


Fig. 182.

$$\Delta s = \Delta n + c.\Delta \varphi.$$

Si llamamos *a* a la distancia del plano de la ruedecilla al punto medio de la varilla (fig. 182), tendremos entonces, por [59-1], que el elemento de área Δ S barrido por la varilla es en valor y signo:

$$[59\text{-}2] \qquad \Delta S = l.\Delta s - c\,l.\Delta\varphi + \tfrac{1}{2}\, l^2.\Delta\varphi = l.\Delta s + l\,a.\Delta\varphi.$$

b) *Planímetro polar de* AMSLER. — El extremo A de la varilla está obligado a describir un arco de circunferencia, para lo cual está sujeto por una varilla (*brazo polar*) a un centro fijo O (*polo*). El otro extremo, B, de la varilla (*brazo de trazado*) lleva un estilete que recorre la curva (fig. 183).

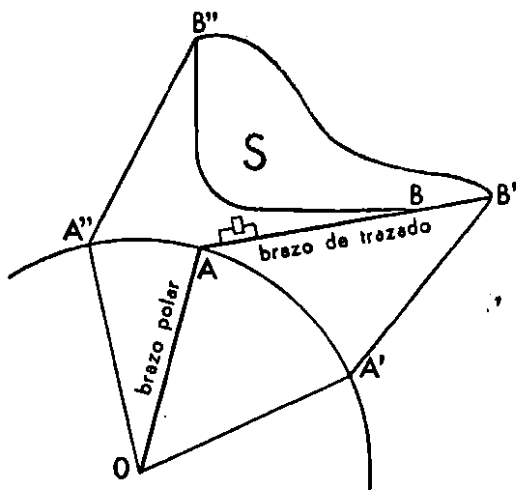


Fig. 183.

Según la posición y tamaño del área que se trata de medir, distinguiremos dos casos:

1º *Polo afuera*: El punto A describe un arco no contenido en el área. El ángulo total descrito por la varilla *l* es nulo,

* En los modelos corrientes, la ruedecilla no tiene el centro en la misma varilla, sino que está montada en un eje paralelo, en un pequeño bastidor. Este corrimiento no altera el arco girado en la traslación ni en el giro. (Cfr. ejercicio 1 de § 59).

pues vuelve a su posición inicial sin haber descrito una circunferencia completa (fig. 183).

Resulta, entonces, de [59-2]:

El área engendrada por la varilla de longitud l es ls.

Ahora bien: el área total descrita por l se compone de una parte descrita dos veces en sentido contrario (y por lo tanto, de suma nula), más el área S, descrita una sola vez. Resulta, por lo tanto: $S = ls$; es decir:

El área del recinto es el producto del brazo l por el arco descrito por la ruedecilla R, al recorrer con el índice su contorno.

Este arco s se obtiene haciendo una lectura inicial en el tambor graduado de la ruedecilla R y otra lectura final al volver al punto de partida. La diferencia entre ambas lecturas da s; las dimensiones de la ruedecilla y la varilla son tales que cada centésima de circunferencia por l es 1 cm². Si el nonio del tambor permite apreciar un décimo de dicha centésima, cada unidad del nonio representa 10 mm². En muchos modelos puede hacerse variar la longitud l, y para algunos de sus valores viene dada la unidad de área que corresponde a cada unidad de arco de la ruedecilla.

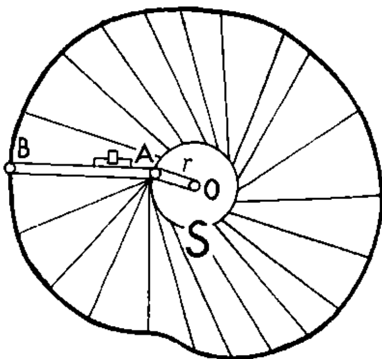


Fig. 184.

2º *Polo adentro*: El punto A describe (fig. 184) una circunferencia interior a S. Entonces, el ángulo girado por l es 2π, y tenemos:

Área engendrada por l es: $ls + 2\pi al$.

El área S es igual a ésta más el círculo de radio r; luego:

El área del recinto se deduce sumando al producto l s la constante

$$C = \pi r^2 + 2\pi a l.$$

Esta constante está dada en el aparato, y no es preciso calcularla.

NOTAS: 1. Es preferible emplear el planímetro en el primer caso de polo afuera, porque entonces no influyen en la evaluación del área los errores inherentes a los datos r y a. Si el área a medir es grande, ésta se divide en partes. Además conviene situar el planímetro de manera que el polo O se encuentre cerca del plano vertical prolongado de la ruedecilla, evitando que el contorno a recorrer sea paralelo o esté próximo al arco circular A A′ descrito por el extremo del brazo polar (la fig. 183 indica una posición muy desfavorable).

2. El método práctico para saber, en el caso de polo afuera, por cuál constante hay que multiplicar la diferencia de lecturas del tambor de la

ruedecilla para obtener el área, es medir directamente 1 cm² del dibujo en papel milimetrado.

Si se lo emplea con cuidado, un excelente procedimiento para controlar el resultado, y aun para ser aplicado directamente, es cubrir la figura a medir con papel milimetrado transparente, y contar el número de unidades de área que quedan encerradas por el contorno de la figura. Conviene contar primero los decímetros cuadrados de papel íntegramente contenidos en el contorno; luego, el número de centímetros cuadrados; y por fín, el número de milímetros cuadrados, suponiendo que cada uno de ellos, cortado por el contorno, deja una mitad dentro, para que los que dejen más se compensen con los que dejen menos.

3. Cuando se requiere mucha precisión, deben tenerse en cuenta varias fuentes de error; aparte de la contracción del papel que contiene la figura, falseando y deformando las escalas con que ella está representada, las dos más importantes correspondientes al planímetro son las siguientes:

1º El eje de la ruedecilla integradora puede no ser paralelo al brazo de trazado. El error ocasionado se reduce esencialmente si se toma el

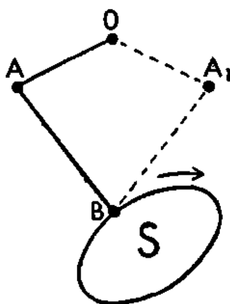


Fig. 185.

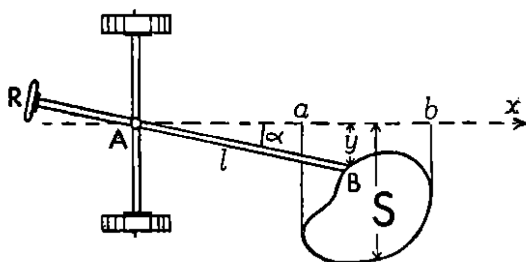


Fig. 186.

promedio de dos lecturas, una con el codo a la izquierda y otra con el codo a la derecha, en posición simétrica a la anterior, recorriendo el contorno en el *mismo* sentido (fig. 185). Esto puede hacerse en los llamados *planímetros de compensación,* de codo A desarmable. (Cfr. ejercicio 2 de § 59).

2º La ruedecilla integradora puede correrse o patinar, debido a irregularidades del papel. Esto se evita en los *planímetros de precisión de disco,* en los cuales la ruedecilla rueda sobre un disco metálico y no sobre el papel.

La precisión alcanzada usualmente con un planímetro corriente, corresponde a una cota de error de 1/500 del valor del área buscada.

c) *Planímetro lineal.* — Se distingue del polar en que el punto A (fig. 186) está sujeto al eje de un carro que se mueve en el plano en una dirección x. Como al recorrer B la curva, describe A un segmento rectilíneo dos veces en sentido contrario, la fórmula es la misma del primer caso, esto es: $S = l\,s$.

3. **Planímetro de Prytz.** — Este planímetro, inventado en 1887, es notable por su sencillez y la posibilidad de fabricarse uno, aunque sus resultados sean menos precisos.

El brazo A B (fig. 187) tiene longitud variable entre cier-

tos límites, y se lo fija mediante el tornillo a presión T. Este brazo lleva en un extremo un punzón P, y en el otro una lá-

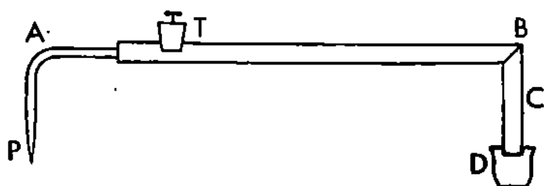


Fig. 187.

mina afilada D, especie de pequeña hacha que se apoya en el plano del dibujo.

Para medir un área S (fig. 188), se la divide por E F en dos partes aproximadamente iguales. Colocando el punzón en F y la lámina afilada en J, sobre la prolongación de E F y después de haber fijado la longitud del planímetro de modo que

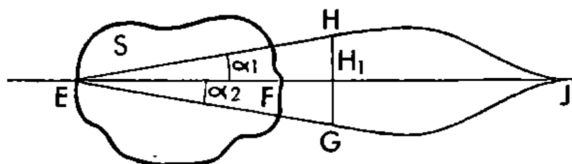


Fig. 188.

sea F J = 1,15 E F, se recorre con el punzón el arco *superior* F E, llegándose con el borde filoso a un punto H y determinándose un ángulo α_1 (que puede hallarse por su seno dividiendo H H_1 por la longitud a del planímetro). De igual manera se halla el ángulo α_2, al recorrer con el punzón el arco *inferior* F E.

Veremos que entonces el área S está dada por:

[59-3] $$S = \frac{3}{2} a^2 (\alpha_1 + \alpha_2), \quad (\alpha_1 + \alpha_2 \text{ en radianes}),$$

o bien por:

[59-4]
$$S = \frac{\pi}{120} a^2 (\alpha_1 + \alpha_2), \quad (\alpha_1 + \alpha_2 \text{ en grados sexagesimales}).$$

Nos limitaremos a bosquejar la teoría de este planímetro, basada en un principio diferente de los anteriores. Si un punto P, inicialmente en el origen de un sistema de coordenadas, se mueve sobre el eje x, otro punto D, rígidamente unido a P a la distancia a, e inicialmente en $(0; a)$, recorre una curva llamada *tractriz* (fig. 189). Se tiene:

$$-\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

es decir,

$$y\,d\,x = -\sqrt{a^2 - y^2}\,d\,y,$$

y entonces, el área bajo un arco de tractriz es:

$$S = \int y \, dx = -\tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2} - \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{a} + C.$$

Como $\tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2}$ mide el área del triángulo D M P, que llamaremos Δ, y $\operatorname{arc\,sen}(y/a) = \theta$, resulta:

$$S + \Delta = -\tfrac{1}{2} a^2 \theta + C,$$

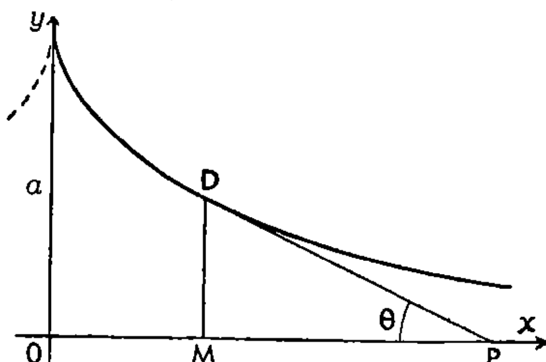


Fig. 189.

y entonces el área sombreada de la figura 190 (área barrida por el brazo) será:

[59-5] $$-\tfrac{1}{2} a^2 (\theta_2 - \theta_1).$$

Si en lugar de la curva de la figura 188 se considera un polígono inscrito, y se recorre éste con el punzón P (en dos partes, como hicimos

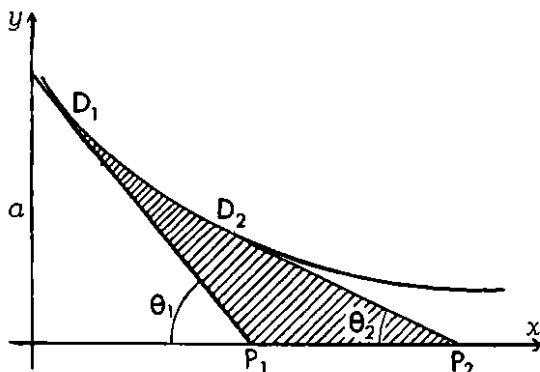


Fig. 190.

con la curva), el borde filoso D recorre curvas formadas por arcos de tractrices. Llamando:

S_p : área del polígono;
T' : área del sector circular, análogo al E H G;
R' : área de la parte restante, análoga a H G J;

se obtiene, por aplicación de [59-5]:

$$T' + R' = S_p - \tfrac{1}{2} a^2 (\alpha_1' + \alpha_2'),$$

siendo α_1' y α_2' los ángulos análogos a α_1 y α_2, al recorrer poligonales.

El último término es de nuevo T', de modo que por un paso al límite, se tiene el área S encerrada por la curva:

$$S = 2\,T + R,$$

con significados obvios para T y R.

Se puede probar (ver bibliografía, en nota IV-3) que si $a = 1{,}15\,E\,F$, es $R = T$, con gran aproximación y amplio margen sobre la forma del contorno de S. Entonces, es $S = 3\,T$, y se obtiene [59-3].

Ejercicios

1. Si R A forma con A B (fig. 182) el ángulo δ y el eje de la ruedecilla integradora, *no paralelo* a la varilla A B, forma con ésta el ángulo ε, demostrar que un pequeño desplazamiento de la varilla, según un corrimiento normal Δn, un corrimiento longitudinal Δp, y un giro $\Delta \varphi$, hace que la ruedecilla integradora ruede una longitud:

$$\Delta s = \Delta n.\cos \varepsilon + \Delta p.\operatorname{sen} \varepsilon + \frac{c.\Delta \varphi}{\cos \delta} \cos\,(\delta - \varepsilon).$$

Obtener (en lugar de [59-2]) que entonces la varilla barre el elemento de área:

$$\Delta S = \frac{l}{\cos \varepsilon}\left[\Delta s - \Delta p \operatorname{sen} \varepsilon - \frac{c.\Delta \varphi}{\cos \delta} \cos\,(\delta - \varepsilon)\right] + \tfrac{1}{2}\, l^2\, \Delta \varphi.$$

Verificar que para $\varepsilon = 0$, [59-2] no depende de δ.

2. Aplicar el ejercicio anterior al planímetro polar de compensación en el caso de polo afuera (§ 59-2, nota 3, 1º), para comprobar que al cambiar el codo A en posición simétrica, el ángulo ε cambia de signo, dando ahora:

$$\Delta s = \Delta n \cos \varepsilon - \Delta p \operatorname{sen} \varepsilon + \frac{c.\Delta \varphi}{\cos \delta} \cos\,(\delta + \varepsilon).$$

Así, al volver a la posición inicial ($\Sigma\, \Delta \varphi = 0$), se compensan las $\Sigma\, \Delta p$ sen ε, quedando como promedio de medidas:

$$\tfrac{1}{2}\,(S_i + S_d) = l\,s/\cos \varepsilon \sim l\,s\,(1 + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2),$$

donde ε^2 puede considerarse como despreciable.

3. Obtener [59-5] de [59-1], observando que para el brazo del planímetro de Prytz es constantemente $\Delta n = 0$.

Notas al capítulo XVI

I. Método de P. Mansion. — *a*) En las hipótesis de § 57-2 consideremos una partición de $[a, b]$ en un número *par*, $n = 2k$, de subintervalos *iguales*, y llamemos $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2k}$ a las partes en que queda dividida el área S.

Como por hipótesis, la curva tiene su concavidad hacia abajo, cada trapecio está contenido en un área σ_r, y entonces:

[XVI-1] $$\sigma_r > \tfrac{1}{2}\,h\,(y_{r-1} + y_r).$$

Dejando a un lado los dos subintervalos extremos, los trapecios inscritos al considerar los restantes *reunidos de dos en dos*, nos dan asimismo (fig. 191):

[XVI-2] $$\sigma_{2i} + \sigma_{2i+1} > h\,(y_{2i-1} + y_{2i+1}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Agrupando ahora de dos en dos *todos* los subintervalos, y considerando para cada par $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ el trapecio *circunscrito* que se obtiene trazando la tangente en el punto de abscisa media y ordenada (base media) y_{2i+1}, logramos una acotación de áreas *por arriba*:

[XVI-3] $\sigma_{2i+1} + \sigma_{2i+2} < 2h\, y_{2i+1}, \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1).$

Estas desigualdades permiten acotar *en ambos sentidos* el área S a calcular:

1º Sumando las [XVI-1] obtenemos la *fórmula de los trapecios*, que con las notaciones de § 57-3, *b* podemos escribir, indicando ahora el sentido de la aproximación:

[XVI-4] $$S > l = h(\tfrac{1}{2}E + P + I).$$

2º Sumando, en cambio, las [XVI-3] obtenemos una cota superior L:

[XVI-5] $$S < L = 2h\, I.$$

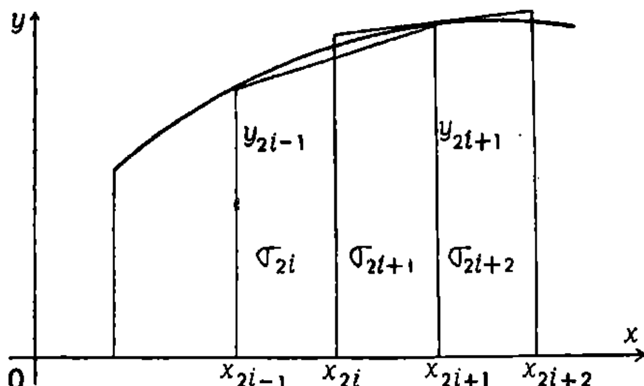


Fig. 191.

3º Se puede obtener otra cota inferior l', aplicando a la descomposición

$$S = \sigma_1 + \sigma_{2k} + \sum_{i=1}^{k-1} (\sigma_{2i} + \sigma_{2i+1})$$

las acotaciones [XVI-1] y [XVI-2], lo que da, llamando $E' = y_1 + y_{2k-1}$ (suma de ordenadas impares extremas):

[XVI-6] $$S > l' = h\,\frac{E + E'}{2} + h(2I - E') = h\left(2I - \frac{E' - E}{2}\right),$$

fórmula que ofrece la ventaja de no hacer intervenir las ordenadas intermedias de orden par.

b) *Fórmula de* PONCELET. — Se obtiene aproximando S por el promedio de L y l':

[XVI-7] $$S \sim h\left(2I - \frac{E' - E}{4}\right),$$

y no necesita el cálculo de las ordenadas intermedias de orden par. El error será, en valor absoluto, menor que la semidiferencia:

$$\frac{L - l'}{2} = \frac{h}{4}(E' - E).$$

c) *Fórmula de* SIMPSON. — Se reencuentra al considerar una media ponderada entre L y l:

[XVI-8] $$S \sim \frac{L + 2l}{3} = \frac{h}{3}[E + 4I + 2P].$$

El error tiene por cota superior:

[XVI-9] $$L - \frac{L + 2l}{3} = \frac{2}{3}(L - l) = \frac{2}{3}h(I - P - \tfrac{1}{2}E).$$

Si la curva es cóncava hacia arriba, resulta invertido el sentido de las acotaciones laterales, pero en la fórmula de SIMPSON siempre tendremos como cota superior del error la expresión de MANSION:

[XVI-10] $$\frac{2}{3}h\,|I - P - \tfrac{1}{2}E|,$$

que aunque no permite estudiar, como en la expresión de PEANO (§ 57-3, *c*), el orden de magnitud del error, tiene la ventaja de su sencillez y de ser siempre aplicable utilizando los mismos elementos empleados en el cálculo aproximado de la integral.

EJEMPLO: Para el cálculo de $\pi/4$ con $h = \frac{1}{4}$, en el ejemplo 1 de § 57-3, tenemos la cota:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\,|1{,}581 - 0{,}8 - 0{,}75| = \frac{0{,}031}{6},$$

un poco mayor que 0,005, y mayor que la calculada en § 57-3, ej. 2, con el resto de PEANO, a pesar de que aquélla se debilitó, para no complicar los cálculos. El error verdadero (en $\pi/4$) no llega a 1/100 000, como se observa si se compara el primer valor hallado para π en § 57-3, ej. 1, con el exacto.

II. Fórmula sumatoria de Euler - Mac Laurin. — *a*) *Números de* BERNOULLI. — Se llaman así los coeficientes B_n del desarrollo de esta función, llamada *generatriz*:

[XVI-11] $$\frac{x}{1 - e^{-x}} = B_0 + B_1\frac{x}{1!} + B_2\frac{x^2}{2!} + \ldots + B_n\frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

El producto de esta serie por e^{-x} es:

$$B_0 + (B-1)_1\frac{x}{1!} + (B-1)_2\frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

conviniendo en desarrollar estas *subpotencias* como las potencias de binomios, pero poniendo subíndices en vez de exponentes.

Al identificar x con el producto de $1 - e^{-x}$ por la serie resultan, pues, las relaciones:

[XVI-12] $$B_n = (B-1)_n, \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

y como es $B_0 = 1$, los B_n son *racionales* y se van calculando así:

$$2B_1 - 1 = 0, \qquad B_1 = \frac{1}{2};$$

$$3B_2 - 3B_1 + 1 = 0, \qquad B_2 = \frac{1}{6};$$

$$4B_3 - 6B_2 + 4B_1 - 1 = 0, \qquad B_3 = 0;$$

$$5B_4 - 10B_3 + 10B_2 - 5B + 1 = 0, \qquad B_4 = -\frac{1}{30}.$$

Siguiendo así, se hallan (siendo nulos los B_n de índice impar mayor que 1, como veremos):

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{340}, \quad \ldots .$$

Las relaciones [XVI-12] justifican que en el primer miembro de

[XVI-11] se pueda adoptar $x/(e^x - 1)$ como función generatriz, dando los mismos valores para B_n, $(n = 2, 3, \ldots)$, pero cambiando el signo de B_1, lo que también resulta cambiando en [XVI-11] x por $-x$; así se efectúa en muchos textos. (Ver ejercicio 8 de § 44).

Análogamente, si se multiplica la serie [XVI-11] por e^x, resulta:

$$B_0 + (B + 1)_1 \frac{x}{1!} + (B + 1)_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

y al identificar el producto de la serie por $e^x - 1$ con el numerador de la generatriz, que es:

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = \frac{x\, e^x}{e^x - 1}$$

resulta esta nueva relación:

$$\text{[XVI-13]} \qquad (B + 1)_n - B_n = n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

que también sirve para determinar los números B_n, pudiendo adoptarse [XVI-12] o [XVI-13] como definición de los mismos.

De [XVI-12] y [XVI-13] resulta:

$$(B + 1)_n - (B - 1)_n = n,$$

y si n es par, se obtiene una relación lineal homogénea entre $B_3, B_5, B_7, \ldots$ $(2\, n\, B_1 = n)$, y como es $B_3 = 0$, van resultando nulos todos los números de índice impar, excepto B_1.

La notación de los números de Bernoulli no es uniforme. Por ejemplo en *American Standard Mathemathical Symbols*, 1928 (Report Z 10 of American Engineering Standards Commitee) se indican con $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ los valores absolutos de $B_2, B_4, \ldots, B_{2n}, \ldots$, de nuestra notación.

b) Desarrollo infinito de Euler Mac Laurin. — Apliquemos la fórmula de los trapecios (§ 57-2) a $f(x) = e^{rx}$, y resulta:

$$\frac{1}{h}\int_a^b e^{rx}\, d\,x = \tfrac{1}{2} e^{ra} + e^{r(a+h)} + e^{r(a+2h)} + \ldots + e^{r[a+(n-1)h]} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} e^{r(a+nh)} + R,$$

indicando con R el resto o término complementario. Calculando la integral del primer miembro y transformando el segundo, queda:

$$\frac{e^{ra}(e^{nrh} - 1)}{r\,h} = e^{ra}[1 + e^{rh} + \ldots + e^{r(n-1)h}] + \tfrac{1}{2} e^{ra}(e^{rnh} - 1) + R =$$

$$= e^{ra}\frac{e^{rnh} - 1}{e^{rh} - 1} + \frac{e^{ra}}{2}(e^{rnh} - 1) + R,$$

es decir,

$$\frac{1}{r\,h} - \frac{1}{e^{rh} - 1} - \tfrac{1}{2} = \frac{R}{e^{ra}(e^{rnh} - 1)},$$

y como por [XVI-11] y los valores de B_0 y B_1, el primer miembro es

$$-\frac{B_2}{2!} r\,h - \frac{B_4}{4!} r^3 h^3 - \frac{B_6}{6!} r^5 h^5 - \ldots,$$

resulta:

$$R = [e^{r(a+nh)} - e^{ra}] . \left(-\frac{B_2}{2!} r\,h - \frac{B_4}{4!}(r\,h)^3 - \frac{B_6}{6!}\right)(r\,h)^5 - \ldots\ .$$

Esta expresión se puede transformar, observando que si $f(x) = e^{rx}$ es $f'(x) = r\,e^{rx}$, $f''(x) = r^2 e^{rx}$, ..., y resulta, *para el caso* $f(x) = e^{rx}$, la fórmula:

[XVI-14]

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\ldots+f[a+(n-1)h]+\tfrac{1}{2}f(a+nh)\right) -$$

$$-\frac{B_2h^2}{2!}\left(f'(b)-f'(a)\right)-\frac{B_4h^4}{4!}\left(f'''(b)-f'''(a)\right)-\ldots .$$

Si $f(x)$ es una función cualquiera de x, y suponemos que es representable con tanta aproximación como se quiera mediante sumas de la forma:

$$c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x} + \ldots + c_k e^{r_kx},$$

aplicando [XVI-14] a cada término, y sumando los resultados, vemos que [XVI-14] puede aplicarse a una tal $f(x)$ en general. Esta fórmula fué descubierta, independientemente, por EULER y por MAC LAURIN en los años 1730-1740. Puede escribirse así (indicando con T_n la suma de los trapecios):

[XVI-15] $$\int_a^b f(x)\,dx = T_n - \frac{h^2}{12}\left(y'_n - y'_0\right)+\frac{h^4}{720}\left(y'''_n - y'''_0\right)-$$

$$-\frac{h^6}{30\,240}\left(y^{V}_n - y^{V}_0\right)-\ldots .$$

La serie [XVI-15] es en general *divergente*, si bien sus primeros términos disminuyen rápidamente, para luego aumentar, en general, más allá de todo límite, por suceder otro tanto con los números de BERNOULLI. Sin embargo, tomando los primeros términos y deteniéndose antes de que comiencen a crecer, se tiene una evaluación muy aproximada de la integral, con error acotado en *d)*.

c) Polinomios de BERNOULLI. — c_1) Son los polinomios $\varphi_n(r)$, definidos por el desarrollo de la *función generatriz*:

[XVI-16] $$\frac{e^{rx}-1}{e^x-1} = r + \varphi_1(r)\frac{x}{1!}+\ldots+\varphi_n(r)\frac{x^n}{n!}+\ldots .$$

Se obtiene su expresión simbólica basándose en los números de BERNOULLI (*a*), escribiendo el primer miembro de [XVI-16] en la forma (con $B_1 = -\frac{1}{2}$):

$$(e^{rx}-1)\frac{e^{Bx}}{x} = \frac{e^{(B+r)x}-e^{Bx}}{x},$$

que nos muestra que el coeficiente de $x^n/n!$ es el polinomio de grado $n+1$:

[XVI-17] $$\varphi_n(r) = \frac{(B+r)_{n+1} - B_{n+1}}{n+1},$$

donde las *subpotencias* indican índices en B, pero exponentes en r. En muchos textos se define como polinomio de BERNOULLI el

$$\Phi_{n+1}(r) = (n+1)\varphi_n(r).$$

c_2) De la ecuación de definición [XVI-16] resulta: *Todos los polinomios de* BERNOULLI *se anulan para* $r=0$ *y para* $r=1$.

c_3) Para r natural es:

$$\frac{e^{rx}-1}{e^x-1} = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(r-1)x}.$$

Desarrollando las exponenciales y comparando con [XVI-16], resulta:

[XVI-18] $$1 + 2^n + 3^n + \ldots + (r-1)^n = \varphi_n(r),$$

que expresa la *suma de potencias semejantes de los números naturales sucesivos*.

c_3) Derivando [XVI-17] se obtiene:

$$\varphi'_n(r) = (\mathrm{B}+r)_n = n\,\varphi_{n-1}(r) + \mathrm{B}_n,$$

y entonces, por a):

[XVI-19] $$\varphi'_{2k}(r) = 2k\,\varphi_{2k-1}(r) + \mathrm{B}_{2k};\ \varphi'_{2k+1}(r) = (2k+1)\,\varphi_{2k}(r).$$

d) *Desarrollos finitos de* EULER - MAC LAURIN. *Restos.* — Una expresión de la fórmula de EULER - MAC LAURIN, cuando se toma un número finito de términos, puede obtenerse de la fórmula de TAYLOR, con la expresión integral del término complementario (§ 51-5, c), y también directamente, por un procedimiento análogo. Se tiene:

$$\int_a^{a+h} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = h\int_0^1 \mathrm{f}(a+h\,t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}h\int_0^1 \mathrm{f}(a+h\,t)\,\mathrm{d}(2\,t-1).$$

Integrando por partes dos veces, y teniendo en cuenta c_3), resulta:

[XVI-20]

$$\int_a^{a+h} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}h[\mathrm{f}(a+h) + \mathrm{f}(a)] - h^2\int_0^1 \mathrm{f}'(a+h\,t)\,\mathrm{d}\varphi_1(t) =$$

$$= \tfrac{1}{2}h[\mathrm{f}(a+h) + \mathrm{f}(a)] + h^3\int_0^1 \varphi_1(t)\,.\,\mathrm{f}''(a+h\,t)\,\mathrm{d}t.$$

Prosiguiendo en la misma forma, resultan los desarrollos parciales de [XVI-14], con los respectivos restos:

[XVI-21] $$\int_a^{a+h} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}h\,[\mathrm{f}(a+h) + \mathrm{f}(a)] -$$

$$- \frac{\mathrm{B}_2 h^2}{2!}[\mathrm{f}'(a+h) - \mathrm{f}'(a)] + \frac{h^5}{3!}\int_0^1 \varphi_3(t)\,.\,\mathrm{f}^{\mathrm{IV}}(a+h\,t)\,\mathrm{d}t;$$

[XVI-22]

$$\int_a^{a+h} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}h[\mathrm{f}(a+h) + \mathrm{f}(a)] - \frac{\mathrm{B}_2 h^2}{2!}[\mathrm{f}'(a+h) - \mathrm{f}'(a)] -$$

$$- \frac{\mathrm{B}_4 h^4}{4!}[\mathrm{f}'''(a+h) - \mathrm{f}'''(a)] + \frac{h^7}{5!}\int_0^1 \varphi_5(t)\,.\,\mathrm{f}^{\mathrm{VI}}(a+h\,t)\,\mathrm{d}t.$$

Estas expresiones muestran que si $\mathrm{f}(x)$ es un polinomio, el desarrollo infinito [XVI-14] se corta, obteniéndose una expresión exacta de la integral.

Las expresiones anteriores fueron dadas por C. G. J. JACOBI en 1834, un siglo después del desarrollo infinito [XVI-14]. También pueden darse formas finitas del resto, en términos de una derivada de $\mathrm{f}(x)$ en un punto intermedio desconocido.

III. Polinomios de Legendre. — a) Propongámonos hallar un polinomio $\mathrm{P}_n(x)$ de grado n, tal que sea:

[XVI-23] $$\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_n(x)\,.\,\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

para todo polinomio $\mathrm{Q}(x)$ de grado menor que n.

Podemos poner:

[XVI-24] $$\mathrm{P}_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{R}(x),$$

siendo $\mathrm{R}(x)$ un polinomio de grado $2\,n$, no completamente determinado, pues puede sumársele un polinomio cualquiera de grado $n-1$ sin cam-

biar su derivada n-ésima. Podemos entonces imponerle la condición de anularse en $x = -1$ conjuntamente con las $n-1$ primeras derivadas:

[XVI-25] $R(-1) = R'(-1) = \ldots = R^{(n-1)}(-1) = 0.$

Reemplazando [XVI-24] en [XVI-23], e integrando por partes, resulta:

[XVI-26] $$\left[Q\,R^{(n-1)} - Q'\,R^{(n-2)} + \ldots \pm Q^{(n-1)}R\right]_{-1}^{+1} = 0,$$

y por [XVI-25] y la arbitrariedad de $Q(x)$ se obtiene:

[XVI-27] $R(1) = R'(1) = \ldots = R^{(n-1)}(1) = 0.$

De [XVI-25] y [XVI-27], resulta que $R(x)$ es:

$$(x+1)^n(x-1)^n = (x^2-1)^n,$$

salvo un factor constante, que elegiremos, siguiendo a A. M. LEGENDRE, como el recíproco de $2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n$, y entonces resulta:

[XVI-28] $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

b) El cálculo de los coeficientes de estos polinomios, llamados de LEGENDRE o *funciones esféricas de primera especie*, es muy fácil si se desarrolla la potencia de x^2-1:

$$(x^2-1)^n = \Sigma(-1)^p \binom{n}{p} x^{2(n-p)}, \qquad (p = 0, 1, \ldots, n),$$

y derivando término a término:

$$\frac{D^n(x^2-1)^n}{2^n n!} = \Sigma \frac{(-1)^p}{2^n n!} \cdot \frac{n!}{p!\,(n-p)!}(2n-2p)(2n-2p-1)\ldots(n-2p+1)\,x^{n-2p};$$

multiplicando numerador y denominador por los factores decrecientes a partir de $n-2p$, obtenemos:

$$P_n = \Sigma \frac{(-1)^p}{2^n} \cdot \frac{(2n-2p)!}{p!\,(n-p)!\,(n-2p)!}\,x^{n-2p},$$

fórmula general de los polinomios de LEGENDRE, en la cual se observa que todos los términos son de orden par o todos de orden impar. Es decir: la función $P_n(x)$ es par o impar, según sea el índice n par o impar.

c) Comparando los coeficientes de tres polinomios consecutivos, resulta la relación siguiente, válida para todo valor de x:

$$n\,P_n \doteq (2n-1)\,x\,P_{n-1} - (n-1)P_{n-2},$$

y desde $n = 2$ si convenimos en adoptar $P_0 = 1$. Esta fórmula de recurrencia permite calcular los polinomios de LEGENDRE sucesivamente, partiendo de $P_0 = 1$, $P_1 = x$:

$$P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad P_4 = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, \ \ldots$$

d) Con el mismo método de comparación de coeficientes, resulta esta fórmula de recurrencia que determina la derivada $P'_n(x)$:

$$(x^2-1)\,P'_n = n\,x\,P_n - n\,P_{n-1}.$$

e) Dando a x, en esta relación, el valor 1 ó el valor -1, obtenemos las igualdades:

$$P_n(1) = P_{n-1}(1), \qquad P_n(-1) = -P_{n-1}(-1),$$

y como para todo valor de x es $P_0 = 1$, resulta, en general:

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n.$$

f) Puesto que la función $(x^2-1)^n$ tiene solamente los ceros $+1$ y -1, ambos múltiples de orden n, la primera derivada tiene ambos de

orden $n-1$, y además un cero simple, $x=0$, comprendido entre ellas; la derivada segunda tiene los dos múltiples de orden $n-2$, y además, dos simples, etc. Aplicando así, repetidamente, el teorema de ROLLE, resulta:

La función esférica de orden n tiene n ceros reales, opuestos dos a dos, y todos ellos en el intervalo $(-1, +1)$.

IV. **Bibliografía.** — 1. La gran variedad de fórmulas y métodos de integración numérica, muchos de los cuales, como los de LUBBOCK, GREGORY, WOOLHOUSE, CHEBICHEV, HARDY, etc., no han sido mencionados en este capítulo, están estudiados con mayor o menor amplitud en las obras de matemática práctica y cálculo numérico, en especial WHITTAKER y ROBINSON (citada en Cap. X, nota V-4), en WILLERS y en SANDEN (citadas en Cap. XII, nota III-1) y en SCARBOROUGH (citada en Cap. V, nota IV-3).

Tablas, fórmulas y gráficos referentes a las funciones error, integral-seno, Ei x y li x introducidas en § 57-4, trae la obra de JAHNKE y EMDE y otras citadas en Cap. VII, nota II, *e*. Más detalles sobre estas funciones y otras relacionadas con ellas, pueden verse por ejemplo, en el volumen II de ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER y TRICOMI (citado en Cap. XV, nota III-3). A las dos primeras de estas funciones se refieren las obras:

Tables of the error function and its derivative. (Nat. Bureau of Standards, Appl. Math. Series, nº 41, Washington, D. C., 1954).

Table of sine and cosine integrals. (Ídem, nº 32, 1954).

2. Sobre integración gráfica pueden verse:

M. D'OCAGNE: *Cálculo gráfico y nomografía.* (Jorro, Madrid, 1914)

FR. A. WILLERS: *Graphische Integration.* (S. Göschen; W. de Gruyter, Leipzig, 1920).

J. LIPKA: *Graphical and mechanical computation.* (Wiley, Nueva York, 1918).

3. Sobre integración mecánica trata ampliamente, no sólo la teoría, sino también descripción de los modelos de instrumentos en uso y advertencias acerca de su empleo, la obra de LOSADA y PUGA (citada en Cap. VI, nota VI-2), y el librito de:

FR. A. WILLERS: *Mathematische Instrumente.* (S. Göschen; W. de Gruyter, Leipzig, 1926).

Una versión muy ampliada del anterior, con 251 fotografías y diagramas, conteniendo extensa bibliografía (871 citas) es:

FR. A. WILLERS: *Mathematische Maschinen und Instrumente.* (Akadem. Vlg., Berlín, 1951).

También está muy bien ilustrado y claramente escrito el libro que a la vez es un catálogo de los mejores instrumentos que pueden adquirirse en el comercio:

W. MEYER ZUR CAPELLEN: *Mathematische Instrumente.* (2ª ed., Akadem. Vlg., Leipzig, 1944; Edwards, Ann Arbor, Mich., 1947).

La exposición que hicimos del planímetro de PRYTZ está resumida de

F. B. y L. C. HAYNES: *The knife-edge or hatchet planimeter.* (Rev. of Scient. Instr., 7, 1931, pág. 396).

Una teoría rigurosa de este planímetro, de tan fácil construcción y manejo, exigiría desarrollos considerables, que nosotros no hemos dado. Sobre ello trata:

A. GALLE: *Mathematische Instrumente.* (Teubner, Leipzig y Berlín, 1912).

4. La fórmula sumatoria de EULER - MAC LAURIN tiene interesantes aplicaciones a la sumación práctica de series y a la fórmula asintótica de STIRLING (§ 53-4), que pueden verse en WHITTAKER y ROBINSON (citado en Cap. X nota V-4) o en LOSADA y PUGA (citado en Cap. VI, nota VI-2).

Sobre los polinomios de LEGENDRE puede verse WHITTAKER y WATSON (citada en Cap. XI, nota IV-2). Éste y otros sistemas de polinomios útiles en Análisis superior están tratados en VITALI - SANSONE (vol. II, citada en Cap. IX, nota VIII-3); heurísticamente, en un completo capítulo de POLYA y SZEGÖ (vol. II, citada en Cap. V, nota IV-2), y magistralmente sintetizados en la básica y famosa obra de:

R. COURANT y D. HILBERT: *Methoden der Mathematischen Physik.* (Vol. I, 2ª ed., 1931; vol. II, 1937, Springer, Berlín; trad. inglesa: *Methods of mathematical physics*, vol. I, 1953; Interscience Publ., Nueva York).

o en la obra monográfica, de carácter superior, de:

G. SZEGÖ: *Orthogonal polinomials.* (Amer. Math. Soc., Nueva York, 2ª ed., 1959),

entre otras muchas que pueden citarse. (Ver vol. III, Cap. XXV).

RESPUESTAS A EJERCICIOS

§ 1. Pág. 5.

2. V) V → V: Ejemplo inicial de § 1-2, *a*).
   F) F → V: *Hipótesis*: *a*) Todos los astros son planetas; *b*) El Sol es un planeta; *Tesis*: El Sol es un astro.
   F) F → F: *Hipótesis*: *a*) Todos los triángulos son poliedros; *b*) Un círculo es un poliedro; *Tesis*: Un círculo es un triángulo.

§ 1. Pág. 13.

1. Necesaria.
2. *a*) Ninguna; *b*) Las tres; *c*) Simétrica.
3. Puede no existir elemento *b* ligado al *a* por $\sim$.
4. No.

§ 2. Pág. 17.

Existe pr x para $x = \text{sg}\,1$ por los axiomas I y II. Luego, se aplican los axiomas II y IV para, supuesto existente el $\text{pr}(\text{sg}\,u) = \text{pr}\,x$, probar existe el $\text{sg}\,x = \text{sg}(\text{sg}\,u)$ tal que tenga $\text{pr}(\text{sg}\,x) = x$. Por el axioma V queda probado para todo x natural $\neq 1$, $x = \text{sg}\,u$.

§ 2. Pag. 27.

Efectúese inducción respecto al conjunto finito continente, supuesto primero de un solo elemento y luego suprimiendo de él un elemento no perteneciente al conjunto parcial.

§ 2. Pág. 30.

3. $2^{3^n} > 3^{2^n}$ si $n > 1$; $3^{2^n} > 2^{n^3}$ si $n > 8$; $2^{n^3} > 3^{n^2}$ si $n > 1$; $3^{n^2} > n^{3^2}$ si $n > 3$; $n^{3^3} > n^{2^3}$ si $n > 1$.
4. Bajo la hipótesis fundamental de que el elemento inicial (1) de la sucesión de PEANO es el número cardinal de los conjuntos de *un* elemento (§ 1 - 1), aplicar inducción completa respecto al número de elementos del segundo conjunto.
6. 2º, falso para $a = 1$.
7. 2º, falso al pasar de $n = 2$ a $n = 3$.
8. 124 y 210, respectivamente.
9. Aplíquese el teorema del número mínimo (§ 2 - 7) y § 2 - 11.

§ 3. Pág. 38.

2. Ninguna. Todas, menos la primera.
3. $c-a < d-b < a < c < 2a < b < b+c-a < d < a+b < a+d < 2d$.
4. $c < \{c-a < d-b;\ a+d;\ 2a\} < \{d < a+b;\ a < 0\} < b$.

§ 4. Pág. 45.

2. a^{2n+1}; $-a^{2n+1}$; q^{3+n}; $360\,x^{12}$.
3. a^{6n}; $-a^{6n}$; $343\,a^6 x^{3n-3} y^{3r}$; x^6/a^3; ab; $2^7 = 128$; 3: 1.
4. 3^5; 3^6; $3^2(1+3)$; 3^3; 3^5.
5. $(a-b)^2 > 0$.
6. $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$.

7. $36\,a^6 + 24\,a^5\,b + 12\,a^4\,b^2 - 12\,a^2\,b^4 - 24\,a\,b^5 - 36\,b^6$:
$-a^7 + (a^6/b) - (a^5/b^2) + (a^4/b^3) - (a^3/b^4) + (a^2/b^5) -$
$- (a/b^6) + (1/b^7)$;
$-(x^3/9) + (x^5/25) - (x^7/49) - (x^{11}/121) + (x^{13}/169) +$
$+ (x^{17}/289) - (x^{19}/361)$.
8. $(x^2\,y^4/6) - (x^2\,y^5/7) + (x^2\,y^6/8) - (x^2\,y^7/9) -$
$- (x^3\,y^4/7) + (x^3\,y^5/8) - (x^3\,y^6/9) + (x^3\,y^7/10) +$
$+ (x^4\,y^4/8) - (x^4\,y^5/9) + (x^4\,y^6/10) - (x^4\,y^7/11)$.
9. $[(1/2\,a) + 1].[(x/2\,a) - b^2].[(x^2/2\,a) + b^6]\ldots[(x^9/2\,a) - b^{10}]$;
$(2/3)\,(5/4)\,(4/5)\,(7/6)$.

10. $$\sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n+1}}{(2\,n-1)^2}; \qquad \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n+1}\,n}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)\,(6\,n+4)}.$$

11. $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}; \qquad \sum_{m=5}^{8} \sum_{n=3}^{5} (-1)^{m+n} \frac{a^m}{b^n}.$$

12. $$\prod_{n=1}^{5} \operatorname{tg}(x/2^n); \qquad \prod_{n=1}^{4} \left(\frac{3\,n}{3\,n-1}\right)^{n+2}$$

13. Probar que no se anula para n par ni para n impar.
14. $+ 1434$.

§ 5. Pág. 64.

1. $b - r - 1$; r.
5. $a = b = 0$.
6. $7 = (-2).14 + 1.35$; $1 = (-4).11 + 3.15$.
9. $60\,n - 1$ (n entero).
10. Si los factores primos de $2.2.3.5\ldots p_s - 1$ fuesen todos de la forma $4\,n + 1$, su producto también lo sería.
13. Utilícese la identidad $x^{2k+1} + 1 = (x + 1)\,(x^{2k} - x^{2k-1} + \ldots - x + 1)$, en la reducción al absurdo.
14. De 2^{k-1} maneras, si m está dado por [5-19].
15. $S = 6\,552$; $P = 2\,016^{18}$. 16. Aplicar ejercicio anterior.
17. Si $0 < r < p$, entonces $0.r$, $1.r$, $2.r$, ..., $(p-1).r$, forman un sistema completo de números incongruentes mód. p.
18. Si p es primo, entonces $2.3.4\ldots(p-2) \equiv 1$ (mód. p) por el ejercicio anterior.
19. 4.
21. *a*) $x \equiv 4$ (5); *b*) $x \equiv 9$ (10); *c*) $x \equiv 5$ (7); *d*) Sin solución.

§ 6. Pág. 76.

2. $x + (1/x) - 2 = (x-1)^2/x \geqslant 0$.
3. $a^2 + b^2 \geqslant 2\,a\,b$ (con $>$ si $a \neq b$) aplicada reiteradamente.
4. 1.
5. Pónganse los elementos en un cuadro; $2 = 2\,n/n$; $3/5 = 3\,n/(5\,n)$.
6. 1º) $x/b = (a - c)/(a + c)$; 2º) $x/b = a/(b + c - a)$;
3º) $x/b = a/(a - 2\,b)$; 4º) $x/b = a/(a - b)$.
7. Considérense los casos $a_1 > a_2$, $a_1 = a_2$, $a_1 < a_2$. Para la generalización, basta tomar los $n(n-1)/2$ pares (a_1, a_2), (a_1, a_3), ..., (a_{n-1}, a_n), y sumar. Por aplicación reiterada se obtiene $(\Sigma\, a_i^{\,p+q+r})/n \geqslant [(\Sigma a_i^{\,p})/n]$ $.[(\Sigma a_i^{\,q})/n].[(\Sigma a_i^{\,r})/n]$, y haciendo $p = q = r \ldots = 1$, resulta la última.
9. Considerar: 1º) $(p - b)\,(p - c) = S^2/p(p - a)$; 2º) La potencia de P respecto a la circunferencia: 3º) $r(1 - r)\,b\,h$, $(0 \leqslant r \leqslant 1)$, 4º) $h^2 + 2\,k^2 = (a + b)^2$.

§ 7. Pág. 110.

1. Aplicar § 7-1, *b*; $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ verifica $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4 = 0$; $y = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ verifica $y^6 - 9y^4 - 4y^3 + 27y^2 - 36y - 23 = 0$.
2. $n_0 = 25 . 10^6$.
3. $a_n = [1-(1/n)][2-(1/n)]/6$; $a_n' = [1+(1/n)][2+(1/n)]/6$.
4. $\{x_n ; y_n\} = \sqrt{x_1 y_1}$;

$$\sqrt{2} = \left\{ 1 < \frac{4}{3} < \frac{24}{17} < \frac{816}{577} < \ldots < \frac{577}{408} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2} < 2 \right\}.$$

5. $r_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(r_n - a_n)/2 < 1/2^{2n+1}$; $1/\pi = 2r/C = r$ si $C = 2$.
7. R(1) y él mismo.
8. *a*) No se corresponden los productos; *b*) $\sqrt{7}$ no puede tener correspondiente.
9. Considérese $J_n = (0; 1/n]$.

§ 8. Pág. 125.

1. $x^4 - 13x^3 - 4x^2 - 48x + 64 = 0$; § 7-1, *b*.
2. Ninguna.
3. $\sqrt[12]{625 a^{16}}$; $\sqrt[12]{8 a^3 b^3}$; $\sqrt[12]{16 a^6 b^2}$.
4. *a*) $(10\sqrt{6} - 15\sqrt{2} + 6\sqrt{5} - 3\sqrt{15})/105$;
 b) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$; *c*) $(30\sqrt{6} - 35\sqrt{3} - 49\sqrt{2} + 84)/23$;
 d) $\sqrt{15} + 3\sqrt{10} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 14$.
5. *a*) $\pm \frac{1}{2}$; *b*) $\pm 3/2$; c_1) ± 26; c_2) ± 14; c_3) ± 338; c_4) 166 ó 154; c_5) 178 ó 142.
6. *a*) -2; *b*) 3.
7. 1º) $\sqrt[4]{a}$; 2º) $\sqrt[9]{b}$; 3º) $\sqrt[16]{c}$; 4º) $\sqrt[8]{x^3}$; 5º) $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[8]{b^2})^{3/2}$.
8. 1º) $\log a - \log b + (1/5)(\log c + 3\log x - 2\log d)$;
 2º) $-\log a - (1/7)\log(c - x)$; 3º) 0,9937; 4º) 0,9710;
 5º) 0,9949.

§ 9. Pág. 133.

Aplicando § 9-4, *a*, se llega a $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geqslant 0$.

§ 9. Pág. 136.

1. $6_{30°} = 3\sqrt{3} + 3i$; $8_{135°} = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$;
 $10_{22°} = 9{,}2718 + i.3{,}7461$; $12_{336°} = 10{,}9626 - i.4{,}8809$;
 $-2 + i = (\sqrt{5})_{153°26'}$; $1 - 3i = (\sqrt{10})_{288°26'}$;
 $(2/3) - \frac{1}{2}i = (5/6)_{323°8'}$; $-8 - 15i = 17_{241°56'}$.
2. 1º) $(3a^2 - 1)/(2a)$; 2º) $(1 + 5i)/2$; 3º) $(5\sqrt{2}/2)_{171°52'}$;
 4º) $(\sqrt{3}/9)_{14°47'}$.
3. $\text{Arg}\,[(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)]$ = ángulo en z_3. La razón doble (z_1, z_2, z_3, z_4) real significa que el cuadrilátero $z_1 z_2 z_3 z_4$ tiene dos ángulos opuestos suplementarios y es inscriptible, pudiendo la circunferencia degenerar en recta.
4. Formular la igualdad de ángulos, tal, por ejemplo:
 $$\text{Arg}\,[(\alpha - \beta)/(\beta - \gamma)] = \text{Arg}\,[(\gamma - \alpha)/(\alpha - \beta)].$$
5. $z = (\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$.
6. *a*) $z = (\Sigma \lambda_i z_i)/\Sigma \lambda_i$; *b*) $z' = (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$ está dentro del segmento $z_1 z_2$, y análogamente, z está dentro de $z' z_3$.
7. 1º) Circunferencia de centro 0 y radio 3; 2º) Circunferencia de centro i y radio 5; 3º) Exterior del círculo de centro 1 y radio 4; 4º) Corona circular de centro 0 y radios 2 y 4; 5º) Elipse con focos en

i y $-i$ y eje mayor $2a = 3$; 6º) Hipérbola con focos en 5 y -5 eje transverso $2a = 8$.

8. 1º) Circunferencia de centro $-5i/3$ y radio $4/3$; 2º) Si $k > 1$, circunferencia de centro $(-\alpha + k^2\beta)/(k^2 - 1)$ y radio $k\,|\beta - \alpha| : (k^2 - 1)$. Si $k < 1$ se cambian α y β. Si $k = 1$, mediatriz del segmento de extremos α y β.
9. $v = \frac{1}{3}\sqrt{90}$ km/min; $W = \frac{1}{3}(3 + 3i)$. INDIC.: Hágase un diagrama de velocidades $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, y hállase el circuncentro de ABC mediante $|z - \alpha| = |z - \beta| = |z - \gamma|$.
10. Se cumplen las leyes de tricotomía y transitiva de la desigualdad y de monotonía de la suma. No se cumple la de monotonía del producto, ni el teorema de ARQUÍMEDES - EUDOXO.

§ 10. Pág. 143.

1. $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\, \text{sen}^2\varphi + \text{sen}^4\varphi$; $\text{sen}\, 4\varphi = 4\cos^3\varphi\, \text{sen}\,\varphi - 4\cos\varphi\, \text{sen}^3\varphi$; $\text{tg}\, 4\varphi = 4\, (\text{tg}\,\varphi - \text{tg}^3\varphi)/(1 - 6\,\text{tg}^2\varphi + \text{tg}^4\varphi)$.
2. $a)$ 1_{30°, 1_{150°, $-i$; $b)$ 1_{-18°, 1_{54°, 1_{126°, 1_{198°, $-i$.

   $c)$ $(\sqrt[8]{5})_{15^\circ 52',\ 105^\circ 52',\ 195^\circ 52',\ 285^\circ 52'}$;

   $d)$ $(\sqrt[6]{2})_{-10^\circ,\ 50^\circ,\ 110^\circ,\ 170^\circ,\ 230^\circ,\ 290^\circ}$.
3. $a)$ $\pm 2 \mp 3i$; $b)$ $\pm 4 \mp 3i$
4. Aplicar $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$.
6. $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} = (\varepsilon^n - 1)/(\varepsilon - 1)$;
   $1.\varepsilon.\varepsilon^2 \ldots \varepsilon^{n-1} = (\varepsilon.\varepsilon^{n-1})(\varepsilon^2.\varepsilon^{n-2})\ldots$
7. Aplicar $r^5 = 1$; $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 = 0$.
8. $x = \sqrt[3]{1 \pm i} = (\sqrt[6]{2})_{15^\circ,\ 105^\circ,\ 135^\circ,\ 225^\circ,\ 255^\circ,\ 345^\circ}$.
9. 1º) $(x^2 - \sqrt{2}\,ax + a^2)\ (x^2 + \sqrt{2}\,ax + a^2)$;
   2º) $(x - 1)\,[x^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\,x + 1]\,.\,[x^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)\,x + 1]$

§ 11. Pág. 160.

Homogéneo: $\binom{m+n-1}{n}$; No homogéneo: $\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$.

§ 11. Pág. 165.

1. 5040, 120, 20: 64, 243, 3125; 40320; 2520; 56, 20, 36; 84, 495, 210.
2. 17280.
3. 30.
4. 600.
5. $(n - 1)!\ (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\ (10^n - 1)/9$.
6. $n!/(2n)$.
7. Si no hay letras repetidas $2(n!)^2$. Si cada vocal se repite $\alpha_v, \beta_v, \ldots, \lambda_v$ veces $(\alpha_v + \beta_v + \ldots + \lambda_v = n)$ y análogamente para las consonantes $(\alpha_c + \beta_c + \ldots + \lambda_c = n)$, se podrán formar $2(n!)^2/(\alpha_v! \ldots \lambda_v!\, \alpha_c! \ldots \lambda_c!)$ palabras.
8. 56; 126.
9. 360360.
10. $\binom{p+1}{n}$.
11. 1º) 57; 2º) 210; 3º) 1083.
12. 460.
14. $TS = ST = (2675)$; $S_6 = (89)(56)(27)(184)$; $T_{12} = (89)(2576)(143)$
15. (567) (132).

§ 12. Pág. 169.

2. 1º) 2702; 2º) $8898\,i$. 3. 1º) $78750\, a^5 x^5 y^5$; 2º) -122472.
5. $(\Sigma a_i)^2 = \Sigma a_i^2 + 2\,\Sigma a_i a_j$; $(\Sigma a_i)^3 = \Sigma a_i^3 + 3\,\Sigma a_i^2 a_j + 6\,\Sigma a_i a_j a_k$; $(\Sigma a_i)^4 = \Sigma a_i^4 + 4\,\Sigma a_i^3 a_j + 6\,\Sigma a_i^2 a_j^2 + 12\,\Sigma a_i^2 a_j a_k + 24\,\Sigma a_i a_j a_k a_l$; $(\Sigma a_i)^5 = \Sigma a_i^5 + 5\,\Sigma a_i^4 a_j + 10\,\Sigma a_i^3 a_j^2 + 20\,\Sigma a_i^3 a_j a_k + 30\,\Sigma a_i^2 a_j^2 a_k + 60\,\Sigma a_i^2 a_j a_k a_l + 120\,\Sigma a_i a_j a_k a_l a_m$.
6. 1º) 203490; 2º) 330.
7. 1º) Hacer $a = b = c = \ldots = 1$ en [12-9]; 3º) Hacer $a = b = 1$ en $(a+b)^n - (a-b)^n$; 4º) $(a+b)^n (b+a)^n = (a+b)^{2n}$, igualando coeficientes de $a^n b^n$ en los desarrollos del binomio para el primer miembro y de LEIBNIZ para el segundo; 5º) Hacer $a = 1$, $b = -i$ en $(a+b)^n + (a-b)^n$; 6º) Hacer $a = 1$, $b = i$ en $(a+b)^n - (a-b)^n$.
8. Desarrollar $[z \pm (1/z)]^m$ y aplicar § 10-1.

§ 13. Pág. 172.

1º) $3(3-2y) - y = -5$; $(-1;\ 2)$; 2º) $y = 1 + 2x = 2x + 1$ (indeterminado); 3º) $2(x+2y) - (2x+4y) = -1$ (incompatible).

§ 13. Pág. 190.

1. $A = 4$; $B = 0$; $C = abc$; $D = -(a-b)^4$.
2. La ecuación es de primer grado; $x = -(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1})^{-1}$.
3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & b & 1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} i & 1 & a \\ 1 & b & 1 \\ c & 1 & -i \end{vmatrix}$.
4. La necesidad es inmediata. Para la suficiencia. se iguala a 0 el polinomio y se despeja una de las variables, observando que el radicando que aparece es un cuadrado perfecto. Si éste se anula, el polinomio P dado es un cuadrado perfecto, y entonces, y sólo entonces, A tiene nulos todos los menores de segundo orden. 1º) Irreducible; 2º) $x = 1 - y \pm 2\sqrt{(y-1)^2}$, $P = 2(x-y+1)(x+3y-3)$: 3º) $x = -y + 2 \pm 16$; $P = (x+y-2)^2$.
5. Por las dos últimas filas es:

$$A = \begin{vmatrix} z & d \\ t & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & t \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z & 0 \\ t & e \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & x & y \\ x & b & 0 \\ y & 0 & c \end{vmatrix} =$$

$= abcde - (cdex^2 + bdey^2 + bcez^2 + bcdt^2)$. Por las filas 3ª y 5ª es:

$$B = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 7 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & -5 \\ -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ -5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 9720.$$

6. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & -14 & 7 \\ -2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 49 = \delta^2 = \begin{vmatrix} 14 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 10 \\ 0 & 10 & 21 \end{vmatrix}$, (por filas) $\delta^6 = 343$.

§ 14. Pág. 194.

1. 1º) 2; 2º) 3.
2. De A es 5; de B es 3; de C es $4 - n$ si n es el número de factores nulos en abc; de D es 4 si $a \neq b$, es 1 si $a = b \neq 0$, es 0 si $a = b = 0$.
3. 3 si las dos primeras columnas no son proporcionales, 1 si lo son sin anularse todos sus elementos.

§ 15. Pág. 213.

1. En $x = 0$ vale a, y en $x = a$ vale $3\,a/2$.
2. 1º) $a + b$; 2º) 1; 3º) b.
3. 72.
4. $a = b = 0$; $c = -4$.
5. 4 gr de la 1ª, 4 gr de la 2ª, 12 gr de la 3ª.
6. 1º) Determinado (5; 3; 1); 2º) Incompatible; 3º) Indeterminado $(h = 2)$, $y = x - (15/9)$, $z = x - (21/9)$.
7. 1º) Determinado (1; 2; 3); 2º) Indeterminado $(h = 2)$, $y = (7/2)x + (11/2)$, $z = (1/2)x + (7/2)$; 3º) Incompatible; 4º) Indeterminado $(h = 2)$, $x = (5z + 4t + 5u + 4)/11$, $y = (-2z - 17t + 9u + 5)/11$.
8. 1º) $h = 3$, solución nula; 2º) $h = 3$, $x = -\frac{1}{2}t$, $y = \frac{1}{2}t$, $z = \frac{1}{2}t$.

§ 16. Pág. 231.

1. ± 1, ± 4. No se cumple la ley cancelativa (§ 5-12, c); o bien el determinante de VANDERMONDE de cada tres raíces resulta ser $\equiv 0$ (mód. 15).
2. 0; 1; x; $x + 1$. Es, por ejemplo, $x + x \equiv 0$; $x . x \equiv x$; $x(x + 1) \equiv 0$ (mód. 2).
3. No, pues 2 (mód. 4) no puede tener correspondiente.
4. 16.
5. $x^2 - 5x + 5$.
6. Cociente: $x^2 - 2x + 3$; $k = -15$.
7. $x^7 + 2 = (x^2 - 2)(x^5 + 2x^3 + 4x) + (8x + 2)$.
8. $m = 3$.
9. $5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ con resto nulo.
10. $-/-$ siempre; $+/-$ nunca; $+/+$ si m impar; $-/+$ si m par.
11. m impar.
12. $t^3 A(x, t) \equiv B(x, t) . [(t^3 + t^2)x^2 - t^3 x - 1] + [(2t^3 + 2t^2)x^2 + (2t^6 - 2t^3 - t + 1)x + (2t^2 - 2)]$;
$x^4 A(x, t) \equiv B(x, t) . [2x^2 t + (x^6 - x^5 + 2)] + [(x^9 - 2x^8 + 4x^3 + 2x)t + (-x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x + 4)]$.

§ 17. Pág. 245.

2. En el campo absoluto: a); en el real: a) y b); en el complejo: todos.
3. 1º) : b) $C_{(1, \sqrt{5})}$; c) $C_{(1, \sqrt{-3})}$; 2º) $\sqrt{5} + \sqrt{-3}$.
5. $x^3 + 2x - 1$; $-x^3 - 2x + 1$; $2x^3 - x - 2$; $-2x^3 + x + 2$.
6. $n = 5$.
7. $3x^2 + 7 = [(-13x^2 + 87)/1956] . (15x^5 + 71x^4 + 60x^2 - 56) + [(65x^2 + 241)/1956] . (3x^6 - 17x^4 - 20x^2 + 84)$.
8. m. c. d.: $4x - 1$; m. c. m.: $64x^4 - 16x^3 - 4x^2 + x$.
9. $x - y$.
10. Expresar a_n como producto de los términos independientes de los hipotéticos factores.
11. Aplicar el ejercicio anterior.
12. 1º) $(x + 1)\sqrt{x - 2}/[(x - 1)\sqrt{x + 2}]$; 2º) $(5/3)(x^2 + xy + y^2)$.

§ 18. Pág. 250.

1. Las dos primeras [18-9] dan una ecuación de 2º grado que permite hallar las raíces buscadas.
2. a) $q = 4$, $(1 - i\sqrt{3}; 1; 1 + i\sqrt{3})$: b) $r = 76\,832$ $(-14; 49; 112)$.
3. a) $q = 8$, $(1; -2; 4)$; b) $r = -10\,648$ $(4; 22; 121)$.
4. $q = -16$; $(-3; \pm 4)$.
5. Póngase $u = z_1 + z_2$, $v = z_1 z_2$, $u' = z_3 + z_4$, $v' = z_3 z_4$, y teniendo en cuenta las [18-9] y $u u' = 2(v + v')$, equivalente a $(z_1, z_2, z_3, z_4) = -1$, dedúzcase la condición a demostrar. Ésta es suficiente, porque entonces $A_{k+1} = p A_k + q A_{k-1}$, $(k = 1, 2, 3)$ que con $a_i^{k+1} = p a_i^k + q a_i^{k-1}$

$(i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3)$ si $a_1 \neq a_2$ son las raíces de $x^2 - px - q = 0$, dan $\lambda a_1^k + \mu a_2^k = A_k$, $(k = 0, 1, 2, 3)$, es decir, la ecuación es $\lambda(x + a_1)^4 + \mu(x + a_2)^4 = 0$, que en $\xi = (x + a_1)/(x + a_2)$ da vértices de un cuadrado (cuaterna armónica). En otros casos se obtienen fácilmente cuaternas armónicas degeneradas. (B. RODRÍGUEZ SALINAS).

§ 19. Pág. 264.

1. 140 km; solución extraña 20/7.
2. *a*) 300 litros; $2\frac{1}{2}$ horas; *b*) El primer grifo es un *aspirador* que *vacía* el depósito *lleno*, necesitándose una hora *más* al actuar el segundo grifo.
3. $2b^2 = 9ac$.
4. $-9 < x < 1$.
5. $x = 2$; $-1 \pm i\sqrt{3}$; $-1/5$; $(1 \mp \sqrt{3}\,i)/10$.
6. $x = 1 + \sqrt{2}$.
7. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$; 2; $\frac{1}{2}$; $(1 \pm 2\sqrt{6}\,i)/5$.
8. *a*) $x = 2/3$; $x = 1{,}97$; *b*) $x = \pm 1/3$.
9. $x = ra$; $y = rb$; $z = rc$, con $r = \pm (m/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$.
10. $x = (b + c)m/r$; $y = (c + a)m/r$; $z = (a + b)m/r$; con el triple valor $r = \sqrt[3]{(b + c)(c + a)(a + b)}$.
11. Dos soluc.: $a = 12{,}569$, $b = 4{,}431$; $a = 10$, $b = 7$.
12. Ecuación resolvente $b^2 - 4(a + 2z)(c + z^2) = 0$ da z, que se sustituye en $(x^2 + z)^2 = [x + b(2a + 4z)^{-1}]^2$.

§ 20. Pág. 275.

3º) No tiene límite; 4º) Límite $+\infty$; 5º) Límite ∞.

§ 20. Pág. 281.

1. 1 000 001.
2. Oscilante; 0; 0; $+\infty$; ∞; $-\infty$.
3. $n = (1 + \alpha_n)^n > \frac{1}{2}n(n - 1)\alpha_n^2$; $\alpha_n < \varepsilon$ si $n > 1 + (2/\varepsilon^2)$.
4. $n/\sqrt{n^2 + 1} > \alpha_n > n/\sqrt{n^2 + n}$.
5. Convergente, por ser monótona creciente acotada.
6. $\tau_{n+1} = (\alpha_1 + \alpha_{n+1}n^{-1} + \alpha_2 + \alpha_{n+1}n^{-1} + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1}n^{-1})/(n + 1) \geqslant$ $\geqslant [\alpha_1(1 + n^{-1}) + \ldots + \alpha_n(1 + n^{-1})]/(n + 1) = \tau_n$ si α_n es creciente ($\leqslant$ si decreciente).
7. *a*) Es creciente y acotada, porque $\alpha_n < 2$ implica $\alpha_{n+1} = \sqrt{2 + \alpha_n} < 2$; *b*) Habrá de ser $\alpha = \sqrt{2 + \alpha} > 0$.
8. *a*) Aplíquese el método del ejercicio anterior; *b*) Si $\alpha_n \gtrless r$, es $\alpha_{n+1} = k/(1 + \alpha_n) \lesseqgtr k/(1 + r) = r$. Si $\alpha_1 > r > \alpha_2$ resulta $\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n} < [r/(1 + r)]^n(\alpha_1 - \alpha_2)$; $\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n+2} < [r/(1 + r)]^n(\alpha_1 - \alpha_2)$. Análogamente si $\alpha_1 < r < \alpha_2$.
9. Si $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$ es $\nu(n)/n < m/2^m < m/\binom{m}{2} \to 0$.
10. *a*) $\alpha_{n+1} - \alpha_n = -\frac{1}{2}(\alpha_n - \alpha_{n-1})$; *b*) $\alpha_{2n+2} = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)(2^{2n+1} + 1)/(3.2^{2n})$.
11. 0, $+\infty$; $-\infty$, $+\infty$.
12. Para límites de oscilación finitos: $\limsup(-\alpha_n) = -\underline{\alpha}$, $\liminf(-\alpha_n) = -\overline{\alpha}$; $\underline{\alpha} + \underline{\beta} \leqslant$ $\leqslant \liminf(\alpha_n + \beta_n) \leqslant \{\underline{\alpha} + \overline{\beta}\,;\ \overline{\alpha} + \underline{\beta}\} \leqslant \limsup(\alpha_n + \beta_n) \leqslant$ $\leqslant \overline{\alpha} + \overline{\beta}$; $\underline{\alpha} - \overline{\beta} \leqslant \liminf(\alpha_n - \beta_n) \leqslant$ $\leqslant \{\underline{\alpha} - \underline{\beta}\,;\ \overline{\alpha} - \overline{\beta}\} \leqslant \limsup(\alpha_n - \beta_n) \leqslant \overline{\alpha} - \underline{\beta}$. Si $\underline{\alpha} > 0$ y $\beta > 0$, basta poner . en vez de + y 1/ en vez de 0—. Para límites infinitos y otros casos, cfr. § 21-1, 4 y la regla de los signos.

§ 21. Pág. 294.

1. 8; $1/2$; 4; $1/\sqrt[4]{3}$.
3. a; a_1.
4. $1/e$; 1; $+\infty$; 1
5. $1/\sqrt{e^7}$; $e^{3/4}$.
6. Será $a = [1 + (\alpha_n/n)]^n \to e^{\alpha}$ siendo $\alpha = \lim \alpha_n$ existente. En efecto, si $a > 1$, es $\alpha_n > \alpha_{n+1} > 0$, porque para $b = a^{1/[n(n+1)]} > 1$ queda $n(b^{n+1} - 1) > (n+1)(b^n - 1)$, es decir, $nb^n > b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b + 1$. Si $0 < a < 1$ se toma $c = 1/a$. Para la aplicación se considera $n(\sqrt[n]{ab} - 1) = n(\sqrt[n]{a} - 1)\sqrt[n]{b} + n(\sqrt[n]{b} - 1)$.
7. $\lim \sqrt[n]{(2/1)(3/2)^2(4/3)^3 \ldots [(n+1)/n]^n} = \lim [1 + (1/n)]^n = e$ (cfr. § 53-4). También como en ejercicio siguiente.
8. $4/e$.
10. $|(1+i)/2| = 1/\sqrt{2} < 1$.
11. $e^{ik\pi/3}$, $0 \leqslant k \leqslant 5$.
12. Deberá ser $z = \frac{1}{2}[z + (1/z)]$ si existe $z = \lim z_n$. Si $R(z_1) \neq 0$ es $\operatorname{tg} \alpha_n = I(z_n)/R(z_n) \neq \infty$, con $|\operatorname{tg} \alpha_n| \to 0$, porque $|\operatorname{tg} \alpha_{n+1}| = (k_n - 1)(k_n + 1)^{-1} |\operatorname{tg} \alpha_n| = (k_n - 1)(k_n + 1)^{-1}(k_{n-1} - 1)(k_{n-1} + 1)^{-1} \ldots (k_1 - 1)(k_1 + 1)^{-1} |\operatorname{tg} \alpha_1| < [(k_1 - 1)/(k_1 + 1)]^n |\operatorname{tg} \alpha_1|$, donde k_n es el mayor de los valores $|z_n|^2$ y $1/|z_n|^2$, con $1 < k_{n+1} < k_n$. Para $|\operatorname{tg} \alpha_n| < 1$ es $|z_{n+1} - (1/z_{n+1})| < \frac{1}{2} |z_n - (1/z_n)|$, equivalente a $|z_n^2 - 1| < |z_n^2 + 1|$, de donde $|z_{n+2} - z_{n+1}| = \frac{1}{2} |z_{n+1} - (1/z_{n+1})| < \frac{1}{2} |z_{n+1} - z_n|$, que asegura la existencia de por lo menos un punto de acumulación finito de $\{z_n\}$. Si $R(z_1) = 0$, será también $R(z_2) = R(z_n) = 0$ con $I(z_{n+1}) = \frac{1}{2}\{I(z_n) - [1/I(z_n)]\}$, y si existiese $\lim z_n = z$, quedaría $[I(z)]^2 = -1$, absurdo. Para la generalización, z_n converge hacia la $\sqrt{a}$ más próxima a z_1. No converge, si z_1 se encuentra sobre la mediatriz del segmento que une ambos valores de $\sqrt{a}$.

§ 22. Pág. 328.

1. 1; $3/4$; $1/4$; $23/90$.
2. $R_n < n^{-1}$; $R_n < n^{-1}(n+1)^{-n}$
3. *a*) Diverg.; *b*) Diverg.; *c*) Converg.; *d*) Diverg.
4. Para la serie S, el criterio del cociente da caso dudoso, y el de la raíz, convergencia. Por suma de series geométricas resulta $S = [a/(1-a)] + [b/(1-b)]$. Para la serie T, el criterio de la raíz da caso dudoso. Por series armónicas, resulta
$$T = \zeta(\alpha)/2^{\alpha} + \zeta(\beta)(2^{\beta} - 1)/2^{\beta}.$$
5. *a*) Convergente; *b*) Divergente.
6. $b - a > 1$ con b ni nulo, ni entero negativo.
7. De $u_{k^n} + u_{k^n+1} + \ldots + u_{k^{n+1}-1} < (k-1)k^n u_{k^n}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ se deduce $\Sigma u_m < (k-1)\Sigma v_n$; de $u_{k^n+1} + u_{k^n+2} + \ldots + u_{k^{n+1}} > (k-1)k^n u_{k^{n+1}}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ se deduce $\Sigma u_m > [(k-1)/k]\Sigma v_n$.
8. Para $r = 0$ es $u_n = n^{-a}$; $v_n = k^{n(1-a)}$ con $k^{1-a} < 1$ si $a > 1$; $k^{1-a} \geqslant 1$ si $a \leqslant 1$. Si $a > 1$, escogemos $k > e$; $\ln k > 1$; $\ln_s k^n = \ln_{s-1}(n \ln k) > \ln_{s-1} n$, $(s = 1, 2, \ldots, r)$. Por lo tanto: $\Sigma v_n^{(r)} = \Sigma\{k^n/[k^n \ln k^n \ln_2 k^n \ldots \ln_{r-1} k^n (\ln_r k^n)^a]\} < \Sigma\{1/[n \ln n \ldots \ln_{r-2} n (\ln_{r-1} n)^a]\}$ convergente por inducción respecto de r. Si $0 < a \leqslant 1$, se escoge $k = 2 < e$; $\ln_s k^n < \ln_{s-1} n$, y se aplica la misma inuucción respecto de r para demostrar la divergencia.
9. Si $a = 1 + \varepsilon > 1$ será $[-1 + (n-1)\ln n]\, u_{n-1} - n \ln n\, u_n \geqslant \varepsilon u_{n-1}$.

De $1 + x < e^x$ si $x > 0$ (§ 21-5), para $x = 1/(n-1)$ resulta $(n-1)\ln(n-1) > -1 + (n-1)\ln n$. Por lo tanto, es $[(n-1)\ln(n-1)]\,u_{n-1} - n\ln n\,u_n \geqslant \varepsilon\, u_{n-1}$, y podrá aplicarse el mismo razonamiento empleado en § 22-2, *c* para el criterio de RAABE. Si $a_n < 1 - \delta < 1$, con $\delta > 0$, será $(n-1)\ln(n-1)\,u_{n-1} - n\ln n . u_n \leqslant \leqslant \{1 - \ln[1 + (n-1)^{-1}]^{n-1} - \delta\}\,u_{n-1} < 0$ desde un n, por § 21-5. Así resulta $u_n/u_{n-1} \geqslant (n-1)\ln(n-1)/(n\ln n)$, suficiente para asegurar la divergencia por el criterio de comparación de 2ª especie y el ejercicio anterior. Por éste mismo es $\sum v_n$ divergente para $v_n = 1/(n\ln n\sqrt{\ln(\ln n)})$. Entonces, con $|b_n| < K$ independiente de n es $\dfrac{v_n}{v_{n-1}} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n\ln n} - \dfrac{1}{2\,n\ln n\ln(\ln n)} + \dfrac{b_n}{n^2} \leqslant$

$\leqslant 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{a_n}{n\ln n} = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ para $a_n \leqslant 1$.

Para el caso de ser $a \gtreqless 1$ en el criterio de GAUSS, basta aplicar el criterio de RAABE (§ 22-2, *c*) con $n[1 - (u_n/u_{n-1})] = a + (d_n/n^{p-1})$. Si $a = 1$, la divergencia queda asegurada poniendo $u_n/u_{n-1} = 1 - (1/n) - [1/(n\ln n)]\,(d_n \ln n/n^{p-1})$ con $a_n = d_n \ln n/n^{p-1} \to 0$.

10. Convergente si $a > e$, divergente si $0 < a \leqslant e$. INDIC.: Para $0 < a \lesseqgtr e$ se aplica el criterio de RAABE (§ 22-2, *c*). Para $a = e$, se aplica el criterio de GAUSS (ejercicio anterior), por ser $u_n/u_{n-1} = 1 - (1/n) - [n^2(\sqrt[n]{e} - 1) - n]/n^2$ con $d_n = n^2(\sqrt[n]{e} - 1) - n < < (1/2) + [6(n-1)]^{-1} < K$, pues si $1 > x > 0$, es $1 + x + (x^2/2) < [1 + (x/m)]^m < < e^x \leqslant 1 + (x/1!) + (x^2/2!) + \ldots + (x^m/m!) + \ldots < < 1 + x + (x^2/2) + (x^2/6)(1-x)^{-1}$, (§§ 21-5, *a*; 22-1, *b*), de donde para $x = 1/n$ queda

$\sqrt[n]{e} - 1 - (1/n) - (1/2n^2) < 1/[6n^2(n-1)]$.

11. Si $\beta > 0$, diverge; si $\beta = 0$, converge absolutamente para $\alpha < -1$, condicionalmente para $-1 \leqslant \alpha < 0$ y diverge para $\alpha > 0$; si $\beta < 0$, converge absolutamente.
12. No tiende u_n monótonamente a cero. La serie diverge a $-\infty$, porque $(-1)^n u_n = (-1)^n/\sqrt{n} - 1/[n + (-1)^n\sqrt{n}]$.
13. $1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{13} + \cdots$
15. $\ln 2$. 16. $\sum_{p=0}^{n}\binom{p}{n} = 2^n$.
17. $1/(1-x)^2$; $(1+x)/(1-x)^3$; 2; 400/441.
18. $R(z) > -\frac{1}{2}$; $|z| \leqslant 1$; $|z| \neq 1$; $|z| < e$. Además, resulta la convergencia a b s o l u t a. INDIC.: En la penúltima es $|z - e^{ni}| \geqslant \geqslant ||z| - 1| = c$. En la última, para $|z| = e$, el término general u_n no tiende a cero, pues $|u_n/u_{n-1}| = e/[1 + (1/n)]^n > 1$.

§ 23. Pág. 372.

6. Para k entero es: $f(2k) = 1$, $f(2k+1)$ no definida, y $f(x) = 0$ para x no entero; $g(k + \frac{1}{2}) = 1$ y $g(x) = 0$ en los demás puntos; $h(2k + \frac{1}{2}) = 1$, $h(2k + 3/2)$ no definida y $h(x) = 0$ en los demás puntos.
7. $\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.
10. $x > 1$ y $x < -1$.
11. (* indica: "pertenece al conjunto"): *a*) $-\sqrt{10}$, $+\sqrt{10}$; *b*) 0*, $+\infty$; *c*) 2/3*, $+\infty$; *d*) 0, 2*; *e*) —2*, +2* *f*) 0,1*, 1/3; *g*) 1/9*, 1*.

§ 24. Pág. 382.

Para $t \to \infty$: 0; 3/5; ∞. Para $t \to -1/5$: $-13/6$, ∞, ∞.

§ 24. Pág. 386.

1. a) $\delta = 0{,}02$; b) $\delta = 0{,}000\,2$. 2. $\delta = \varepsilon/5$.
3. a) $\delta = \varepsilon/7$; b) $\delta = \varepsilon/8$. 4. Basta tomar $\varepsilon < 0{,}001$.
5. No, de acuerdo con la definición de § 24-1, pues en todo entorno reducido de 0 hay puntos donde la función no está definida (cfr. ejercicio 8 de § 25). Sí, aceptando el verdadero valor de § 25-3 en aquellos puntos.
6. Cateto opuesto, superficie, dos alturas, dos segmentos de mediatrices.
7. a) Superiores a un ángulo fijo; b) Con límite $\pi/3$.
8. $\lambda = c - a\,c' - b\,b' + a\,b'^2 \neq 0$; $\eta(x) \sim \lambda\,x^{-2}$.
10. 15; $+5/2$; 0. 11. 12; $n\,a^{n-1}$; 18; 3/5; -1.
12. a) 1; b) $n^{-1}\,a^{(1-n)/n}$. 13. $+\infty$; $-\infty$; ∞.
14. 0; 2/3; $+\infty$. 15. -4.
16. No existen. 17. $a/2$.
18. INDIC.: Ejercicio 8. 19. $+\infty$; $(-1)^n\,\infty$.

§ 25. Pág. 395.

1. $\pm\sqrt{n+1}$; $+n^2$; n; $\pm n$; $\pm n/2$. $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.
2. 64/27; $\sqrt{2}$.
4. Los valores funcionales que no se conservan quedan aumentados o disminuídos en el salto o su mitad, según los casos.
5. $f(3^-) = -\infty$; $f(3^+) = +\infty$.
6. $f(0^+) = 1$; $f(0^-) = -1$; de primera especie; salto $s = 2$. Si $b = 0$ es $g(x) \equiv h(x) \equiv 0$, evitable, trivial. Para $b \neq 0$, $g(x)$ tiene discontinuidad infinita de primera especie; si $a > 0$ es $g(0^+) = 0$ y $g(0^-) = (\mathrm{sg}\,b)\infty$; si $a < 0$ es $g(0^-) = 0$ y $g(0^+) = (-\mathrm{sg}\,b)\infty$. Es $h(0^+) = h(0^-) = b/a$, evitable poniendo $h(0) = b/a$.
7. Ambas funciones tienen discontinuidades de primera especie para $x = 10^n$, n entero, siendo continuas a la derecha: $f(10^n - 0) = n - 1$, $f(10^n) = f(10^n + 0) = n$; $g(10^n - 0) = 1$, $g(10^n) = g(10^n + 0) = 0$.
8. 1ª: evitable; 2ª y 4ª: infinita de primera especie; 3ª, 5ª y 6ª: segunda especie. En la 6ª es $x = 0$ punto de acumulación de discontinuidades evitables, que se convierte en evitable, evitando éstas.

§ 26. Pág. 400.

2. El intervalo no es cerrado.
3. El extremo superior 1 no es accesible. La función es discontinua para todo x.
4. $x_n = 2/(2n+1)$, $x_{n-1} - x_n \to 0$, $|f(x_{n-1}) - f(x_n)| = 2$.
5. $\delta = 10^{-6}$.
6. Dividir $[a, b]$ en un número finito de intervalos tales que en cada uno sea $< \varepsilon$ la oscilación de $f(x)$.
7. $y = 3 + x - 3\,|x - 1|$; $y = 2\,|x| - 3\,|x - 1| + |x - 3|$.
9. Sólo si la continuidad de $f(x)$, definida en el campo racional, es uniforme. INDIC.: Probar que en tal caso $f(x)$ tiende hacia un límite $f(\alpha)$ cuando $x \to \alpha$ irracional.

§ 27. Pág. 414.

$e^{x \ln x}$; $e^{(\ln x)/x}$; $e^{-x^2 \ln x}$.

§ 27. Pág. 414.

1. $\delta(\varepsilon) = 1/\sqrt{-\log_2 \varepsilon}$.
4. La discontinuidad de segunda especie de la primera función se convierte en discontinuidad evitable en la segunda, con verdadero valor 1.

5. Si $x_2 = x_1 + h < b$, $e^{x_2} - e^{x_1} = e^{x_1}(e^h - 1) < e^b(e^h - 1)$ con lo que basta la continuidad en 0, probada en § 8-5, *b*.

6. $\ln \sqrt[n]{x} \to 0$ y continuidad de la función logarítmica.
7. $\log 2 > \log 3$, aunque $2 < 3$ (fig. 31 en § 8-7, *b*).
8. $x^x = e^{x \ln x}$ y continuidad de las funciones exponencial y logarítmica.

§ 28. Pág. 418.

3/4; 1/2.

§ 28. Pág. 424.

1. $4.10^7/21600 = 1851.\overline{851}$. 2. $(n + \frac{1}{2})\pi$; $n\pi$; $n\pi$. (n entero).
4. $y < 0$ en $(0, \pi)$, $y \to -\infty$ para $x \to 0^+$ ó π^-, y no está definida ni en 0 ni en $[\pi, 2\pi]$.
6. 6; 1; $-2/9$. 7. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
11. *a*) $2x\sqrt{1-x^2}$; *b*) $x/\sqrt{1-x^2}$; *c*) $(1+x)/(1-x)$; *d*) $x/\sqrt{1+x^2}$
12. Infinitas rectas $y = (\pi/2) - 2x + n\pi$.
13. $-1/2 \leqslant x < +\infty$.

§ 29. Pág. 428.

3. $\text{ch}\,\frac{1}{2}x = +\sqrt{\frac{1}{2}(\text{ch}\,x + 1)}$; $\text{sh}\,\frac{1}{2}x = (\text{sg}\,x)\sqrt{\frac{1}{2}(\text{ch}\,x - 1)}$.
4. $\text{sh}\,p \pm \text{sh}\,q = 2\,\text{sh}\,\frac{1}{2}(p \pm q) \cdot \text{ch}\,\frac{1}{2}(p \mp q)$;
$\text{ch}\,p + \text{ch}\,q = 2\,\text{ch}\,\frac{1}{2}(p+q) \cdot \text{ch}\,\frac{1}{2}(p-q)$;
$\text{ch}\,p - \text{ch}\,q = 2\,\text{sh}\,\frac{1}{2}(p+q) \cdot \text{sh}\,\frac{1}{2}(p-q)$.
5. $-\infty < x < +\infty$; $x \geqslant 1$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

§ 30. Pág. 434.

$\Delta S = 2\pi r \cdot \Delta r + \pi(\Delta r)^2$; $\Delta S/\Delta r = 2\pi r + \pi \cdot \Delta r$.

§ 30. Pág. 434.

$S' = 2\pi r$ = Longitud del incremento anular infinitesimal.

§ 30. Pág. 441.

1. *a*) 4,641; *b*) $-0{,}29\overline{320987654}$.
2. $-2/x^3$; $1/\sqrt{x}$; $a/(2\sqrt{ax+b})$
3. A $(-1; -4)$; B $(3; 0)$. 5. $f'_+(0) = -1$; $f'_-(1)$ no existe.
6. 1º) Para $r > \frac{1}{2}$ y s cualquiera o para $s < r - \frac{1}{2} < 0$. Para $s = r - \frac{1}{2} \leqslant 0$ hay punto anguloso, pues $f'_+(0) = -f'_-(0) \neq 0$. 2º) Para $s < r - \frac{1}{2}$ ó lateralmente para $s = r - \frac{1}{2} \leqslant 0$.
7. P (1; 2); $\text{tg}\,\theta = 3/5 = 0{,}6$; $\theta = 30°57',8$.
8. $P_1(3; 0)$; $\text{tg}\,\theta_1 = 5/7 = 0{,}714\,286$; $\theta_1 = 35°32'.3$.
$P_2(-2; -5)$; $\text{tg}\,\theta_2 = 5/3 = 1{,}666\,667$; $\theta_2 = 59°2',2$.

§ 31. Pág. 445.

1. Tangentes: $y = 3x - 2$; $y = -x + 2$.
Normales: $y = -(1/3)x + (4/3)$; $y = x$.
2. *a*) $y - a x_1^n = n a x_1^{n-1}(x - x_1)$;
b) $y = 2(y_1/x_1)x - y_1$; *c*) $y = -(y_1/x_1)x + 2y_1$;
d) $y = n(y_1/x_1)x + (1-n)y_1$; luego, hay que unir (x_1, y_1) con $[0, (1-n)y_1]$.
3. $(\pm 2; \pm 8/3)$, $12x - 3y \mp 16 = 0$. $(\pm 3; \pm 9)$, $x + 9y \mp 84 = 0$
$\theta = 3°7'20''$.
4. $S_t = 3/4$; $t = 3\sqrt{10}/4$; $S_n = 27/4$; $n = 9\sqrt{10}/4$.
5. $s = 3t - 2$.

§ 32. Pág. 456.

2. $y' = 8(x^3 - 2x)^7(3x^2 - 2)$; $z' = -x/\sqrt{a^2 - x^2}$;
$w' = (3x^2 - 1)/(x^3 - x)$.

3. $y' = 4x/(x^2+2)$; $z' = 4x \ln(x^2+2)/(x^2+2)$;
$w' = 2x/[(x^2+2)\ln(x^2+2)]$.
5. $y' = (x^3-1)(x^2+3) + 4x^3(x^2+1)$; $z' = (1-x^2)/(1+x^2)^2$;
$w' = 1/\sqrt{(x+1)^3(x-1)}$; $u' = -1/(x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x})$.
6. Basta derivar los elementos de la última fila.
7. $y' = -2x e^{-x^2}$; $z' = -3e^{-3x} \ln a$; $s' = e^t(t^{-2} - 2t^{-3})$.
8. $y' = 3(x^2+1)^{3x} \ln(x^2+1) + 6x^2(x^2+1)^{3x-1}$;
$z' = (\ln t)^t \ln \ln t + (\ln t)^{t-1}$; $w' = e^{x^x} x^x (1 + \ln x)$.
9. $f'(\pi/3) = 3$; $g'(\pi/2) = -2$; $h'(\pi) = 2$.
10. $y' = 10^{\operatorname{sen} x}(\ln 10) \cos x$;
$z' = (\cos x \ln x + x^{-1} \operatorname{sen} x) x^{\operatorname{sen} x} + (\ln \operatorname{tg} x + 2x \operatorname{sen}^{-1} 2x)(\operatorname{tg} x)^x$
12. $y' = 1/(\sqrt{1-x^2} \,.\, \operatorname{arc\,sen} x)$; $z' = 1/(2\sqrt{1-x^2})$.
13. $z = y + (\pi/4)$.
14. $y' = \operatorname{ch} x + e^x \operatorname{sh} e^x$; $z' = 1/(2\sqrt{x} \operatorname{ch}^2 \sqrt{x})$;
$w' = (\ln \operatorname{ch} t + t \operatorname{tgh} t)(\operatorname{ch} t)^t$.
15. $y' = 3x^2/\sqrt{x^6+1}$; $z' = 1/\sqrt{4x(x-1)}$; $w' = e^x \operatorname{sen} 2e^x/(1 - \operatorname{sen}^4 e^x)$.
16. La derivada es $2x$, salvo discontinuidades evitables.
17. $f'(x) = \operatorname{arc\,tg}(1/x) - x/(1+x^2)$, $f'_+(0) = +\pi/2$; $f'_-(0) = -\pi/2$, punto anguloso.

§ 33. Pág. 466.

$y''(0) = 0$ con punto de inflexión, aunque no crezca ni decrezca, ni tenga máximo ni mínimo, y sea $y''(x)$ discontinua en $x = 0$.

§ 33. Pág. 468.

2. $f'_-(0) = -\infty$, $f'_+(0) = +\infty$; $g'_-(0) = -1$, $g'_+(0) = +1$.
3. No tiene máximo ni mínimo, ni crece ni decrece, a pesar de ser $f'(0) = 0$, $f'(x)$ continua.
4. *a*) Mínimo en $x = -1$, máx. en $x = 1$; *b*) Máx. en $x = 1$, $x = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$; mín. en $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$; *c*) Mín. en $x = 1$, $x = 3$, máx. en $x = 2$; *d*) Máx. en $x = 1$, mín. en $x = 3$.
5. El cuadrado.
6. *a*) $x_1 = 0\,(m > 1)$, $x_2 = a\,(n > 1)$, $x_3 = ma/(m+n)$;
b) En x_1: creciente si m es impar, mínimo si m es par;
En x_2: decreciente si n es impar, mínimo si n es par;
En x_3: Máximo.
7. $l = a\sqrt{2}$. $l' = b\sqrt{2}$. INDIC.: Póngase la elipse en forma paramétrica
8. $b = d\sqrt{1/3}$; $h = d\sqrt{2/3}$. 9. $h/3$.
10. $l/\sqrt{2}$. 11. $\sqrt{1 + (b/a)^{2/3}}\,(a + \sqrt[3]{ab^2})$.
12. Este problema de máximo es equivalente al anterior de mínimo.
13. *a*) Máx. en $x = 1$; *b*) Mín. en $x = e^{-1/e}$; *c*) Mín. en $x = 1$.
14. Distancia del vértice al centro: $x = (1 + \sqrt{2})R$ (con la base del cono tangente a la esfera).
15. $x = R$.
16. *a*) Inflexiones $x_1 = -1 - \sqrt{10}/5$, $x_2 = -1 + \sqrt{10}/5$; concavidad hacia $y < 0$ en (x_1, x_2) y hacia $y > 0$ fuera; *b*) y'' se anula creciendo en $(\pi/2) + 2k\pi$ y decreciendo en $(\pi/2) + (2k+1)\pi$, k entero; *c*) y'' se anula creciendo en $53°7',8 + 2k\pi$, y decreciendo en $53°7',8 + (2k+1)\pi$.
17. $f(x) = f(-x) > 0$, $f(x) \to 0$ para $x \to \infty$. Máximó (absoluto) en $x = 0$. Inflexiones $x_1 = -1/\sqrt{3}$, $x_2 = 1/\sqrt{3}$. Concavidad hacia $y < 0$ en (x_1, x_2) y hacia $y > 0$ fuera.

§ 34. Pág. 474.

1. *a*) $2t\ \mathrm{d}t/(t^2-1)$; *b*) $e^t\,\mathrm{d}t/(1+e^{2t})$; *c*) $2x^2\,\mathrm{d}x/\sqrt{1-x^3}$; *d*) $3 \operatorname{arc\,sen}^2 t\ \mathrm{d}t/\sqrt{1-t^2}$; *e*) $x^{\operatorname{sen} x}$ $(\cos x \ln x + x^{-1} \operatorname{sen} x)\ \mathrm{d}x$; *f*) $\frac{1}{2} x^{-1/2}\ e^{\sqrt{x}} \operatorname{sh} e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.
3. $\delta = (1 + 3x + \Delta x)\ (\Delta x)^2$; $\delta = (\Delta x)^2/(x^3 + x^2.\Delta x)$.
4. $\cos^{-6} x$.
5. Son las intersecciones de tangentes en puntos correspondientes a valores del parámetro que difieren en $(2k+1)\pi$, (k entero).
7. $u = \operatorname{arc\,cotg} \ln a$.

§ 35. Pág. 483.

1. 1º) ξ cualquiera; 2º) $\xi = \frac{1}{2}(a+b)$; 3º) $\xi = [(a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3})/3]^{3/2}$.
4. A cualquiera, aunque la derivada no sea continua en $x = 0$.
5. Aplicar el teorema [35-1].
7. $\Delta c = (\alpha - 2b \cos C)h/c$, α entre a y $a+h$.
8. $\varepsilon < 0{,}000\,13$. 9. $\varepsilon < 0{,}000\,044$.
10. Error relativo $< 0{,}0014$.
12. Probl. directo: Tablas de sen [cos], arcos próx. a $\pi/2$, [0]. Probl. inverso: Tablas de sen [cos], arcos próx. a 0, [$\pi/2$].

§ 36. Pág. 491.

1. $l_1 = l_2 = 1$; $h_1 = a$, $h_2 = a^n$; $k = b/a$.
2. $9/5$; $1/2$. 3. $+\infty$; 0; 0; 0; 1; 0.
4. ∞; 0; $1/2$. 5. -2; $2a$.
6. $l_1 = 0$; $l_2 = \infty$; $l_3 = 0$; $l_4 = -1/2$.
7. $l_1 = 1$, $l_2 = e^{m/q}$; $h_1 = h_2 = 1$; $k_1 = k_2 = e^{2/\pi}$, $k_3 = 1$.
10. $l = 2$; $h = 0$; $k = 1$.

§ 37. Pág. 499.

2. 3ª y 4ª de igual orden, mayor que 2ª y menor que 1ª.
3. n^m. 4. Equivalente a $x \ln x$.
8. *a*) $y = 1, x = 2$; *b*) $y = 2$, $x = 0$; *c*) $y = 0$; $x = 2$.
9. $y = x$, $x = 1$, $x = -1$. Corta a la primera en $x = 0$.
10. *a*) $y = x$; *b*) $y = x \pm \sqrt{3/2}\,[x - (1/6)]$.
11. $x = 2$; $y = \pm(x + \frac{1}{2})$ secantes.
12. $\lim y = 0$; $\lim y'$ no existe para $x \to \infty$.

§ 38. Pág. 516.

$(-3)^n e^{-3x}$; $2^n \operatorname{sen}(2x + n\pi/2)$; $2^{n-1} \operatorname{sen}[2x + (n-1)\pi/2]$; $(-1)^n(n-1)!(1+x)^{-n}$. Las dos primeras subsisten para $n = 0$ si $\mathrm{D}^\circ y = y$.

§ 38. Pág. 524.

1. $a^x(\ln a)^n$; $2^{n-1}(n+2x)e^{2x}$; $(-1)^n 2.n!(x-1)^{-n-1}$; las dos primeras subsisten para $n = 0$ si $\mathrm{D}^\circ y = y$.
4. $\frac{1}{2}(a+b)^n \cos[(a+b)x + n\pi/2] + \frac{1}{2}(a-b)^n \cos[(a-b)x + n\pi/2]$.
7. $\omega^2 r$. 8. $\gamma = a(h^2 + \omega^2)e^{-ht} \operatorname{sen}[\omega t - 2 \operatorname{arc\,tg}(\omega/h)]$.
10. Puntos de inflexión $x_1 = -\sqrt{2/3}$, $x_2 = +\sqrt{2/3}$; concavidad hacia $y > 0$ en (x_1, x_2) y hacia $y < 0$ fuera. La parábola osculatriz de cualquier orden degenera en el eje x.
11. $x^3/3$; $x^3/2$; $9x^2/2$. 12. Los tres de 2º orden.
13. Orden tres en $(0, 0)$.
14. En $x = 0$ es $y = 1 - x^2$; en $x = 1$ es $y = (x^2 - 4x + 5)/4$. Tercer orden.
15. Ambas tienen parábola osculatriz $y = 1 + \frac{1}{2}x - (1/8)x^2$, con contacto de 2º orden. Entre sí tienen contacto de 3er. orden.

16. $a_1 = 8$; $b_1 = 16$; $a_2 = b_2 = -5$. Contacto de 3$^{er.}$ orden.

§ 39. Pág. 531.

1. $f(x) = 3x^2 + 6x \pm 2$.
4. *a*) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \pi/6) + \ldots +$
$+ (1/n!)\operatorname{sen}[(\pi/6) + n(\pi/2)].\ (x - \pi/6)^n + T_n$;
$T_n = \operatorname{sen}[\xi + (n+1)\pi/2].(x - \pi/6)^{n+1}/(n+1)!$, con ξ entre $\pi/6$ y x.
b) $P_0(x_0) = 0{,}5$, $0 < T_0 < 0{,}02$; $P_1(x_0) = 0{,}5151$, $-0{,}000\,1 < T_1 < 0$;
$P_2(x_0) = 0{,}515\,038$, $-0{,}000\,000\,8 < T_2 < 0$.
5. $\ln 11 = 2{,}397\,895$ con todas sus cifras exactas.
7. $a^x = 1 + \ln a.x/1! + \ldots + \ln^n a.x^n/n! + \ln^{n+1} a.a^{\theta x}.x^{n+1}/(n+1)!$.
Para $y = \operatorname{sen}^2 x$ es $y^{(n)} = 2^{n-1}\operatorname{sen}[2x + (n-1)\pi/2]$, $n \geqslant 1$, y entonces: $\operatorname{sen}^2 x = x^2 - 2^3 x^4/4! + \ldots + 2^{n-1}x^n[\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n-1)\pi]/n! +$
$+ 2^n x^{n+1}\operatorname{sen}[2\theta x + \frac{1}{2}n\pi]/(n+1)!$.
8. $a + x^2/(2a) - x^4/(8a^3)$; $(1/a) - x^2/(2a^3) + 3x^4/(8a^5)$.
10. $x^6/18$. **11.** $-1/12$.
12. $\ln a - \ln b$. **13.** 1.
14. $a = -5/12$; $b = 1/12$; equivalente a $x^6/480$.
15. No, porque para $x \to 0^-$, $\lim\{x^{1/p}.\ln[(1 - x^2)/x^2]\} = 0$.

§ 40. Pág. 533.

1,035; $0 < T_1 < \operatorname{sen} 46^\circ . \cos^{-3} 46^\circ . (0{,}017\,45)^2 < 0{,}000\,8$.

§ 40. Pág. 539.

1. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.
2. $y = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) + \frac{1}{2}(x - a)(e^a - e^{-a}) + \frac{1}{4}(x - a)^2(e^a + e^{-a})$.
3. $y = \frac{1}{2}e(x^2 + 1)$.

§ 40. Pág. 540.

1. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$.
2. *a*) Hay extremos si $p < 0$: máximo en $-\sqrt{-p/3}$, mínimo en $+\sqrt{-p/3}$; inflexión en $x = 0$. Los extremos valen:
$y_e = q \pm 2\sqrt{-p^3/27}$.
b) Hay por lo menos una raíz real, pues $\lim y = +\infty\ (-\infty)$ para $x \to +\infty\ (-\infty)$; hay tres, si $y_{máx} > 0 > y_{mín}$: $\Delta = (p^3/27) + (q^2/4) < 0$. Raíz doble, si $\Delta = 0$; triple, sólo si $p = q = 0$.
3. $f(x) = (1/2a)x^2 + \ldots$ (mínimo); $g(x) = -(4/3)x^4 + \ldots$ (máximo).
4. $1{,}414\,18 < \sqrt{2} < 1{,}414\,22$. Cifras exactas 1,4142.
5. *a*) $x \lg x - 1$ *crece* de -1 a $+\infty$. *b*) $x \sim 2{,}506\,1843$: $\varepsilon < 10^{-7}$.
6. $1{,}07\bar{5}5$.
10. $P_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}[x - (\pi/6)]$; $P_2(x) = P_1(x) - [x - (\pi/6)]^2/4$.
11. $\rho = y^2/a$.

§ 41. Pág. 571.

1. *a*) $1 + i$; -2. *b*) $1 + i(\operatorname{sen} 2)/2$; No existe.
2. No.
3. 1. **4.** π. No, porque $w' = 0$ en $z = 0$.
5. -2, triple; $\sqrt{3}$, simple. **6.** Basta derivar [41-10].
7. Para la suficiencia, aplíquese [41-12]. **8.** 2 y -1, dobles; 4.
9. Ninguna, porque x/y pasa una sola vez de $-\infty$ a $+\infty$, y no es aplicable [41-45] al tener la curva punto impropio para $t = 0$, con asíntota $x = -1$.
10. Las raíces están en los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$. Para la última, se ensaya $183x > x^2[62 - x(x - 20)] + 100$, dando

una raíz en (22; 23). Cambiando x en $-x$, se ensaya $x^2(x^2+20x-62) > 183x+100$, y la raíz negativa está en $(-5; -4)$.

11. Por el primer teorema resulta una raíz negativa y una o tres positivas. Por el segundo teorema queda también asegurado que las raíces están en los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$.
12. Si L es la cota de LAGUERRE-THIBAULT, por derivación sucesiva de $f(x) = \varphi(x) \cdot (x - L) + f(L)$ se obtiene $f^{(m)}(L) = m\,\varphi^{(m-1)}(L) > 0$, $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Para la regla de NEWTON, todos los ceros de $f'(x)$ son también reales.
14. -2; 3; $3/2$; $-1/4$; $5/6$; tres irracionales: 1,719; 6,546; $-4{,}265$.
15. $-1{,}295\,852 \pm 2{,}457\,17\,i$; 2,5917.
16. El método de GRÄFFE da $|x_1| = 36{,}89$; $|x_2| = 22{,}36$; $|x_3| = 13{,}65$; $|x_4| = 10{,}45$. Dos nuevas aproximaciones con el método de NEWTON-HORNER dan las cifras exactas:
$x_1 = 36{,}8960$; $x_2 = 22{,}3410$; $x_3 = -13{,}6669$; $x_4 = 10{,}4302$.

§ 42. Pág. 587.

1. -2; $-2^7 = -128$; $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 128.$
2. $(1 \pm i\sqrt{23})/4$, ceros del m. c. d. $2x^2 - x + 3$. (La resultante de EULER tiene característica 5).
3. $1 \pm i$, dobles.
4. $R(y) = y^2 - 4y + 4$ con cero doble que da *dos* soluciones. Además, $x = 0$ es asíntota común en punto impropio doble. Soluciones: (0; 1; 0) doble; (2; 2), (—4; 2).
5. La eliminante en x es $x^5 - 23x^4 - 2x^3 + 369x^2 - 649x + 300 = 0$, que dividida por $x - 3$ da por cociente el primer miembro de la ecuación del ejercicio 10 de § 41. A cada valor de x corresponden $y = (17x - 19)/(x^2 - 1)$; $z = (19x - 17)/(x^2 - 1)$. Las ocho soluciones del sistema son las tres impropias (1; 0; 0; 0), (0; 1; 0; 0), (0; 0; 1; 0), y las cinco propias (3; 4; 5), (—4,44; —5,07; —5,43), (0,88; 17,91; 1,238), (1,145; 1,428; 15,365), (22,416; 0,725; 0,815).
6. No. INDIC.: La ecuación $x^4 - 20x^3 - 62x^2 + 183x - 100 = 0$ es irreducible en el campo de los números racionales, pues si fuese divisible por $x^2 + hx + k$, debería ser k divisor de 100 y $h = (183k + 20k^2)/(-100 - k^2)$ entero (§ 17-4, g_1). Basta ensayar hasta $k = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10$.
Mediante $x(y^2 - 1) - 17y + 23 = 0$; $x(z^2 - 1) - 19z + 23 = 0$, se prueba que ni y ni z pueden ser irracionales cuadráticos, pues lo sería x, fuera de (3; 4; 5).

§ 43. Pág. 611.

1. ∞; 1; e; 1/4; 0; 1.
2. *a*) Si $|x/x_0| < \lambda < 1$, $\Sigma a_n x^n$ tiene la mayorante convergente $h\,\Sigma n^k \lambda^n$; *b*) Resulta $|a_n x_0^n| \leqslant 2hn^k$ y se aplica *a*).
3. Resulta del criterio de comparación de 2ª especie (§ 22-2, *b*).
4. Mayorante convergente $\Sigma 1/(n^2 + n) = \Sigma[(1/n) - 1/(n+1)]$.
5. $\limsup \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leqslant R^{-1} . R'^{-1}$; $\limsup \sqrt[n]{|a_n : b_n|} \geqslant R^{-1} : R'^{-1}$; (cfr. ejercicio 12 de § 20).
6. $\Sigma(-a_n)x^n$, o también $\Sigma[-a_n + (1/n!)]x^n$.
7. $\sum_0^\infty (-1)^n x^n$; $\sum_{n=1}^\infty (\mp 1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}(n^2 + n)\,x^{n-1}$; $\sum_0^\infty (\mp 1)^n x^{2n}$.
9. *a*) Resulta del caso $n = 1$ por multiplicación reiterada (ejercicio anterior); *b*) Los desarrollos de $[1 - (r-1)x](1-x)/(1-rx) = 1+$

$+ [(r-1)x^2/(1-rx)]$, $(r=2, 3, \ldots, n)$, son mayorantes de 1. Por el ejercicio anterior lo es su producto $(1-x)^n/(1-nx)$.

10. $R_n(1/n) = \frac{1}{2}$; $f(x) = \operatorname{sg}|x|$.
11. $(1+x)/(1-x)^3$; $(1+4x+x^2)/(1-x)^4$.
12. La serie es $f'(1)$, siendo $f(x) = (e^x-1)/x$.

§ 44. Pág. 619.

2. No, el desarrollo representa e^x (cfr. § 38-5).
3. *a*) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - (x^4/8) - \ldots$; $2a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$; $R = \sqrt{2}$;
   b) $1 + 3x - 3x^2 + 15x^3 - 39x^4 + 123x^5 - \ldots$; $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-1}$; $R = 1/3$.
4. *a*) $(1+x)/(1-x)^2$; *b*) $(1+x)/(1-x)^3$;
   c) $(1+x-3x^2+2x^3)/[(1-x)^2(1-2x)]$.
5. $(1+x)/(1-x-x^2)$; $R = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.
6. [45-3]. 7. [45-3] y [45-4].
9. *a*) $y_0^{(n+2)} = (n^2-m^2)y_0^{(n)}$; $y = 1 - m^2x^2/2! + m^2(m^2-2^2)x^4/4! - \ldots$
   b) $y_0^{(n+1)} = 2\binom{n}{2}y_0^{(n-1)} - 2^3\binom{n}{4}y_0^{(n-3)} + \ldots, (n \geqslant 2)$,
   $\operatorname{tg} x = x + (x^3/3) + (2x^5/15) + (17x^7/315) + \ldots$;
   c) $\ln\cos x = -\frac{1}{2}x^2 - (x^4/12) - (x^6/45) - \ldots$; $|x| < \frac{1}{2}\pi$.

§ 45. Pág. 630.

3. $\operatorname{ctg} x - (1/x) = (x\cos x - \operatorname{sen} x)/(x \operatorname{sen} x)$;
   $\operatorname{cosec} x - (1/x) = (x - \operatorname{sen} x)/(x\operatorname{sen} x)$.
8. *a*) Separar partes reales e imaginarias; *b*) $a_n - 2a_{n-1}\cos\varphi + a_{n-2} = 0$, válida para ambas series.
11. $\operatorname{Ln} 2 - i[\operatorname{Arc\,tg}(1/\sqrt{3}) + 2k\pi]$; $(3\pi/2 + 2k\pi)i$;
    $\frac{1}{2}\operatorname{Ln} 2 - (3/4 + 2k)\pi i$.
12. $e^{2k\pi}.e^{i\operatorname{Ln}2}$; $e^{(2k+1)\pi}$; $e^{(2k+1)i}$, $\sqrt{2}.e^{\pi(2k+1/4)}.e^{i[\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2-\pi/4]}$
    $2^{1/\sqrt{2}}.e^{i\pi\sqrt{2}(2k+1/4)}$; $13\,e^{6k\pi-3\operatorname{Arc\,tg}(2/3)}.e^{i[(3/2)\operatorname{Ln}13+2\operatorname{Arc\,tg}(2/3)]}$.
13. 1º) y 2º) se verifican completamente, 1º) con correspondencia de valores principales, 2º) no siempre $[\operatorname{Arg}(zw) \neq \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w]$; 3º) no se verifica completamente: valores del primer miembro pueden no tener correspondiente en el segundo: los valores principales se corresponden.
14. Si $x > 0$: $((x))^x = x^x.e^{2k\pi ix}$, real para $2kx$ entero, sólo $k=0$ si x es irracional ó $x = p/(2q+1)$; si $x = p/2q$ también $k = q \therefore -x^x$. Si $x < 0$: $((x))^x = (-x)^x.e^{i(2k+1)\pi x}$, real sólo si $(2k+1)x =$ entero, es decir, si $x = -p/(2q+1)$; el $k = q$ da $(-1)^p(-x)^x$. $\sqrt[3]{1/3}$; $\pm\sqrt{1/2}$; $e^e = 15.15\ldots$; $\sqrt[3]{9/4}$; $-\sqrt[3]{3}$; los otros dos no existen.
15. $10^{p/q} \neq n$, $10^p \neq n^q$ si $n \neq 10$ Si $n = 10^h.a$ es $\lg n = h + \lg a$.
16. 1º) $x = \begin{cases} e;\ e^e \\ 10;\ 10^{10} \end{cases}$; 2º) $x = \begin{cases} e^e;\ e^{e^e} \\ 10^{10};\ 10^{10^{10}} \end{cases}$; 3º) $x < 1$; $x < \begin{cases} e \\ 10 \end{cases}$.
17. $(e^{2m\pi i+2k\pi i})^i = e^{-2(m+k)\pi} = e^{-2n\pi}$ para $k = n - m$.
20. $|R_n| < \dfrac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n)}\,\dfrac{|x|^n}{1-|x|}$ para $|x| < 1$, pero si $0 < x < 1$ es
    $|R_n| < \dfrac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n)}\,x^n$ y $\operatorname{sg} R_n = (-1)^{n-1}$.
21. Para $x = -1$ convergen 1º y 3º por el criterio de RAABE.
22. *a*) Poner $2xz - z^2 = t$, y desarrollar $(1-t)^{-1/2}$, (§ 45-5, ej. 2).
    b) Derivar logarítmicamente y en $(x-z)y = (1-2xz+z^2)y'$ aplicar el método de los coeficientes indeterminados (§ 44-4).

23. Si $m > 0$, hay convergencia absoluta en $x = \pm 1$. Si $m < 0$, hay divergencia en $x = -1$; en $x = 1$, la serie es condicionalmente convergente, oscilante o divergente, según que $-1 < m < 0$, $m = -1$, $m < -1$.

24. $\sqrt{66} = 8\sqrt{1 + (2/64)} = 8{,}1240\underline{4}$; $\sqrt[3]{1031} = 10(1+0{,}031)^{1/3} = 10{,}10226$; $\sqrt[3]{2} = (5/4)\sqrt[3]{128/125} = (5/4)[1 + (3/125)]^{1/3} = 1{,}25992$.

27. $11°32'13'' = 0{,}201357$; error $< 10^{-6}$.

28. $\operatorname{arc\,tg} x = (\pi/2) - \operatorname{arc\,tg}(1/x)$, si $x \geqslant 1$, etc.

30. $k = h/l$; $s = 2l[k + (1/k)] \operatorname{arc\,tg} k = 4l\,[\tfrac{1}{2} + k^2/(1.3) - k^4/(3.5) + \ldots]$.

§ 46. Pág. 649.

2. $x^3 - 5x^2 + 3x + 12 = 3 + 4(x+1) - 3(x+1)(x-1) + (x+1)(x-1)(x-2)$.
3. Basta intercambiar x por y.
4. $c = 1$; $b = -1$; $a = 2$.
5. Se aplica a $R(x)/Q(x)$ la fórmula de § 46-4, a, empleando $P(x_i) = R(x_i)$.
6. Si $Q(x) \equiv (x-a)^2 Q_1(x)$, para $A_1 = f(a)/Q_1(a)$ se aplica $Q''(a) = 2\,Q_1(a)$; para A_2 y B se aplica a $\dfrac{[f(x) - A_1 Q_1(x)] : (x-a)}{(x-a)\,Q_1(x)}$ la fórmula de § 46-4, a con $Q'''(a) = 6\,Q_1'(a)$.
7. Es $Mb_i + N = f(b_i)/Q_1(b_i) = (r_0 b_i + r_1)/(s_0 b_i + s_1)$, $(i = 1; 2)$, con $b_1 + b_2 = p$; $b_1 b_2 = -q$;

$$\frac{f(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{M_2 x + N_2}{x^2 + x + 1}.$$

$A_1 = f(1)/Q'(1) = 1$; $A_2 = f(-1)/Q'(-1) = 1$;

$Q_1(x) = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 - x - 1$;

	2	0	—3	—2	9	0
2)	0	4	8	2	—16	0
—2)	0	0	—4	—8	—2	16
	2	4	1	—8	—9	16

	1	1	0	—1	—1
2)	0	2	6	8	0
—2)	0	0	—2	—6	—8
	1	3	4	1	—9

$$M_1 = \frac{\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 16 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -9 \end{vmatrix}} = 1; \qquad N_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -9 \\ -2 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -9 \end{vmatrix}} = -2;$$

Análogamente $M_2 = -1$; $N_2 = 1$.

8. Verifíquese que el coeficiente de $(x - x_i)^{-1}$ es $f(x_i)/Q'(x_i)$.

10. $a)$ $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{8(x+1)} + \dfrac{49}{24(3x-5)}$;

$b)$ $-\dfrac{1}{3(x-1)} + \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$; $c)$ $-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{(x-2)^2}$;

$d)$ $\dfrac{1}{2(x-1)^2} + \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{x}{2(x^2+1)}$;

$e)$ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$;

$f)$ $\dfrac{1}{3(x^2+1)} + \dfrac{\sqrt{3}x+2}{6(x^2+\sqrt{3}x+1)} - \dfrac{\sqrt{3}x-2}{6(x^2-\sqrt{3}x+1)}$;

$g)$ $1 + \dfrac{4a^4}{(x^2+a^2)^2} - \dfrac{4a^2}{x^2+a^2}$.

§ 47. Pág. 656.

2. 40; 157; 426; ...
3. $y = 2 + 2[x] + 15[x]^2 + 5[x]^3$; $\Delta y = 2 + 30[x] + 15[x]^2$; $\Delta^2 y = 30 + 30[x]$; $\Delta^3 y = 30$; $\Delta^4 y = 0$.
4. $f(x) = 3 - 2[x] + 3[x]^2 + 3[x]^3 = 3x^3 - 6x^2 + x + 3$.
5. Para $x = 0{,}0477$ se toma $x_0 = 0{,}05$; $h = 0{,}05$, dando $f(0{,}0477) = 0{,}99772$ con todas sus cifras exactas, sin que influyan desde las diferencias terceras. Para $x = 0{,}2862$ se toma $x_0 = 0{,}30$; $h = -0{,}05$, dando $f(0{,}2862) = 0{,}92135$ con todas sus cifras exactas, sin que influyan desde las diferencias cuartas.

§ 48. Pág. 672.

1. La ordenación resulta de los axiomas I y III (§ 48-1); la contigüidad de considerar polígonos regulares de n lados ($n \to \infty$): $s_n = \pi r^2 (\text{sen}\, 2x)/(2x)$; $S_n = \pi r^2 (\text{tg}\, x)/x$, con $x = \pi/n$.
4. *a*) $I = J$; *b*) $I = -J$.
5. $e - e^a$; $1 - \cos a$; $\text{sen}\, a$. INDIC.: Tomar subintervalos iguales; usar ejercicio 7 de § 45.
9. Con n natural es $\lim I_n = 0$ para $-1 \leqq a \leqq 1$; ∞ para $a < -1$; $-\infty$ para $a > 1$.
10. $([b]/12)\{6b^2 - ([b]+1)(2[b]+1)\}$.
11. $1/(\nu + 1) < \int_\nu^{\nu+1} dx/x < 1/\nu$.
13. 1º) Cualquiera entre 0 y 1; 2º) $(a+b)/2$; 3º) $\sqrt{ab}$.
14. Considerar el trinomio en t: $\int_a^b [f(x) + t\, g(x)]^2\, dx \geqq 0$.

§ 49. Pág. 676.

1. La oscilación de $|f(x)|$ no supera a la de $f(x)$.
2. Si $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$ (notaciones de § 49-1, con ' para $g(x)$), en una partición tal que $\Sigma\, \omega_r\, \delta_r < \varepsilon/(2M')$, $\Sigma\, \omega_r'\, \delta_r < \varepsilon/(2M)$ es $\Sigma (M_r M_r' - m_r m_r')\, \delta_r < \varepsilon$. En el caso general, considérese $f(x) - m$ y $g(x) - m'$.
5. -2 y $+2$ para ambas funciones: $g(x)$ tiene en $[0; 2\pi]$ dos mínimos y ningún máximo.

§ 50. Pág. 678.

$|x - 2|$

§ 50. Pág. 683.

1. $x - a$; $\frac{1}{2}(x^2 - a^2)$; $\cos a - \cos x$. (§ 48-4 y ejercicio 5 de § 48)
2. $\frac{1}{2} x^2 \,\text{sg}\, x - \frac{1}{2} a^2 \,\text{sg}\, a$. 3. $(\pi/4) - (-\pi/4) = \pi/2$.
4. $F(x)$ es discontinua en $x = 0$ (cfr. § 30-5, ej. 1); $I = 1 - [e/(e+1)] + 1/(1+e) - 0 = 2/(1+e) > 0$.
5. Sí.
6. *a*) 1 (ejercicios 6 ó 7 de § 48); *b*) $+\infty$ (ejercicio 8 de § 48); *c*) oscilante entre 0 y 2 (ejercicio 5 de § 48).
7. Un círculo de radio 1. 8. $\pi/2$. 9. -1.

§ 51. Pág. 696.

En (0; 1) es $x = +\sqrt{t}$; en $(-1; 0)$ es $x = -\sqrt{t}$;

$$2\int_0^1 dt/2\sqrt{t} = 2.$$

§ 51. Pág. 702.

1. $y = (x^2/2) - 2$.
2. $h = -\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + h_0$; $t_m = v_0/g = \frac{1}{2}\tau$; $d = v_0^2/g$.
4. Multiplicar por $1 = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$: $1 = (\cos^2 x + \text{sen}^2 x)^2$; $I = \sqrt{1-x}/\sqrt{1+x}$.
5. $I_1 = (2/5)\sqrt{(1-2x)^5} + C$; $I_2 = (2/3)(\text{sen}\, x)^{3/2} + C$;
   $I_3 = -2\cos\sqrt{x} + C$; $I_4 = \ln[k/(1-\text{sen}\, x)]$;
   $I_5 = \sqrt{1-x^2} + C$; $I_6 = (3/4)\,\text{arc tg}\, x^4 + C$;
   $I_7 = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\, x^2 + C$; $I_8 = \frac{1}{2}(\text{arc sen}\, x)^2 + C$;
   $I_9 = \frac{1}{2}\ln^2(\ln x) + C$.
6. a) $\int dx/\text{ch}\, x = 2\int de^x/(e^{2x}+1) = \int \text{ch}\, x\, dx/(1+\text{sh}^2 x) =$

$$= \int dx/(\text{ch}^2 \tfrac{1}{2}x + \text{sh}^2 \tfrac{1}{2}x);$$

   b) $2\,\text{arc tg}\, e^x - \frac{1}{2}\pi = \text{arc tg sh}\, x = 2\,\text{arc tg tgh}\, \frac{1}{2}x$.
7. $A = 4/15$; $B = 2(\sqrt{3} - \pi/3)$; $C = \pi/12$.
8. En $(-\pi/2;\ 0)$ es $+\sqrt{1-x^2} = -\text{sen}\, t$.
9. Para $0 \leq t \leq \pi$ no es $t = \text{arc sen}\, x$ uniforme. Es

$$\int_0^{\pi} t^2 \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \int_0^1 (\text{Arc sen}\, x)^2\, dx + \int_1^0 (\pi - \text{Arc sen}\, x)^2\, dx = -2\pi.$$

10. Efectuar las sustituciones: $x = \frac{1}{2}\pi - t$; $x = \pi - t$.
11. $I = (5/2)\,x + 4\,\text{sen}\, x + (3/4)\,\text{sen}\, 2x - (1/3)\,\text{sen}^3 x + C$;
    $J = -\frac{1}{2}\,\text{sen}^{-2} x - \ln|k\,\text{sen}\, x|$.
13. $I = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \dfrac{1}{n+1}\right) + C$, si $n \neq -1$; $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$, si $n = -1$
14. $I = \frac{1}{2}\{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\,\text{arc sen}\,(x/a)\} + C$.
15. $J = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4})\,\text{arc sen}\, x + x\sqrt{1-x^2}/4 + C$.
16. a) $I_1 = -\cos x + C$; $I_2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\,\text{sen}\, 2x + C$;

$$I_n = -\frac{\text{sen}^{n-1} x \cdot \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

   b) $J_n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\,\text{arc sen}\, x - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int \text{sen}^{n+1} u\, du$, $(u = \text{arc sen}\, x)$.
17. $K_1 = \text{arc tg}\, x + C$; $K_{n+1} = \dfrac{x}{2n(1+x^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} K_n + C$.
18. $I = \mu(e - e^{-1})$, $\mu = (16 - 2e^2)/(e^2 - 1)$; $J = \mu.2\ln 2$, $\mu = 0$.
19. $K = -2\pi \neq 0$.

§ 52. Pág. 707.

$$\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)\,b^2(x^2+b^2)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2n-3}{2(n-1)\,b^2}\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^{n-1}}; \quad (n \geqq 2).$$

§ 52. Pág. 712.

Poniendo $t = 1/x$ se reducen a otras semejantes a las de los ejemplos

5 y 11 de § 52-2. Es

$$I = -\tfrac{1}{2}\ \text{arg sh}\ \frac{2}{x} + C; \qquad J = -\ \text{arc sen}\ \frac{1-x}{2x} + C.$$

§ 52. Pág. 714.

1. $I = \ln \dfrac{|k(x-4)^6|}{|x-2|^8}$; $J = x + \ln \dfrac{|k(x-2)^{13}|}{|x-1|^7}$;

$K = \dfrac{x^3}{3} + x - \dfrac{1}{2} \ln \left|\dfrac{k(x+1)}{x-1}\right|$;

$L = \dfrac{1}{2a^2} \ln \dfrac{kx^2}{|a^2-x^2|}$; $M = \ln \dfrac{|k(x-1)^3|}{|x(x+1)^2|}$;

$N = \dfrac{1}{2} \ln \left|\dfrac{k(x-1)(x-2)}{x+1}\right|$.

2. $I = \frac{1}{2}$ arc tg $\frac{1}{2}(x-3) + C$; $J = x + \ln|k(x-2)/(x-1)|$;
$K =$ arc tg $(x+1) + \ln|k(x-2)|$.
3. $I = (x+1)^{-1} + \ln|kx/(x+1)|$;
$J = -[3/(4x)] + \ln \sqrt[16]{|kx/(x+4)|}$;
$K = x^{-1} + \ln|kx| +$ arc tg $2x$;
$L = -[(12x+39)/(2x^2+12x+20)] - 6$ arc tg $(x+3) + C$;
$M = x^{-1} - (x-2)^{-1} + 3\ln|kx|$.
4. $2\sqrt{2}\,I = \frac{1}{2}\ln|k(x^2+\sqrt{2}x+1)/(x^2-\sqrt{2}x+1)| +$
$+$ arc tg $(\sqrt{2}x+1) +$ arc tg $(\sqrt{2}x-1)$;
$J = x + [2a^2x/(x^2+a^2)] - 2a$ arc tg $(x/a) + C$.
5. $4I = 7\ln|k(x^2+1)/x^2| - [(7x^2+4)/(x^4+x^2)]$;
$J = \ln|kx| +$ arc tg $x + [(x^2-1)/(x^3+x)]$.
6. $I = \dfrac{2}{b^3}\left(\dfrac{(a+bx)^{(6-n)/2}}{6-n} + \dfrac{2a(a+bx)^{(4-n)/2}}{n-4} + \dfrac{a^2(a+bx)^{(2-n)/2}}{2-n}\right) + C$;
$J = (2/b^3)\{[(a+bx)^{7/2}/7] - [2a(a+bx)^{5/2}/5] + [a^2(a+bx)^{3/2}/3]\} + C$;
$K = (6/7)x^{7/6} - (6/5)x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6$ arc tg $x^{1/6} + C$.
7. *a*) arg sh $(x+1) + C$; *b*) $\frac{1}{2}$ arg ch $[(x-\frac{1}{2})/3] + C$;
c) $\frac{1}{2}$ arc sen $2x + C$; *d*) arc sen $[(x+2)/(2\sqrt{2})] + C$;
e) $\frac{1}{2}$ arc sen $[(2x^2+1)/3] + C$.
8. $8I = (4x+6)\sqrt{x^2+3x-2} - 17\ln(2x+3+2\sqrt{x^2+3x-2}) + C$;
$13J = \ln|3x+\sqrt{-3+8x-4x^2}| + (24/\sqrt{23})$ arc tg $[(3\sqrt{3-2x}+$
$+2\sqrt{2x-1})/\sqrt{46x-23}] - 4$ arc tg $\sqrt{(3-2x)/(2x-1)} + C$;
$K = -2$ arc tg $[(\sqrt{1+x-x^2}-x-1)/x] + C$ (aplicar § 52-2, *b*, nota 2).
9. *a*) $-[\sqrt{4-x^2}/x] -$ arc sen $(x/2) + C$, $(x = 2$ sen $t)$; *b*) $\frac{1}{4}\ln|$
$|kx/(4+\sqrt{16-x^2})|$, $(x = 4$ sen $t)$; *c*) $(x^2-2a^2)\sqrt{x^2+a^2}/3 + C$,
$(x = a$ tg $t)$; *d*) $(1/a)$ arc sec $(x/a) + C_1$, $(x = a$ sec $t)$.
10. *a*) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$, $(x = a$ sh $t)$;
b) $\frac{1}{2}x(x^2-2)\sqrt{x^2-4} - 2\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C$, $(x = 2$ ch $t)$;
c) $\frac{1}{2}x\sqrt{4+9x^2} + (2/3)\ln|x+(1/3)\sqrt{4+9x^2}| + C$, $(x =$
$= (2/3)$ sh $t)$;
d) $(2/3)$ arc tg $[(x+\sqrt{x^2-9})/3] + C$, $(x = 3$ ch $t)$. Relación entre las constantes: $C - C_1 = (4n-1)\pi/6$.
11. Intégrense las identidades.
$(at+b)^{p+1}t^q = a(at+b)^p t^{q+1} + b(at+b)^p t^q$;
$D[(at+b)^{p+1}t^{q+1}] = (p+1)a(at+b)^p t^{q+1} + (q+1)(at+b)^{p+1}t^q$.
12. $I(m,n) = \displaystyle\int t^m (1-t^2)^{(n-1)/2}\,dt$;

$$I(m,n) = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I(m+2, n-2);$$

$$I(m,n) = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I(m, n-2);$$

$$I(m,n) = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I(m-2, n).$$

13. $(a^2 + b^2)^{-1/2} \ln | \operatorname{tg} \frac{1}{2} [x + \operatorname{arc\,tg} (a/b)] | + C.$

16. $(1/4) \operatorname{tg}^4 x - (1/2) \operatorname{tg}^2 x + (1/2) \ln (1 + \operatorname{tg}^2 x) + C.$

17. *a*) $x + \operatorname{arc\,tg} e^x - \ln | k \sqrt{1 + e^x} |$; *b*) $\ln | \operatorname{tgh} (x/2) | + C$;
c) $-e^{-x} + C$; *d*) $x + [(2 - \sqrt{3}) / \sqrt{3}] \ln (e^x + 2 - \sqrt{3}) -$
$- [(2 + \sqrt{3}) / \sqrt{3}] \ln (e^x + 2 + \sqrt{3}) + C.$

§ 53. Pág. 720.

1. Primitivas: $(1/a) \operatorname{arc\,tg} (x/a)$; $(\operatorname{sg} a) \operatorname{arc\,tg} x/|a|$; $(1/2a) [\ln (a + x) / (a - x)]$.
2. [51-9] y [51-10].
3. Ejercicio 14 de § 52.
4. Sustitución $x = a + (b - a) \operatorname{sen}^2 t$.
5. Integral no convergente ($x = \frac{1}{2} \pi$).
6. § 53-2, ej. 1, y sustituciones: $a x = u$; $\ln (1/x) = u$.
7. I se reduce a [53-7] por $x = \operatorname{sen} t$; J a [53-9] por $\sqrt{x - x^2} = t x$.
8. Se hace $x = 1 - t$. En $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} x \cos^{2q-1} x \, d x$ hacer $\operatorname{sen}^2 x = t$.
9. $(p + q) B (p + 1, q) = p B (p, q)$.

§ 54. Pág. 732.

1. $8 a^2/15$.
2. Tres círculos de radio r.
3. Seis círculos de diámetro a.
4. Un círculo de radio a.
5. $A = 2 \pi a^2$; $A_0 = (\pi + 2) a^2$; $A_1 = 4 a^2$.
6. $V = \pi r^2 . 2 \pi a$ = cilindro de altura igual al recorrido del centro.
7. $V = \pi a b z_0^2 / 2$ = mitad del cilindro que lo comprende.
8. $V = \frac{1}{2} \pi r^2 a$.
9. $V = 5 \pi^2 r^3$; $A = 64 \pi r^2 / 3$.
10. $a > r = b$, $A = 2 \pi [r^2 + a r (\operatorname{arc\,sen} e) / e]$, con $e = \sqrt{a^2 - r^2}/a \to 0$;
$a < r = b$, $A = 2 \pi \{r^2 + (a^2 r / \sqrt{r^2 - a^2}) . \ln [(r + \sqrt{r^2 - a^2}) / a]\}$.

§ 55. Pág. 745.

1. $d s = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 9 x} \, d x$; $s = [(4 + 9 a)^{3/2} - 8] / 27$.
2. $d s = (a/x)^{1/2} d x$; $s = 6 a$.
3. $x = b [(k + 1) \cos t - \cos (k + 1) t]$,
$y = b [(k + 1) \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} (k + 1) t]$;
$s = 4 b k^{-1} (k + 1) (1 - \cos \frac{1}{2} k t)$, con $k = B / b$. Para $B = b$ se hace $\varphi = \pi - t$ con $b - x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$, dando $r = 2 b (1 + \cos \varphi)$.
5. $T = 4 \sqrt{l/g} \, K (\frac{1}{2} \pi, \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta_0)$.
6. $$s = -\operatorname{cotg} \theta \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2} - \frac{a}{k} \int_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t} \, d t +$$
$$+ \frac{b^2 k}{a} \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d t}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}}; \quad k = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
7. No.
8. $s = \frac{1}{2} a [\operatorname{arg\,sh} \varphi_0 + \varphi_0 \sqrt{1 + \varphi_0^2}]$

9. *a*) $\rho = 2\,(p + x)^{3/2}/p^{1/2}$; *b*) $\alpha = 3\,x + 2\,p$, $\beta = -\,2\,x^{3/2}/p^{1/2}$; parábola semicúbica, $\beta^2 = 4\,(\alpha - 2\,p)^3/(27\,p)$.
10. $\rho = (y^{-4} + 4\,x^2)^{3/2}\,y^3/|\,6\,x^2 + 2\,|$; $P(\pm 1/\sqrt{3},\ 3/4)$.
11. $\rho = (\pm\, a^2 \mp e^2 x^2)^{3/2}/(a^2 \sqrt{\pm 1 \mp e^2})$; $\alpha = e^2 x^3/a^2$, $\beta = -\,e^2\,(\pm\, a^2 \mp \mp\, x^2)^{3/2}/(a^2\sqrt{\pm 1 \mp e^2})$.
13. *a*) $\alpha = -\,a\,m\,e^{m\varphi}\ \mathrm{sen}\,\varphi$, $\beta = a\,m\,e^{m\varphi}\ \cos\,\varphi$;
b) $r = a\,e^{m(\varphi + k)}$, $k = (1/m)\ \ln\,m - \frac{1}{2}\,\pi$.
15. *a*) $x = a\,(\cos\,t + t\ \mathrm{sen}\,t)$, $y = a\,(\mathrm{sen}\,t - t\,\cos\,t)$; *b*) $s = \frac{1}{2}\,a\,t^2$.
19. $P = N = \frac{1}{2}\,V = 2\sqrt{2}$; $P = N = V = \infty$.

§ 56. Pág. 751.

1. $T = 20$ kgm.
3. 7 853 982 kgm.
4. $T = n\,R\,T\ \ln\,[(v_1 - b)/(v_0 - b)] - a\,(v_1 - v_0)/v_0\,v_1$.
5. $2/\pi = 0{,}63663$; $\sqrt{2}/2 = 0{,}7071$.
6. $\sqrt{\frac{1}{2}\,(a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2)}$. Indic.: Aplicar § 53-1.

§ 57. Pág. 766.

1. 0,69377. Concavidad hacia $y > 0$.
2. Sea P_i el punto de la curva de abscisa i ($i = 0, 1, 2, \ldots$), σ_i el área entre el arco $P_i\,P_{i+1}$ y su cuerda, y σ_i' la trasladada llevando P_i al origen O. Muéstrese que σ_1', σ_2', σ_3', ..., no tienen partes interiores comunes.
4. 0,69315.
6. 0,74.
7. *a*) $f(t) = t - t^4/(2.4) + 3\,t^7/(8.7) - \ldots + {}$ $+ (-1)^n\,(2\,n - 1)!!\,t^{3n+1}/[(2\,n)!!\ (3\,n + 1)] + \ldots$;
b) Basta tomar dos términos; $f(\frac{1}{2}) = 0{,}492$.
8. $K(\frac{1}{2}\pi, k) = \frac{1}{2}\pi\,[1 + (\frac{1}{2}\,k)^4 + (3!!\,k^2/4!!)^2 + (5!!\,k^3/6!!)^2 + \ldots]$, $(k^2 < 1)$;
$E(\frac{1}{2}\pi, k) = \frac{1}{2}\pi\,[1 - (\frac{1}{2}\,k)^2 - (3!!\,k^2/4!!)^2/3 - (5!!\,k^6/6!!)^2/5 - {}$ $- \ldots]$, $(k^2 < 1)$.
9. 5,870 con error menor que 0,0004 acotado por [57-8] con $|\,y^{IV}\,| < 2$. Cinco términos, los que aun dan 5,86989.
11. $(1 - n)\,I_n = x^{1-n}\,e^x - I_{n-1}$.
12. 0,69312; sólo la última cifra es inexacta.

§ 58. Pág. 770.

1. $\frac{1}{2}\,10^{-6}$
2. 5 cm.
6. 1,118.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS Y ABREVIATURAS

i
Unidad imaginaria, *9-2*; 9-1.

(a_1, a_2)
Par ordenado de números reales, 9-2.

$\mathrm{R}(\ \ )$
Parte real, 9-2.

$\mathrm{I}(\ \ )$
Parte imaginaria, 9-2.

$r_\varphi = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$
Complejo en forma polar, 9-4.

$\overline{\varphi} = \operatorname{Arg} \alpha$
Valor principal del argumento, 9-4*b*.

$\arg \alpha$
Argumento multiforme, 9-4*b*.

$\overline{\alpha}$
Complejo conjugado de α, 9-4d_1.

$r \cdot e^{i\varphi}$
Complejo en forma exponencial, 9-4*d*, 43-5*b*.

(z_1, z_2, z_3)
Razón simple, 9-Ej.

(z_1, z_2, z_3, z_4)
Razón doble, 9-Ej.

$\sqrt[n]{((\alpha))}$
Raíz general multiforme, 10-4*a*.

$\mathrm{C}_{(1)}$
Cuerpo de los números racionales, II-I; Cuerpo mínimo o absoluto, 17-1*a*.

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3$
Vector del espacio de tres dimensiones, II-IIIb_2.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Vector de n dimensiones, II-IIIb_3.

$\mathbf{i}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$
Primera unidad de una base del espacio vectorial, II-IIIb_3.

$\mathbf{a} = a_0 1 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$
Cuaternio, II-IIId_1.

$\overline{\mathbf{a}}$
Cuaternio conjugado de a, II-IIId_2.

$\mathrm{E}(\mathbf{a})$
Parte escalar de un cuaternio, II-IIId_3.

$\mathrm{V}(\mathbf{a})$
Parte vectorial de un cuaternio, II-IIId_3.

$\mathrm{V}_{m,n}$
Variaciones, 11-1.

$\times$
multiplicado por, 11-1.

$\mathrm{V}'_{m,n}$
Variaciones con repetición, 11-1.

P_m
Permutaciones, 11-2*a*.

$\mathrm{P}_m^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}$
Permutaciones con repetición, 11-2*c*.

$\mathrm{C}_{m,n}$
Combinaciones, 11-3*a*.

$0!$
Factorial de cero = 1, 11-3*a*.

$\binom{m}{n}$
Número combinatorio, 11-4; Coeficiente binomial generalizado, 45-5*a*.

$\mathrm{C}'_{m,n}$
Combinaciones con repetición, 11-4*b*.

$\begin{pmatrix} i & j & k & l \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
Sustitución, 11-5.

$S(\mathrm{P})$
Sustitución S aplicada a la permutación P, 11-5*a*.

$U = 1$
Sustitución idéntica, 11-5b_4.

S^{-1}
Sustitución inversa de S, 11-5b_7.

$(a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k)$
Ciclo, 11-6.

σ^k
Potencia de un ciclo, 11-6.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
Determinantes de 2º y 3er. orden, 13-2.

α_{ik}
Menor complementario del elemento a_{ik}, 13-4*a*.

A_{ik}
Adjunto del elemento a_{ik}, 13-4a_2.

c_{ij}
Producto escalar de la fila i por la columna j, 13-6.

$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Bmatrix}$
Matriz, 14-1; sustitución lineal, 15-7.

$\equiv$
Equivalencia de expresiones algebraicas, 15-1*b*.

$[x] = \mathrm{E}(x)$
Parte entera de x, *23-3*; 15-2b_2.

S^p
Potencia de una sustitución, III-I*a*.

$\mathrm{C}_{(\alpha)}$
Adjunción de α a un cuerpo C, 17-1*a*.

$\mathrm{C}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$
Cuerpo de r variables independientes, 17-1*a*.

$\mathrm{D}(x)$
Máximo común divisor algebraico, 17-3*c*, 42-1.

$\mathrm{M}(x)$
Mínimo común múltiplo algebraico, 17-3*c*.

Δ
Discriminante de una ecuación, 19-1*a*, X-III*d*; error de, V-II*a*; incremento de, V-II*a*, 25-1*a*; Diferencia tabular, 35-5*a*; Operador simbólico de diferencias, 47-2.

π
Número pi, IV-I*d*, V-IIIc_2, XI-II, 53-3.

$\{a_n\}$
Sucesión, 20-1.

$\infty, +\infty, -\infty$
Límite infinito, 20-1, 21-6*b*, 24-5, 24-8; Extremos infinitos, 23-14*b*.

$\overline{a} = \lim\sup a_n = \overline{\lim}\, a_n$
Límite superior de oscilación, 20-5.

$\underline{a} = \lim\inf a_n = \underline{\lim}\, a_n$
Límite inferior de oscilación, 20-5.

$\infty - \infty$
Indeterminación, 21-1*a*₂, 36-4*b*.

$0 \cdot \infty$
Indeterminación, 21-1*b*₂, 36-4*a*.

$0/0$
Indeterminación, 21-1*c*₄, 25-3, 36-3*a*.

∞/∞
Indeterminación, 21-1*c*₄, 36-3*b*, *c*.

$0^\lambda = \begin{cases} 0, & (\lambda > 0) \\ +\infty, & (\lambda < 0) \end{cases}$
Límite singular, 21-3*a*.

$(+\infty)^\lambda = \begin{cases} +\infty, & (\lambda > 0) \\ 0, & (\lambda < 0) \end{cases}$
Límite singular, 21-3*b*.

$(+\infty)^0$
Indeterminación, 21-3*b*, 36-5.

$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & (a > 1) \\ 0, & (0 < a < 1) \end{cases}$
Límite singular, 21-3*c*

$1^{+\infty}$
Indeterminación, 21-3*c*.

$a^{-\infty} = \begin{cases} 0, & (a > 1) \\ +\infty, & (0 < a < 1) \end{cases}$
Límite singular, 21-3*d*.

$1^{-\infty}$
Indeterminación, 21-3*d*.

$a^\infty, \ (0 < a \neq 1)$
Oscilación, 21-3*e*.

1^∞
Indeterminación, 21-3*e*, 36-5.

$0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty$
Límites singulares, 21-3*f*.

0^∞
Oscilación, 21-3*f*.

$(+\infty)^{+\infty} = +\infty, \quad (+\infty)^{-\infty} = 0$
Límites singulares, 21-3*f*.

$(+\infty)^\infty$
Oscilación, 21-3*f*.

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$
Serie, 22-1*a*.

$U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
Suma parcial de una serie, 22-1*a*.

H_n
Suma parcial de la serie armónica, 22-1*d*; Polinomios de Hermite, X-II*b*₂.

R_n
Serie resto, 22-1*g*; Reducida de una fracción continua, V-IIIa; Coeficientes de la fórmula de GAUSS, 57-5; Coeficientes de la fórmula de NEWTON-COTES, 57-6, 57-Ej.

$\zeta(\alpha)$
Serie armónica generalizada, 22-2*b*₂.

$C = \gamma$
Constante de EULER o de MASCHERONI, 22-8*b*

T
Matriz de TOEPLITZ, V-I*a*; Trapezoide, 48-2; Trabajo, 56-1.

$(C, 1) \quad , \quad (C, k)$
Sumabilidad CESÀRO, V-I*g*.

Δ^*
Límite superior o cota de error, V-II*a*.

$\alpha = (\Delta A)/A$
Error relativo, V-II*c*.

α^*
Límite superior o cota de error relativo, V-II*c*.

ε_a
Error aproximado, V-II*e*₁.

ε_a^*
Cota de error aproximado, V-II*e*₁.

$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$
Fracción continua, V-III*a*.

$a_0 + \frac{1\,|}{|\,a_1} + \frac{1\,|}{|\,a_2} + \ldots + \frac{1\,|}{|\,a_n} + \ldots$
Fracción continua, V-III*a*.

$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$
Fracción continua, V-III*a*.

$[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, \ldots, a_{k+n}}]$
Fracción continua periódica, V-II*d*.

$x, y, z, \ldots \ (\rho, \theta, \varphi, \ldots)$
Variables, 23-1.

$a, b, c, \ldots \ (\alpha, \beta, \varphi, \ldots)$
Constantes, 23-1.

mant
Mantisa, 23-3.

$f(x)$
Función, 23-4.

$u = u(x, y, \ldots, t)$
Función de varias variables, 23-4.

$P(x, y)$
Polinomio en dos variables, 23-8.

$w = f(z); \begin{cases} w = u + iv \\ z = x + iy \end{cases}$
Función compleja de variable compleja, 23-8*c*, 41-1*a*.

$\exp(u)$
e^u, 23-8*c*.

$f[g(x)]$
Función de función, 23-18.

$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l; \quad \lim_{x \to a} f(x) = l$
Límite funcional, 24-1.

$f = O(g)$
Comparación de variables, 24-3*b*

$$\underline{\int} \; ; \; \overline{\int}$$

Integrales inferior y superior de DARBOUX, 49-2.

$$\int_a^X f(x)\,dx$$

Función integral, 50-1a.

$$\int_a^X f(x)\,dx + C$$

Integral indefinida, 50-1b.

C

Constante de integración, 50-1b; Conjunto generalizado de CANTOR, XIII-IV; Curvatura, 55-5; Longitud de la circunferencia, Resp., 7-Ej.

$$\int f(x)\,dx$$

Primitiva, 50-1b.

$$\Big[F(x) \Big]_a^b$$

F(a) — F(b), 50-2a.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

Integral generalizada, $\lim_{X\to\infty} \int_a^X f(x)\,dx$, 50-4a.

$$\Phi(\infty)$$

$\lim \Phi(X)$ para $X \to \infty$, 50-4a.

$$D_u$$

Derivada respecto a u, 51-1 Tabla.

$$D^{-1} f(x)$$

Antiderivada de $f(x)$, 51-3a.

$$\int R(x, y)\,dx$$

Integral algebraica o abeliana, 52-2c.

$$I(p, q)$$

Integral de diferencial binomia, 52-2d.

$$m!!$$

Producto de factores decrecientes de dos en dos unidades, 53-2.

$$B(p, q)$$

Integral euleriana de 1ª especie o función Beta, 53-Ej.

$$\Gamma(n)$$

Integral euleriana de 2ª especie o función Gamma, 53-Ej.

A

Área absoluta, $\int_a^b |f(x)|dx$, $(a<b)$, 54-1a.

A

Área orientada o relativa, 54-1d.

$$\int_C y \cdot dx$$

Integral a lo largo del contorno orientado C, 54-1d.

$$\mu_i$$

Indice topológico de una región R_i, 54-1e.

$$|R_i|$$

Área absoluta, 54-1e.

V

Volumen, 54-3.

$$s = s(x)$$

Abscisa curvilínea, 55-1b.

$$ds$$

Diferencial de arco, 55-1b.

$$\mathbf{ds}$$

Vector diferencial de arco, 55-2.

$$\operatorname{sn} u$$

Seno elíptico de JACOBI, 55-3b.

$$K(t, k) \quad ; \quad E(t, k)$$

Integrales elípticas de LEGENDRE, 55-3b.

$$C_m$$

Curvatura media, 55-5.

$$V_a^b f(x)$$

Variación total en $[a, b]$, 55-9, 55-Ej.

$$P \quad , \quad N$$

Variaciones positiva y negativa en $[a, b]$, 55-9b, 55-Ej.

$$L(x),\ V(x),\ P(x),\ N(x)$$

Longitud y variaciones total, positiva y negativa en $[a, x]$, 55-9d.

$$p$$

Presión, 56-2.

$$\sigma$$

Media cuadrática de una función, 56-3.

L

Longitud finita de un arco, XV-Ia.

$$s_n$$

Perímetro de quebrada inscrita, XV-Ia.

$$F(I)$$

Función de intervalo, XV-Ib.

$$z_m(t) \overset{\bullet}{\to} z(t)$$

$z_m(t)$ converge uniformemente a $z(t)$, XV-II.

$$L_a^b z(t)$$

Longitud de arco en $[a, b]$, 55-9c, XV-II

$$E, I, P$$

Sumas de ordenadas: extremas, de índice impar, y par excluyendo las extremas, 57-3b.

$$\Phi(x) = \operatorname{erf} x$$

Función error (Fehlerintegral), 57-4, 57-Ej.

$$\operatorname{Si}(x)$$

Función integral-seno, 57-4.

$$\operatorname{Ei} x$$

Función exponencial-integral, 57-4

$$\operatorname{li} x$$

Función logaritmo-integral, 57-4.

$$(B-1)_n$$

Subpotencias, XVI-IIa.

$$\varphi_n(r) \quad , \quad \Phi_{n+1}(r)$$

Polinomios de BERNOULLI, XVI-IIc.

$$D^0 y = y$$

Derivada de orden cero. Resp. 38-Ej.

ÍNDICE ALFABÉTICO

CH

D

G

H

I

N

O

P

Q

R

S

W

Y

Z

La EDITORIAL KAPELUSZ S.A. dio término a la decimotercera tirada de la octava edición de esta obra, que consta de 3.000 ejemplares, en el mes de febrero de 1985, en los Talleres Gráficos Litodar, Viel 1448, Buenos Aires.

K — 19.787